на правах рукописи

ЯГУПОВ Станислав Александрович

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОШИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СЖАТИЕ ГАЗА С РЕАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2002

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре прикладной математики.

Научныйруководитель:
- доктор физико-математических наук, профессор Баутин СП.

Официальные оппоненты:
- доктор физико-математических наук, профессор Долголева Г.В.,
- доктор физико-математических наук, профессор Иванов А.О.

Ведущая организация:
- Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится "23" "декабря" 2002 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М. Горького (620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248).
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "23" "ноября" 2002 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат.наук., доцент Пименов В.Г.

Диссертация посвящена исследованию специальных начально-краевых задач для нелинейных систем уравнений с частными производными. Проведенное исследование использовано для решения задач о безударном сильном сжатии газов с реальными уравнениями состояния.

Актуальность темы. Сильное сжатие газа представляет интерес для решения различных физических задач, в том числе для реализации управляемого термоядерного синтеза. При этом режимы безударного сжатия газа оказываются энергетически более выгодными, чем сжатие газа с использованием ударных волн. Кроме этого, именно режимы безударного сильного сжатия позволяют получить большие значения плотности газа.

Математическое описание безударного сильного сжатия газа ведется в различных направлениях.

Первое направление математического исследования безударного сильного сжатия газа состоит в использовании точных решений систем уравнений газовой динамики для политропного газа.

Е.И. Забабхиным, И.Е. Забабахиным [1] указано, что впервые простая центрированная волна Римана применена. Гюгонио [2] и Рэлеем [3] к описанию безударного сильного сжатия плоского слоя газа. Описание безударного сильного сжатия первоначально однородного и покоящегося в цилиндре или шаре идеального политропного газа осуществляется с помощью автомодельных решений Л.И. Седова [4]. Интерпретации этих решений для задач о безударном сильном сжатии газа посвящены работы Я.М. Каждана [5], И.Е. Забабахина, В.А. Симоненко [6], А.Н. Крайко, Н.И. Тилляевой [7]. А.Ф. Сидоровым [8] два точных решения применены для описания безударного сильного сжатия до бесконечной плотности газа, который в начальный момент покоится внутри призмы или многогранника при согласованных значениях показателя политропы газа 7 и двугранных углов исходных фигур. В работах А.Ф. Сидорова [9, 10], А.Ф. Сидорова, О.Б. Хайрулиной [11] и других исследователей точно и приближенно описывается безударное сильное сжатие газа, первоначально однородного и покоящегося внутри тел неодномерной формы. Все перечисленные точные решения получены, исходя из каких-либо заранее указанных свойств: симметрии, автомодельности, линейности по части переменных и т.п. Только после построения этих решений под них подбираются начально-краевые задачи, имеющие содержательный газодинамический смысл.

Другое направление математических исследований безударного сильного сжатия газа связано с приближенными аналитическими, численными или комбинированными численно-аналитическими методами. Например, Г.В. Долголевой, А.В. Забродиным [12, 13] показано, что в рамках оболочечной системы можно подобрать такой закон энерговложения, который позволяет воспроизвести зависимости скорости и давления на внешней границе сжимаемого слоя, необходимые для осуществления безударного сжатия в смеси дейтерий-тритий.

Имеются работы А.Ф. Сидорова [14], А.Н. Крайко [15-17] об оптимальном сжатии плоских, цилиндрических и сферических слоев однородного покоящегося газа.

В монографии СП. Баутина [18] предложен единый подход к математическому исследованию безударного сильного сжатия газа. При этом сначала ставятся начально-краевые задачи, описывающие процесс безударного сильного сжатия произвольного, локально аналитического, фонового течения на произвольной, локально аналитической поверхности. Для поставленных начально-краевых задач доказываются теоремы существования и единственности аналитических и кусочно-аналитических решений. Решения рассматриваемых задач представляются в виде бесконечных рядов с коэффициентами, рекуррентно определяемыми в явном виде или через квадратуры. Исследуются свойства решений, в том числе доказываются теоремы, устанавливаются асимпотические законы поведения газодинамических параметров при неограниченном росте плотности. Этот подход получил дальнейшее развитие при решении различных задач газовой динамики как в работах СП. Баутина, так и в работах его учеников: СЛ. Дерябина, А.Л. Казакова, Ю.В. Николаева, А.В. Рощупкина, Н.П. Чуева.

Как указывается в работах А.Ф. Сидорова (см. [19], с. 467), СП. Баутина (см. [18], с. 139) и других исследователей, одним из наиболее актуальных на сегодня направлений математического исследования безударного сильного сжатия газа является учет реальных уравнений состояния. Такие уравнения состояния определяются в соответствующих, как правило, очень сложных экспериментах, в которых исследуются термодинамические свойства заданных реальных сред. В этих экспериментах уравнения состояния получаются в виде больших таблиц. Аппроксимация подобных таблиц в том или ином аналитическом виде (рациональные дроби, тригонометрические функции, сплайны) представляет из себя трудную и нетривиальную математическую задачу. Реальные уравнения состояния сплошных сред, наиболее интересные для соответствующих физических экспериментов, до недавнего времени практически были недоступны широким кругам исследователей, поскольку относились к закрытым материалам.

Имеется только две работы, в которых с помощью аналитических подходов исследуется безударное сильное сжатие неполитропного газа.

А.Ф. Сидоровым [20] в плоско-симметричном случае исследовано изэнтропическое сжатие плоского слоя с произвольной изэнтропой $p = p(p)$. При этом постулируется, что $p'\{p) = c^2(p)$ - есть монотонная функция.

СП. Баутиным [18] рассмотрено безударное сильное сжатие газа с двумя произвольными уравнениями состояния: во-первых, близкого к политропному $cp = p^7 f_o(p, S)$, а во-вторых, вида $p = p(p, e)$, где e - внутренняя энергия и предполагается выполнение условий нормальности этих газов. Доказана возможность безударно сжать газ с этими уравнениями состояния до некоторой плотности, строго больше первоначальной.

Также имеются многочисленные работы по исследованию сильного сжатия газа с реальными уравнениями состояния с помощью различных численных методов, в основном, с помощью конечных разностей.

Методы исследования. В работе использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики. У рассмотренных в диссертации характеристических задач Коши решения представляются либо в виде бесконечных сходящихся рядов, коэффициенты которых получены при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, либо в автомодельном виде, т.е. получаются как решения специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказательство существования и единственности решения осуществляется сведением поставленных характеристических задач Коши к характеристическим задачам Коши стандартного вида, для которых справедлив аналог теоремы Ковалевской. Анализируются свойства полученных решений, в том числе указываются границы их применимости.

Целями работы являются:

1. Доказательство существования и единственности решения характеристических задач Коши с конкретными реальными уравнениями состояния газа. Доказательство состоит в сведении таких характеристических задач Коши к характеристическим задачам Коши стандартного вида, для которых справедлив аналог теоремы Ковалевской.
2. Построение решений, зависящих от двух независимых переменных, в виде рядов по степеням одной переменной с коэффициентами, зависящими от другой. А также построение автомодельных решений, зависящих от одной, специальным образом введенной, независимой переменной.
3. Использование построенных решений для математического описания течений газа, возникающих при сильном сжатии.

Научная новизна работы заключается в следующем.

Для характеристических задач Коши, учитывающих конкретные реальные уравнения состояния и важных с точки зрения физических приложений, доказано существование и единственность аналитических решений. Также проанализированы свойства полученных решений и границы их применимости, в том числе, с точки зрения их физической интерпретации.

Теоретическая ценность работы состоит в следующем.

Доказано существование и единственность решения для конкретных систем квазилинейных уравнений с частными производными, учитывающими реальные уравнения состояния. Доказательство проведено сведением к ранее установленной теореме.

Кроме этого, для системы уравнений газовой динамики с реальным уравнением состояния водорода построены автомодельные решения. С помощью этих решений выявлено три качественно разных режима сжатия цилиндрических и сферических объемов газа, не являющегося нормальным.

Практическая ценность работы состоит в том, что построенные решения описывают процессы течения газа, важные для физических экспериментов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001 г.; на VI Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов механики жидкости и газа" (САМГОП — 2000), Пермь, 2000 г.; на VII Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов механики жидкости и газа" (САМГОП — 2002), Снежинск, 2002 г.; на Международной конференции "VI Забабахинские научные чтения", Снежинск, 2001 г.; на Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика" (RDAMM — 2001), посвященная 80-летию академика Яненко Н. Н., Новосибирск, 2001 г.; на Международной конференции "Уравнения состояния вещества", Институт теплофизики экстремальных состояний ОИВТ РАН, Эльбрус, 2002 г.; на Международной конференции "Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании", Алма-Ата, 2002 г.; на Всероссийской конференции молодых ученых "Проблемы исследования и разработок по созданию силовых и энергетических установок 21 века", Центральный институт авиационного моторостроения, Москва, 2000 г.; на "Конференции молодых ученых по математике, математическому моделированию и информатике", Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, 2001 г.; на межотраслевой научно-практической конференции "Снежинск и наука", Снежинск, 2000 г.; на 32-ой, 33-ей региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, 2001, 2002 гг.; на научном семинаре "Дифференциальные уравнения и их приложения" в Уральском государственном университете путей сообщения в 1999-2002 г.; на научном семинаре "Нелинейные дифференциальные уравнения" в Институте математики и механики УрО РАН в 2002 г.; на Всероссийской научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования - транспорту - 2000", УрГУПС, Екатеринбург, 2000 г.; на III научно-технической конференции "Молодые ученые - транспорту", УрГУПС, Екатеринбург, 2001 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [25-38].

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, семи параграфов, заключения, списка литературы и рисунков. Объем диссертации состовляет 92 страницы машинописного текста, включая 16 рисунков и 60 библиографических ссылок.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор современного состояния исследуемой проблемы и краткое изложение основных результатов работы.

В первой главе рассматриваются характеристические задачи Коши, описывающие сжатие газа с реальным уравнением состояния воздуха. Доказывается существование и единственность локально-аналитического решения у этих характеристических задач Коши.

Глава содержит 4 параграфа.

В первом параграфе для полноты изложения на примере уравнения состояния $p = p(\rho, e)$ описывается общий подход к решению задач о безударном сжатии газа с произвольным уравнением состояния, предложенный С.П. Баутиным [18].

Во втором параграфе рассматривается конкретное реальное уравнение состояния воздуха:

$$e = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot z \cdot [\mu(z, \ln\rho) - 1] \qquad (1)$$

взятое из статьи Г. Броуда [21], где $\delta = 0.4$, $z = \frac{p}{\rho}$, p -давление, ρ -плотность, $\mu(z, \ln\rho)$ - конкретная функция, описывающая свойства воздуха. Она состоит из суммы рациональных дробей от z и является линейной по $\ln\rho$.

Функция (1), задающая уравнение состояния, является аналитической при $z \geq 1$, $\rho \geq 1$ - поскольку при этих значениях z и ρ знаменатели рациональных дробей в нуль не обращаются.

С помощью численного исследования обыкновенного дифференциального уравнения, передающего основное термодинамическое тождество, построена изэнтропа воздуха с данным уравнением состояния и выявлены границы параметров газа, вне которых уравнение состояние не физично.

В третьем параграфе доказывается существование и единственность решения характеристических задач Коши 1, 2 с реальным уравнением состояния

Система уравнений газовой динамики, записанная для искомых функций θ, u, z в случае уравнения состояния (1), имеет вид

$$\begin{cases} \theta_t + u\theta_r + u_r + \nu\frac{u}{r} = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{1}{\gamma_0}(z_r + z\theta_r) = 0, \\ z_t + uz_r + \frac{zD_2(z)}{D_1(z,\theta)}\left(u_r + \nu\frac{u}{r}\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\theta = \ln\rho$, D_1, D_2 являются рациональными дробями от z, D_1 линейно зависит от θ. К системе (2) присоединяются данные на характеристике $C^{\pm}$:

$$\vec{U}_0(t,r)|_{r=r_0(t)} = \vec{U}_{00}(t), \tag{3}$$

которые предполагаются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $t = t_*$.

Для выделения единственного решения необходимо к задаче (2), (3) добавить еще одно условие. Для задачи о сжатии до бесконечной плотности (характеристическая задача Коши 1) это условие "вертикали"

$$r(t,\theta)|_{t=t_*} = r_* = \mathrm{const} > 0.$$

В задаче о получении наперед заданных значений плотности (характеристическая задача Коши 2) требуемое дополнительное условие задает значение плотности в момент сжатия

$$\theta|_{t=t_*} = \theta_*(r).$$

Решение характеристической задачи Коши 1 описывает сжатие газа до бесконечной плотности. Поэтому у параметров искомого течения при $t \to t_* - 0$ производные по г должны обращаться в бесконечность. Для того, чтобы раскрыть эту особенность, меняются ролями зависимые и независимые переменные.

Решение характеристической задачи Коши 1 строится в пространстве независимых переменных t, θ и особенностей в окрестности рассматриваемой точки $(t = t_*, \theta = \theta_0)$ не имеет. В пространстве физических переменных (t, r) решение характеристической задачи Коши 1 описывает безударное сжатие до бесконечной плотности и имеет особенность в точке $(t = t_*, r = r_*)$.

Решение характеристической задачи Коши 2 строится в физическом пространстве и описывает течение, примыкающее через звуковую характеристику $C_1^{\pm}$ к решению характеристической задачи Коши 1 и имеющее в момент $t = t_*$ наперед заданное конечное распределение плотности. При этом на $C_1^{\pm}$, которая выходит из точки $(t = t_*, r = r_*)$ и на которой $\theta|_{t=t^*,r=r^*} = \theta_*(r_*)=\text{const}< +\infty$, все параметры газа являются аналитическими функциями от одной переменной t в некоторой полной окрестности точки $t = t_*$.

Сначала рассмотрим характеристическую задачу Коши 2:

$$\begin{cases} \theta_t + u\theta_r + u_r + \nu\frac{u}{r} = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{1}{\gamma_0}(z_r + z\theta_r) = 0, \\ z_t + uz_r + \frac{zD_2(z)}{D_1(z,\theta)}\left(u_r + \nu\frac{u}{r}\right) = 0. \\ \theta|_{C_1^{\pm}} = \theta_{00}(t), \\ u|_{C_1^{\pm}} = u_{00}(t), \\ z|_{C_1^{\pm}} = z_{00}(t), \\ \theta|_{t=t_*} = \theta_*(r), \quad \theta_*(r_*) = \theta_{00}(t_*). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $C_1^{\pm}$: $r = r_0(t)$ есть звуковая характеристика решения характеристической задачи Коши 1.

Теорема 1.1. *Характеристическая задача (4) при условии аналитичности функций $\theta_{00}(t)$, $u_{00}(t)$, $z_{00}(t)$, $\theta_*(r)$ в окрестности точки $(t = t_*,\ r = r_*)$ имеет в некоторой окрестности указанной точки единственное аналитическое решение.*

Теперь рассмотрим характеристическую задачу Коши 1:

$$\begin{cases} r_t + u + u_\theta + \nu \dfrac{u \cdot r_\theta}{r} = 0, \\ u_t \cdot r_\theta - r_t \cdot u_\theta + u \cdot u_\theta + \dfrac{1}{\gamma_0}(z_\theta + z) = 0, \\ z_t \cdot r_\theta - r_t \cdot z_\theta + u \cdot z_\theta + \dfrac{z D_2(z)}{D_1(z,\theta)} \left(u_\theta + \nu \dfrac{u \cdot r_\theta}{r}\right) = 0. \\ r(t,\theta)|_{C^\pm} = r_0(t), \quad r_0(t_*) = r_* = \text{const} > 0, \\ u(t,\theta)|_{C^\pm} = u_{00}(t), \\ z(t,\theta)|_{C^\pm} = z_{00}(t), \\ r(t,\theta)|_{t=t_*} = r_*, \end{cases} \tag{5}$$

где звуковая характеристика $C^\pm$ задана в виде $\theta = \theta_{00}(t)$.

Теорема 1.2. *Характеристическая задача (5) при условии аналитичности функций* $r_0(t)$; $u_{00}(t)$, $Z_{00}(t)$ *о окрестности точки* $t = t_*$ *имеет в некоторой окрестности точки* ($t = t_*$, $\theta = \theta_0$) *единственное аналитическое решение.*

Восстановить в пространстве физических переменных течение газа, полученное с помощью решения характеристической задачи Коши 1, можно только при условии отличия от нуля якобиана перехода от независимых переменных t, θ к переменным t, r. Якобиан перехода обращается в ноль только в момент сильного сжатия. Следовательно, в некоторой окрестности точки ($t = t_*$, $r = r_*$) можно восстановить течение газа в пространстве физических переменных.

Таким образом, доказано существование ненулевой массы и некоторой плотности (строго большей исходной), до которой эту массу газа можно сжать безударно.

В четвертом параграфе решение характеристической задачи Коши 1 описывается с помощью ряда

$$\vec{U}(\theta,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{U}_k(\theta)(t - t_*)^k/k!, \tag{6}$$

$$\vec{U}_k(\theta) = \left.\frac{\partial^k \vec{U}(\theta,t)}{\partial t^k}\right|_{t=t_*},$$

где $\vec{U}(\theta, t) = (r, u, z)$ - вектор искомых функций, θ и t - независимые перемени

Краевое условие из (5) дает значение:

$$r_0(\theta_*) = r_* = \text{const}.$$

Для нулевых коэффициентов получается задача

$$\begin{cases} u_0' = \pm\sqrt{\frac{z_0}{\gamma_0}\left(\frac{D_2}{D_1}+1\right)}, \\ z_0' = z_0\frac{D_2}{D_1}. \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} u_0(\theta)|_{\theta=0} = 0, \\ z_0(\theta)|_{\theta=0} = 1. \end{cases} \qquad (8)$$

определяет связь между газодинамическими параметрами в момент $t = t_*$.

Из анализа свойств решения задачи (7)-(8) установлено, что при уравнении состояния (1) безударно газ можно сжать только до конечной плотности $\rho \approx e^{7,8}\ \rho_0 \approx 2440\ \rho_0$, где ρ_0 - плотность газа фонового течения. Этот вывод основан на том, что у решения задачи (7)-(8) в указанной точке $\theta = \theta_0 \approx 7{,}8$ имеется особенность: $z_\theta|_{\theta=7.8} = \infty$, $z|_{\theta=7.8} = 22,3$, $|u_\theta|_{\theta=7.8}| < +\infty$, $u|_{\theta=7.8} = 17{,}5$,

Последующие коэффициенты ряда имеют ту же особенность, что и нулевые коэффициенты, т.к. определяются из линейных алгебраических и дифференциальных уравнений.

Вторая глава диссертации посвящена математическому описанию сжатия водорода при больших значениях давления.

В пятом параграфе приводится иззнтропа водорода при больших значениях давления в условиях перехода из молекулярной фазы в атомарную, взятая из работы В.П. Копышева, В.Д. Урлина [22]. На некотором участке изменения плотности скорость нарастания давления существенно меняется. Эта аномалия в поведении давления связывается с переходом водорода при этих условиях из молекулярного состояния в атомарное.

Для получения зависимости $c^2 = c^2(\rho)$ (здесь c - скорость звука, $c^2 = p'(\rho)$) использовались различные представления $p = p(\rho)$ и $p'(\rho)$, и в качестве $c^2(\rho)$ была выбрана некая усредненная кривая. Далее предполагается, что $c(\rho)$ является аналитической функцией при $\rho \geq 0$.

Производная $p'(p)$ положительна, но не является монотонной функцией. Следовательно, $p''(p) = [c^2(p)\}'$ имеет разные знаки на разных участках изменения p. Рассматриваемая среда не является нормальным газом ни по терминологии Л.В. Овсянникова [23], ни по терминологии Б.Л.Рождественского, Н.Н. Яненко [24].

В шестом параграфе описывается построение решения характеристической задачи Коши 1 в виде ряда, где в качестве уравнения состояния взято уравнение состояния водорода.

Для описания одномерных изэнтропических течений используется система уравнений газовой динамики в безразмерных переменных, введенных стандартным образом

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_r + \rho(u_r + \nu u/r) = 0, \\ u_t + uu_r + c^2(\rho)\rho_r/\rho = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для того, чтобы описать безударное сильное сжатие одномерного слоя газа в момент $t = 0$ в точке $r = 1$, используется соответствующее обобщение центрированной волны Римана, предложенное С П. Баутиным [18]. При этом меняются ролями p *и* r: r (наряду с u) считается искомой функцией от t и p. Система (9) в этом случае записывается следующим образом:

$$\begin{cases} r(u - r_t) + \rho(ru_\rho + \nu ur_\rho) = 0, \\ r_\rho u_t + (u - r_t)u_\rho + c^2(\rho)/\rho = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Для системы (10) ставятся условия такие же, что и в задаче (5), но в частном случае - примыкание искомого обобщения центрированной волны к однородному покою

$$\begin{cases} r(t,\rho)|_{C^\pm} = 1 \pm c_{00}t, \\ u(t,\rho)|_{C^\pm} = 0, \\ r(t,\rho)|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{И}$$

где $C^\pm$: $p = p_{oo}$, c_{oo} - скорость звука однородного покоящегося газа.

Теорема 2.1. *Характеристическая задача Коши (10)-(11) в некоторой окрестности точки* ($t = 0$, $p = p_{oo}$) *имеет единственное аналитическое решение.*

Требуемое решение находится в виде ряда

$$\mathbf{U}(t,\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{U}_k(\rho)t^k/k!,\quad \mathbf{U}_k(\rho)=\{\mathbf{r},u\}. \tag{12}$$

Установлено, что в пространстве переменных *t, p* ряд (12) сходится при любом положительном значении р. При $\nu = 0$ ряд (12) обрывается и получившееся точное решение является центрированной волной

$$r(t,\rho)=1+r_1(\rho)t,\quad u(t,\rho)=u_0(\rho). \tag{13}$$

Восстановить течение газа, которое получено с помощью построенного ряда (12)) в пространстве независимых переменных *t, r,* можно только при условии отличия от нуля $J = -r_\rho$ якобиана перехода от независимых переменных *t, p* к переменным *t, r.* В финальный момент сильного сжатия, т.е. при $t = 0$, в силу условия (11) заведомо $J = 0$. Однако, из-за не монотонности коэффициента $r_1(\rho)$ помимо финального момента сильного сжатия (момента $t = 0$) еще имеются точки на плоскости переменных *t, p,* в которых якобиан обращается в нуль. На основании этого можно предположить, что безударно сжать из аномального промежутка плоский, цилиндрический или сферический слой рассматриваемого газа больше некоторой плотности невозможно.

В седьмом параграфе строятся автомодельные решения для водорода с рассматриваемым уравнением состояния.

Для построения автомодельных решений системы (9) делается замена переменных: $\xi = t/r$, $\tau = t$ и полагается $\partial/\partial\tau = 0$. В результате, вместо системы (9) получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для $\rho = \rho(\xi)$, $u = u(\xi)$:

$$\begin{cases} (1-\xi u)\rho' - \xi\rho u' = -\nu\rho u, \\ -\xi c^2(\rho)\rho'/\rho + (1-\xi u)u' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

В случае $\nu = 0$ эта система является однородной. Для того, чтобы она имела не только тривиальное решение, необходимо потребовать равенства нулю определителя этой системы, которое приводит к решению (13).

В случаях $\nu = 1,2$ система (14) не является однородной и может быть переписана в нормальном виде

$$\begin{cases} \rho' = -\nu\rho u(1-\xi u)\,/[(1-\xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho)]\,, \\ u' = -\nu\xi c^2(\rho)u\,/[(1-\xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho)]\,. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку функция $c^2(\rho)$ не является монотонной, то систему (15) невозможно свести к одному уравнению, как это сделано в случае для политропного газа. Поэтому особые точки системы (15) заранее неизвестны.

Решения системы (15) строятся численно, при задании в неособой точке $\xi = 0$ начальных значений плотности и скорости: $\rho(0) = \rho_{oo} > 0$, $u(0) = u_{00} < 0$. Интегральные кривые рассчитываются в сторону убывания ξ, т.е. при $\xi \leq 0$. Выявлены три различные ситуации сжатия водорода с рассматриваемым уравнением состояния: 1) если значение u_{oo} велико по модулю, то безударное сжатие возможно; 2) если u_{00} недостаточно велико по модулю, то изэнтропически пройти аномальный участок плотности не удается; 3) если модуль скорости в момент $t = 0$ еще меньше, то возможен безударный переход, но для не значительно отличающихся значений плотности как исходного, так и сжатого газа.

Для случаев $\nu = 1{,}2$ численными расчетами найдены зависимости $u = u_{12}(\rho)$ и $u = u_{23}(\rho)$, "разделяющие" первый и второй, а также второй и третий режимы сжатия.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В диссертации впервые проведено математическое исследование безударного сильного сжатия газа с реальными уравнениями состояния, полученными в физических экспериментах. Рассмотрены два реальных уравнения состояния газов: воздуха и водорода.

При описании безударного сильного сжатия воздуха получены следующие результаты.

1. Поставлена начально-краевая задача в пространстве специальных переменных, решение которой описывают течения воздуха с реальным уравнением состояния с особенностью, аналогичной особенности в центрированной волне Римана. Доказано существование и единственность аналитического решения

у этой начально-краевой задачи. Доказательство проведено сведением к характеристической задаче Коши стандартного вида.

2. Решение рассмотренной начально-краевой задачи представлено в виде бесконечного сходящегося ряда, коэффициенты которого однозначно определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения в окрестности точки, несущей начальные данные, особенности не имеют.

3. Значение переменной, при которой имеется особенность коэффициентов рядов, передающих решения рассмотренной начально-краевой задачи, совпадает со значением, при котором есть особенность у изэнтропы.

4. Для системы уравнений газовой динамики с заданным уравнением состояния воздуха поставлена вторая начально-краевая задача. Решение этой краевой задачи непрерывно примыкает к построенному решению, аналогичному центрированной волне, и передает безударное сжатие плоских, цилиндрических и сферических слоев рассмотренного воздуха до конечных значений плотности, которая не может быть больше ρ_*. Доказано, что в классе аналитических функций у этой второй задачи также существует аналитическое решение в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Тем самым доказана возможность безударного сжатия слоя газа ненулевой массы до любой плотности, меньшей ρ_*.

Впервые математически исследуется безударное сжатие газа, не являющегося нормальным. Этот газ - водород с реальным уравнением состояния. В результате проведенного исследования в диссертации получено следующее.

1. Доказано, что если газ не является нормальным по терминологии книги Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко, то центрированной волны Римана произвольной амплитуды не существует.

2. Для системы уравнений газовой динамики с реальным уравнением состояния водорода поставлена начально-краевая задача, решение которой описывает течение с особенностью, аналогичной особенности в центрированной волне Римана. Доказано, что у данной задачи существует локально-аналитическое решение, не имеющее особенности в пространстве специальных переменных при любых $p > 0$.

3. Доказано, что безударно сжать цилиндрические и сферические слои газа

с ненулевыми внешними и внутренними радиусами возможно только до значений, меньших значений плотности из аномального промежутка.

4. Впервые построены автомодельные течения, описывающие сжатие до конечных значений плотности цилиндрических и сферических объемов газа с реальным уравнением состояния водорода, не являющимся нормальным газом. При анализе этих автомодельных решений выявлены три различных режима сжатия водорода с рассматриваемым уравнением состояния.

Цитируемая литература

1. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. *Явления неограниченной кумуляции.* М.: Наука, 1988. - 172 с.
2. Hugoniot P.H Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp'ecialement dans les gas parfaits, II // *Journal de I'Ecole Polytechnique*. - 1889. - ь 5. - P. 1-125.
3. Lord Rayleigh (Strutt J.W.) Aerial plane of finite amplitude // *Proceedings of the Royal Society of London*. - 1910. - Vol. 84. - P. 247-284.
4. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. - М.: Наука, 1981. - 448 с.
5. Каждан Я.М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // *Журнал прикладной механики и технической физики*. - 1977. - № 1. - С. 23-30.
6. Забабахин И.Е., Симоненко В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // *Прикладная математика и механика*. - 1978. Т. 42, вып.3. - С. 573-576.
7. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем// *Теплофизика высоких температур*. - 1998. Т. 36, № 1. - С. 120-128.
8. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // *Доклады Академии наук СССР*. - 1991. - Т. 318, № 3. - С. 548-552.

9. Сидоров А.Ф. О взаимодействии сильных волн разрежения и сжатия // *Доклады АН СССР*. - 1991. - Т. 320, № 6. - С. 1345-1348.
10. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // *Доклады АН*. - 1993. - Т. 329, № 4. - С. 444-448.
11. Сидоров А.Ф., Хайрулина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета // *Прикладная математика и механика*. - 1994. - Т. 58, вып.4. С. 81-92.
12. Долголева Г.В., Забродин А.В. *Воспроизведение безударного сжатия в оболочечных конструкциях микромишеней: Препринт №53*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1999.
13. Долголева Г.В., Забродин А.В. Построение последовательности приближенных решений для определения величины кумулирующей энергии при схождении слоистой системы оболочек // *Изв. Академии Наук. Механика жидкости и газа*. - 1999, №2. - С. 115-123.
14. Сидоров А.Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев // *Доклады АН СССР*. -1990. - Т. 313, № 2. - С. 283-287.
15. Крайко А.Н. О свободном пестационарном расширении идеального газа // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. - 1993. - № 4. - С. 155-163.
16. Крайко А.Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // *Прикладная математика и механика*. 1994. - Т. 58, вып. 4. - С. 70-80.
17. Крайко А.Н. О неограниченой кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // *Прикладная математика и механика*. - 1996. - Т. 60, вып. 6. - С. 1000-1007.
18. Баутин С.П. *Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа*. - Новосибирск: Наука, 1997. - 160 с.
19. Сидоров А.Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001.-576 с.
20. Сидоров А.Ф. Безударное сжатие баротропного газа // *Прикладная матемагпика и механика*. — 1991. - Т. 55, вып. 5. - С. 769-779.
21. Броуд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ. // *Механика.Новое в зарубежной науке*. М.: Мир. - 1976, № 4. - С. 9-11.

22. Копышев В.П., Урлин В.Д. Изэнтропическая сжимаемость водорода и уравнения состояния водорода до давления 1ТПа // *Ударные волны и экстремальные состояния вещества. Под ред. В.Е. Фортова и др.* М.: Наука - 2000. - С. 297-314.

23. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* М.: Наука. 1981. - 368 с.

24. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* М.: Наука. 1968. - 529 с.

Публикации автора по теме диссертации

25. Ягупов С.А. Безударное сильное сжатие газа с реальными уравнениями состояния // *Вопросы атомной науки и техники. Серия математическое моделирование физических процессов.* - 2001, вып. 2. - С. 49-58.

26. Баутин С.П., Ягупов С.А. Математическое исследование безударного сжатия водорода с реальным уравнением состояния // *Вычислительные технологии.* - 2001. - Т. 6 • С. 103-107.

27. Ягупов С.А. О возможности изэнтропического сжатия водорода при больших значениях давления // *Вычислительные, технологии.* - 2002. Т. 7. - С. 342-346.

28. Ягупов G.A. *Безударное сильное сжатие газа с реальными уравнениями состояния //* УрГУПС, Екатеринбург. - 2000. 36 с, деп. в ВИНИТИ от 06.12.00 № 3075-В00

29. Баутин С. П., Бердников А. Е., Николаев Ю. В., Рощупкин А. В., Чернышов Ю.Ю., Ягупов С.А. Новые результаты в математической теории безударного сильного сжатия газа. *Аннотации докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике.* Пермь, 2001. - С. 82.

30. Ягупов С.А. Автомодельные волны сжатия в газе, не являющимся нормальным. // *Аннотации докладов 19 Всероссийской школы семинара САМГОП.* Снежинск: Российский Федеральный Ядерный Центр - Всеросийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики, 2002. - С. 66.
31. Баутин С.П., Ягупов С.А. О возможности безударного сжатия водорода при переходе из молекулярной фазы в атомарную. *Тезисы международной конференции "VI Забабахинские научные чтения".* Снежинск; Российский Федеральный Ядерный Центр - Всеросийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики, 2001. - С. 15.
32. Баутин С.П., Ягупов С.А. Математическое исследование водорода с реальными уравнениями состояния при больших значениях давления. *Тезисы 17 международной конференции "Уравнения состояния вещества ".* Эльбрус: Институт теплофизики экстремальных состояний, 2002. - С. 14.
33. Ягупов С.А. Задача о безударном сильном сжатии газа с реальными уравнениями состояния. *Тезисы конференции "Вычислительные технологии — 2000".* Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2000. Электронная публикация www.ict.nsc.ru/ws/ct-2000.
34. Ягупов С.А. Безударное сильное сжатие газа с реальными уравнениями состояния. *Тезисы Всероссийской конференции молодых ученых "Проблемы исследования и разработок по созданию силовых и энергетических установок 21 века".* Москва: Центральный институт авиационного моторостроения, 2000. С. 23-24.
35. Ягупов С.А. Автомодельные решения, описывающие изэнтропическое сжатие водорода с реальным уравнением состояния. *Тезисы докладов конференции молодых ученых по математике, математическому моделированию и информантке.* Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2001. С. 43.
36. Ягупов С.А. О математическом описании сильного сжатия газа с реальными уравнениями состояния. *Тезисы межотраслевой научно-практической конференции "Снежинск и наука".* Снежинск: Снежинский физико-технический институт, 2000. - С. 28.

37. Ягупов С.А. О математическом описании безударного сжатия газа с реальными уравнениями состояния. *Труды 32 региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики".* Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2001. - С. 181-182.

38. Ягупов С.А. Задача о безударном сильном сжатии газа с реальными уравнениями состояния. *Труды Всероссийской научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования — транспорту - 2000", ч. 2.* Екатеринбург: УрГУПС, 2000. - С. 445-446.