На правах рукописи

Тимергалиев Самат Низаметдинович

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Специальность - 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Казань - 2003

Работа выполнена на кафедре высшей математики Камского государственного политехнического института

Научный консультант: Заслуженный деятель науки и техники РФ и РТ, академик АН РТ, доктор физико- математических наук, профессор И.Г.Терегулов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор М.М.Карчевский

доктор физико-математических наук, профессор Ю.В.Немировский

доктор физико-математических наук, профессор В.Н.Паймушин

Ведущая организация-Институт вычислительного моделирования СО РАН

Защита состоится 29 мая 2003 г. в ауд. Физ.2 на заседании диссертационного совета Д.212 081.11 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете им. В.И.Ульянова-Ленина (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И.Лобачевского

Автореферат разослан 23. 04 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент А.А.Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория нелинейных краевых задач для тонких оболочек в настоящее время является бурно развивающимся разделом математической теории упругости. Это прежде всего связано с тем, что для полного описания процесса упругого деформирования оболочечных конструкций аппарат линейных дифференциальных уравнений оказывается недостаточным, поскольку наиболее интересные и характерные особенности этого процесса связаны с большими нелинейностями. Особенно интенсивное развитие нелинейной теории тонких оболочек началось тогда, когда выяснилось, что проблема устойчивости тонкостенных конструкций в полной мере может решаться лишь на базе нелинейных краевых задач. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных вопросам расчета оболочек с учетом геометрической и (или) физической нелинейности. Результаты фундаментального и прикладного характера изложены в работах И.Г.Бубнова, Н.В.Валишвили, А.С.Вольмира, И.И.Воровича, К.З.Галимова, Э.И.Григолюка, Я.М.Григоренко, М.С.Корнишина, А.И.Лурье, Н.Ф.Морозова, Х.М.Муштари, Ю.В.Немировского, В.В.Новожилова, И.Г.Терегулова, С.П.Тимошенко, В.И.Феодосьева и многих других авторов. Нелинейные задачи в очень редких случаях решаются в замкнутой форме. По этой причине для их решения используется широкий комплекс приближенных методов с применением компьютеров. Это обстоятельство делает особо актуальным строгое математическое исследование нелинейных краевых задач.

Работ, посвященных строгому математическому обоснованию разрешимости нелинейных краевых задач, сравнительно немного. Начало этому направлению было положено в середине 50-х годов И.И.Воровичем, который исследовал уравнения равновесия Власова для пологих изотропных однородных оболочек с жестко заделанным краем. Для пластин впервые нелинейные краевые задачи были рассмотрены Н.Ф.Морозовым. В этих и последующих работах ими были получены основополагающие результаты в области нелинейных краевых задач для оболочек и пластин. Доказательству теорем разрешимости нелинейных краевых задач для оболочек и пластин также посвящены работы В.Ф.Власова, С.Н.Волошановской, Ю.А.Дубинского, М.М.Карчевского, Л.П.Лебедева, В.Н.Паймушина, П.Рабье, Л.С.Србущика, Ф.Сьярле, И.Г.Терегулова, Ш.М.Шлафмана, А.А.Юркевича, M.Benardou, M.Berger, P.K.Bhattacharyya, P.Destuynder, I.Hlavacek, O.John, G.H.Knightly, I.Naumann, I.Necas, I.T.Oden, P.Rabier, D.Sather и других. Подробный обзор имеющихся результатов и обширную библиографию можно найти в монографии И.И.Воровича, обзорных статьях И.И.Воровича и Л.П.Лебедева, М.М.Карчевского.

Анализ имеющихся работ показывает, что 1) наиболее полно и глубоко изучены геометрически нелинейные, физически линейные краевые задачи для пластин и пологих оболочек при достаточно общих смешанных условиях их закрепления. Основу исследований составили топологические и вариационные соображения. Граничные **условия,** несмотря на их достаточно общий характер, брались таким образом, чтобы можно было образовать соответствующее энергетическое пространство, в котором отыскивалось решение. В качестве пространств выступали пространства перемещений и усилий. Однако, для ряда естественных краевых условий, в частности, для оболочек со свободным, **шарнирно-опертым** краями, вопросы разрешимости задач остались открытыми и они вошли в список нерешенных проблем математической теории оболочек, приведенный в монографии И.И.Воровича, 2) срединная поверхность пологих **оболочек,** рассмотренных в этих задачах, предполагалась либо из класса C^2_λ (что позволяло вводить на ней изометрическую систему координат), либо из класса C^2, но в этом случае обязательно развертывающейся. В случае непологих оболочек геометрически нелинейные, физически линейные задачи исследованы, когда их срединная поверхность представляет собой либо поверхность вращения, либо выпуклую развертывающуюся поверхность класса C^3, при этом края оболочки предполагались жестко защемленными, а внешняя нагрузка - произвольной. Когда внешняя нагрузка достаточно мала, теоремы разрешимости доказаны и для более широкого класса непологих оболочек из пространства C^∞ с жестко заделанными краями. В рамках геометрически и физически нелинейной модели теоремы существования установлены лишь для пластин и пологих развертывающихся оболочек с частично или полностью защемленными краями, при этом использовались вариационные соображения. Поэтому естественно исследовать разрешимость нелинейных задач при произвольной нагрузке для более широкого класса оболочек как в смысле их гладкости, так и в смысле их геометрии, например, для пологих (непологих) оболочек, срединная поверхность которых суть **кусочно-гладкая** поверхность класса C^2 (соответственно C^3) (далее кусочно-гладкие оболочки (КГО) класса C^2 (C^3)); 3) в большинстве работ задачи изучались в обобщенной постановке. В основе введения понятия обобщенного решения, как правило, лежало условие регулярности материала оболочки (в терминологии академика И.И.Воровича), означающее положительную определенность квадратичной формы, связанной с плотностью потенциальной энергии деформации. Такие оболочки в дальнейшем будем называть регулярными, а в случае невыполнения условия регулярности материала - нерегулярными. Для последних изучение задач в энергетических пространствах не представляется возможным. Причиной этого является невозможность образования самих пространств. Это обстоятельство приводит к необходимости отыскания решений, удовлетворяющих непосредственно уравнениям равновесия и геометрическим, статическим граничным условиям. На этом пути использовались методы, основанные на применении рядов Фурье и **функций Грина,** с помощью которых получены теоремы существования для пологого сферического сегмента и пологих оболочек из изотропного материала, а также для анизотропных однородных пластин. В связи с этим актуальным является разработка новых методов, позволяющих исследовать нелинейные краевые задачи для широкого класса нерегулярных неоднородных оболочек из анизотропного материала.

Изучению этих проблем и посвящена данная диссертационная работа.

Целью работы является доказательство теорем разрешимости геометрически и физически нелинейных краевых задач для тонких упругих анизотропных регулярных и нерегулярных оболочек при общих условиях их закрепления.

Методика исследований. В работе теоремы разрешимости доказываются по следующей схеме. Сначала строятся функциональные пространства, изучаются свойства их элементов. Затем в них даются обобщенные постановки задач. Нахождение обобщенных решений сводится к решению нелинейного операторного уравнения (НОУ) или системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Для исследования разрешимости НОУ используется топологический и (или) вариационный метод, а к изучению системы интегральных уравнений привлекается принцип сжатых отображений. В исследованиях широко применяются методы нелинейного функционального анализа, вариационного исчисления в банаховых пространствах, теории нелинейных интегральных уравнений, теории соболевских пространств. Кроме того, существенно используется аппарат обобщенных аналитических функций.

Научная новизна:

-развиты топологический и вариационный методы исследования геометрически и физически нелинейных краевых задач в перемещениях для тонких упругих анизотропных пологих КГО класса C^2, с помощью которых доказаны теоремы разрешимости для таких оболочек при смешанных условиях их закрепления;

- предложен новый подход к изучению геометрически и физически нелинейных краевых задач, основанный на исследовании их разрешимости в пространстве условных деформаций, отличном от пространств перемещений и усилий. Разработаны топологический и вариационный методы исследования задач в условных деформациях и на их основе установлены теоремы существования для упругих анизотропных пологих КГО класса C^2 со свободным и шарнирно-опертым краями;

- развит вариационный метод исследования нелинейных краевых задач в перемещениях и условных деформациях для тонких упругих анизотропных непологих КГО класса C^3 ненулевой гауссовой кривизны и на его базе доказаны теоремы разрешимости для таких оболочек при смешанных граничных условиях, свободном и шарнирно-опертом краях;

- дано обоснование применимости методов Бубнова-Галеркина и Ритца для приближенного решения нелинейных задач в пространствах перемещений и условных деформаций;

- выведены условия, при которых существует единственное решение рассматриваемого класса нелинейных задач для тонких анизотропных оболочек;

- путем перехода к пространству условных деформаций исследована разрешимость нелинейных краевых задач для анизотропных нерегулярных неоднородных оболочек с жестко заделанным, свободным и шарнирно-опертым краями.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, ее результаты и методы исследования могут быть использованы для дальнейшего развития теории нелинейных краевых задач для тонких оболочек. Кроме того, приближенные методы, применимость которых обоснована в настоящей работе, могут быть востребованы в практических расчетах различных тонкостенных конструкций.

Основная часть работы выполнялась в рамках проектов № 93-01-16747, № 96-01-00518 и № 99-01-00410 Российского фонда фундаментальных исследований, проекта по реализации Программы Республики Татарстан по развитию науки по приоритетным направлениям.

Достоверность основных результатов обеспечивается корректностью постановки задач механики, корректным применением для их решения методов, базирующихся на строго доказанных фактах нелинейного функционального анализа, теорий нелинейных интегральных уравнений, обобщенных аналитических функций, вариационного исчисления и сравнением с известными в научной литературе соответствующими результатами других авторов.

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- развитие топологического, вариационного методов исследования геометрически и физически нелинейных краевых задач в перемещениях для упругих анизотропных пологих КГО класса C^2 при смешанных условиях их закрепления;

- новый метод, основанный на исследовании разрешимости нелинейных краевых задач в пространстве условных деформаций;

- топологический и вариационный методы исследования задач в условных деформациях для упругих анизотропных пологих КГО класса C^2 со свободным и шарнирно-опертым краями;

- развитие вариационного метода исследования разрешимости нелинейных задач в перемещениях и условных деформациях для упругих анизотропных непологих КГО класса C^3 ненулевой гауссовой кривизны при смешанных граничных условиях, свободном и шарнирно-опертом краях;

- вывод условий существования единственного решения нелинейных краевых задач для тонких упругих анизотропных оболочек;

- доказательство теорем существования решений нелинейных задач для анизотропных нерегулярных оболочек с жестко заделанным, свободным и шарнирно-опертым краями.

Апробация работы. Отдельные результаты диссертации сообщались на Международных научно-технических конференциях « Механика машиностроения » (Набережные Челны, 1995, 1997), на XVII Международной конференции по теории оболочек и пластин (Казань, 1996), на VII Четаевской конференции « Аналитическая механика, устойчивость и управление движением » (Казань, 1997), на Международном симпозиуме « Будущее за композитами » (Набережные Челны, 1997), на Международных конференциях « Актуальные проблемы механики оболочек » (Казань, 1998, 2000), на Международной научно- технической конференции « Технико-экономические проблемы промышленного производства » (Набережные Челны, 2000), на межвузовских конференциях « Математическое моделирование и краевые задачи »(Самара, 2000, 2001),на V Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике » (Новосибирск, 2000), на Международной научной конференции « Актуальные проблемы математики » (Казань, 2000). В целом диссертация докладывалась и получила одобрение на расширенном заседании Научно-технического совета Камского государственного политехнического института, на объединенном семинаре кафедр « Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности » КГ АСА и « Вычислительная математика » КГУ, на объединенном семинаре кафедры теоретической механики и лаборатории механики оболочек НИИ математики и механики Казанского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 23 работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка, содержащего 125 наименований, и изложена на 340 страницах машинописного текста.

Диссертационная работа выполнена на кафедре высшей математики Камского государственного политехнического института.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту Заслуженному деятелю науки и техники РТ и РФ, академику АН РТ, доктору физико-математических наук, профессору Ильтизару Гизатовичу Терегулову за указание направления научных исследований, помощь в постановке задач, постоянное сотрудничество и внимание к работе.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение включает в себя обоснование актуальности темы диссертации, краткий исторический обзор по исследуемой теме, цель и краткое содержание диссертации, а также перечисление ее основных результатов.

В первой главе краевые задачи в перемещениях с граничными условиями, рассмотренными в монографии И.И.Воровича в рамках геометрически нелинейной, физически линейной упругой модели, изучаются для пологих оболочек из физически нелинейного упругого материала с кусочно-гладкой срединной поверхностью класса C^2.

В §1 дается постановка основных краевых задач нелинейной теории тонких оболочек.

В основе исследований лежат следующие соотношения теории тонких оболочек:

I) соотношения деформации- перемещения:

$$\varepsilon_{jj}^0 \equiv \gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - G_{jj}^k w_k - B_{jj} w_3 + \omega_j^2/2, \text{j=1,2},$$

$$2\varepsilon_{12}^0 \equiv \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^k w_k - 2B_{12} w_3 + \omega_1\omega_2,$$

$$\varepsilon_{jj}^1 \equiv \gamma_{jj}^1 = -\omega_{j\alpha^j} + G_{jj}^k \omega_k, j = 1, 2,$$

$$2\varepsilon_{12}^1 \equiv \gamma_{12}^1 = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G_{12}^k \omega_k,$$

где $\omega_j = w_{\_j} + lB_j^k w_k$, ε_{ij} и ε_{ij}^1 - компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки, B_{ij} я B_i^j - ковариантные и смешанные составляющие тензора кривизны S_0, G_{ij}^k - символы Кристоффеля второго рода, w_k и w_3 - тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0, α^1, α^2 - декартовы координаты на плоскости, изменяющиеся в некоторой плоской ограниченной области Ω с границей Γ, гомеоморфной S_0; l – параметр, равный нулю в случае пологих оболочек и единице в случае непологих оболочек;

II) определяющие соотношения:

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma_*^{\lambda\mu} \equiv \sigma_\tau^{\lambda\mu} - \sigma_*^{\lambda\mu}, \lambda \le \mu, q \le s, \lambda, \mu, q, s = 1, 2,$$

где $B^{\lambda\mu qs}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$- упругие характеристики оболочки, $\gamma_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu}^0 + \alpha^3\gamma_{\lambda\mu}^1$, $\sigma_\tau^{\lambda\mu}$ и $\sigma_*^{\lambda\mu}$ - линейная и нелинейная части напряжения $\sigma^{\lambda\mu}$.

На протяжении всей работы будем считать, что на оболочку действуют массовые силы $\vec{F}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, по граням оболочки приложены усилия $\vec{F}^{\pm}(\alpha^1, \alpha^2)$ и на границе оболочки действуют поверхностные силы $\vec{F}^0(s, \alpha^3)$.

Для задания граничных условий пусть имеются два разбиения граничного контура Γ: $\Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{4} \Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta=5}^{8} \Gamma_\beta$, при этом $\Gamma_{\cdot}$ могут быть несвязными множествами, но всегда содержащими конечное число компонент. Первое разбиение используется для задания изгибных граничных условий, второе - тангенциальных граничных условий:

$$w_3|_{\Gamma_1} = \tilde{w}_3\ ,\ w_4|_{\Gamma_1} = \tilde{w}_4,\quad w_4 = \frac{\partial w_3}{\partial \overline{m}}; \tag{1.1}$$

$$w_3|_{\Gamma_2} = \tilde{w}_3,\quad u_{on}|_{\Gamma_2} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k_u^{44} w_4^2 ds; \tag{1.2}$$

$$w_4|_{\Gamma_3} = \tilde{w}_4,\quad u_{on}|_{\Gamma_3} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_3} k_u^{33} w_3^2 ds; \tag{1.3}$$

$$u_{on}|_{\Gamma_4} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_4} k_u^{ij}\ w_i w_j\big|_{i,j=3,4} ds;$$

$$w_1|_{\Gamma_5} = \tilde{w}_1,\quad w_2|_{\Gamma_5} = \tilde{w}_2; \tag{1.4}$$

$$w_m|_{\Gamma_6} = \tilde{w}_m, w_m = w_k m^k,\ u_{on}|_{\Gamma_6} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau}\ w_\tau^2\ ds, w_\tau = w_k \tau^k; \tag{1.5}$$

$$w_\tau|_{A} = \tilde{w}_\tau,\quad u_{on}|_{\Gamma_7} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_7} k_p^{mm}\ w_m^2\ ds; \tag{1.6}$$

$$u_{on}|_{\Gamma_8} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_8} k_p^{ij}\ w_i w_j\big|_{i,j=1,2} ds;$$

здесь $\tilde{w}_j (j=\overline{1,4})$, $\tilde{w}_\tau$, $\tilde{w}_m$ - заданные функции, m^k и τ^k - составляющие орта нормали m и орта касательной $\bar{\tau}$ к Γ; $k_u^{33}, k_u^{44}, k_u^{ij}, k_p^{\tau\tau}, k_p^{mm}, k_p^{ij} \geq 0$ - коэффициенты упругости опор, сами опоры $\Gamma_2 - \Gamma_4$, Γ_6 - Γ_8 характеризуются энергией u_{on}, которая накапливается при деформации.

В этом же параграфе приводятся основные соотношения для вариации потенциальной энергии деформации, элементарных работ внешних сил на возможных перемещениях в условиях гипотез Кирхгофа-Лява. Используя вариационный принцип Лагранжа, выводятся уравнения равновесия оболочки и статические граничные условия, которые вместе с геометрическими граничными условиями (1.1) – (1.6) описывают широкий класс краевых задач нелинейной теории тонких упругих оболочек. При их формулировке мы можем комбинировать любой вариант изгибных граничных условий и любой вариант тангенциальных граничных условий. В результате имеем 16 краевых задач. В соответствии с этим будем различать задачи $\alpha\beta$, $a = \overline{1,4}$, $\beta = \overline{5,8}$. Например, задача 27 заключается в определении из уравнений равновесия вектора перемещения $w = (w_1, w_2, w_3)$, удовлетворяющего геометрическим и статическим граничным условиям при обязательном требовании $mes\,\Gamma_2 > 0$, $mes\,\Gamma_7 > 0$;

при этом остальные участки контура Γ или некоторые из них могут и отсутствовать.

§2 носит вспомогательный характер. В нем приводятся известные факты и сведения из функционального анализа, теории обобщенных аналитических функций, теории Соболевских пространств, теории нелинейных интегральных уравнений, вариационного исчисления в банаховых пространствах. Кроме того, доказываются некоторые новые утверждения, в частности, теорема о коэрцитивности для функционала, переменными которого являются линейные операторы. Все эти факты существенно используются на протяжении всей работы.

§3 посвящен исследованию краевых задач $\alpha\beta$ для пологих оболочек. С этой целью развивается топологический метод.

В течение всего параграфа предполагаются выполненными следующие условия:

1) квадратичная форма $2\Pi_\tau = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$ положительно определена во всем объеме, занятом оболочкой;
2) S_0 - кусочно-гладкая поверхность класса C^2 в случае пологих оболочек $(l=0)$ и класса C^3 в случае непологих оболочек $(l=1)$;
3) Ω - соболевская область, одновременно принадлежащая классам (2,1,2) и (2,2,2);
4) Γ - КГК класса C^1;
5) характеристики упругости $\int\limits_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(\alpha^3)^k d\alpha^3, k=0,1,2$ суть ограниченные функции в $\overline{\Omega}$;
6) нелинейная часть $\sigma_*^{\lambda\mu}$ напряжения как функция компонент деформации удовлетворяет условию Липшица, т.е.
$$\left|\sigma_*^{\lambda\mu}(\gamma_1)-\sigma_*^{\lambda\mu}(\gamma_2)\right| \le \sigma_*(r_*)\left|\gamma_1-\gamma_2\right|, \lambda,\mu=1,2,\ \gamma_k=(\gamma_{k,11},\gamma_{k,12},\gamma_{k,22})$$
при $|\gamma_k|\le r_*$ ($r_*>0$ – некоторое число) почти для всех точек оболочки с постоянной Липшица a, $(r_*)\to 0$ при $r_*\to 0$;
7) коэффициенты упругости опор $k_u^{33}, k_u^{44}, k_u^{ij}, k_n^{\tau\tau}, k_n^{mm}, k_p^{ij}$ суть ограниченные функции соответственно на $\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_6,\Gamma_7,\Gamma_8$, при этом, следуя И.И.Воровичу, будем различать существенно упругие связи;
8) $F\in L_2(\Omega)\times L_1[-h,h]$, $\bar F^{\pm}\in L_2(\overline{\Omega})$, $\bar F^0\in L_2(\Gamma)\times L_1[-h,h]$, где $2h=const$ - толщина оболочки;
9) граничные перемещения $\tilde w_j\ (j=\overline{1,4})$, $\tilde w_m, \tilde w_\tau$ являются допустимыми, т.е. продолжимы внутрь Ω как функции из Соболевских пространств $W_2^{(1)}(\overline{\Omega})$, $W_2^{(2)}(\overline{\Omega})$.

В пункте 3.1 строятся функциональные пространства. Пусть $D_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ - линейное пространство перемещений $w=(w_1,w_2,w_3)$ с компонентами $w_0=(w_1,w_2)\in C(\Omega)$, $w_3\in C^1(\overline{\Omega})$, имеющими кусочно-непрерывные в $\overline{\Omega}$ производные $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j}, i,j=1,2$ и удовлетворяющими однородным граничным условиям (1.1) – (1.6) при обязательном условии $mes\Gamma_\alpha, mes\Gamma_\beta>0$ и связи на $\Gamma_\alpha (a\neq 1), \Gamma_\beta(\beta\neq 5)$ являются существенно упругими. При этом остальные участки контура Γ могут отсутствовать, при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. На $D_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ задается скалярное произведение, для этого привлекается аппарат обобщенных аналитических функций. Замыкание $D_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ в норме, порожденной скалярным произведением, обозначается через $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Показывается, что $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ суть гильбертовы пространства. Изучаются свойства элементов этих пространств, в частности, доказываются теоремы вложения, а также свойства некоторых операторов, действующих в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$.

В пункте 3.2 вводится понятие обобщенного решения задачи *ар* в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. В нелинейных задачах переход к обобщенным решениям можно совершить разнообразными приемами. Следуя И.И.Воровичу, мы избрали обобщенные решения, непосредственно вытекающие из вариационного принципа Лагранжа. Опираясь на теорему Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве, отыскание обобщенного решения сводится к решению в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ нелинейного операторного уравнения (НОУ)

$$w-G_{\alpha\beta}(w)=0 \qquad (3.1)$$

относительно вектора перемещения w.

Изучению свойств нелинейного оператора $G_{\alpha\beta}$ посвящен пункт 3.3. Если в случае физически линейных задач $G_{\alpha\beta}$ суть вполне непрерывный оператор, то здесь $G_{\alpha\beta}$ представляет собой ограниченный в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ оператор, что является одним из основных отличительных моментов в исследовании физически нелинейных задач. Имеет место следующая

Лемма1.*Оператор* $G_{\alpha\beta}$ *представим в виде* $G_{\alpha\beta}(w)=G_{\alpha\beta,c}(w;t_0)+G_{\alpha\beta,*}(w;t_0)+t_0w$, *где* $G_{\alpha\beta,c}$ *- вполне непрерывный,* $G_{\alpha\beta,*}$ *- ограниченный нелинейные операторы в* $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, *зависящие от некоторого параметра* t_0, *принадлежащего промежутку* $[0,1)$.

Отметим, что в случае физически линейных задач $t_0=0$, $G_{\alpha\beta,*}=0$.

В пункте 3.4 исследуется разрешимость НОУ (3.1) , для чего используется топологический метод. Основу этого метода, как известно, составляет вычисление вращения вполне непрерывного векторного поля, соответствующего изучаемому уравнению, с последующим применением к нему принципа Лере-Шаудера. Однако, как следует из вышесказанного, уравнению (3.1) соответствует не вполне непрерывное векторное поле и это обстоятельство делает невозможным применение традиционного подхода к (3.1). В связи с этим к изучению уравнения (3.1) привлекаются известные результаты М.А.Красносельского, касающиеся уравнений с не вполне непрерывными операторами, в которых основная роль принадлежит резольвенте нелинейного оператора. Допуская существование параметра $t_0 \in [\,0,1)$, при котором оператор $\widetilde{G}_{\alpha\beta\,*} = G_{\alpha\beta\,*}/(1-t_0)$ в достаточно большой части пространства $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ имеет резольвенту $\widetilde{R}_{\alpha\beta,*}$, уравнение (3.1) приводится к эквивалентному уравнению с вполне непрерывным оператором:

$$w-\widetilde{R}_{\alpha\beta,*}\widetilde{G}_{\alpha\beta,c}(w;t_0)=0, \qquad \widetilde{G}_{\alpha\beta,c}=G_{\alpha\beta,c}/(1-t_0). \tag{3.2}$$

Показывается, что вращение вполне непрерывного векторного поля $w-\widetilde{R}_{\alpha\beta,*}\widetilde{G}_{\alpha\beta,c}(w;t_0)$ на эллипсоиде пространства $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ с достаточно большими полуосями равно $+1$. При этом используется идея гомотопности, которая опирается на априорную оценку функционала $\Phi_{\alpha\beta}(w;\mu,\nu)=((1-t_0)w-\mu G_{\alpha\beta,c}(w;t_0)-\mu\nu G_{\alpha\beta*}(w;t_0),a)_{\alpha\beta}$ определенного на $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})\times[0,1]\times[0,1]$, где $a-(2w_1,2w_2,w_3)$; $(.,.)_{\alpha\beta}$ означает скалярное произведение в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Для получения априорной оценки здесь и в последующих главах диссертации нами используется схема, предложенная И.И.Воровичем для оценки подобных функционалов. Следуя ей, эллипсоид разбивается на три части, одна из которых не содержит слабого замыкания нуля. Затем на каждой части устанавливаются соответствующие неравенства снизу для $\Phi_{\alpha\beta}(w;\mu,\nu)$ $\forall\mu,\nu\in[0,1]$. В данной схеме особое место занимает доказательство существования лишь тривиального решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{gathered} w_{j\alpha^j}-G_{jj}^k w_k+\omega_j^2/2=0,\ j=1,2, \\ w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}-2G_{12}^k w_k+\omega_1\omega_2=0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Условия, при которых система (3.3) имеет только нулевое решение, в конечном счете определяют тот класс оболочек, который и рассматривается в краевых задачах. Ранее путем сложения первых двух уравнений в (3.3) и интегрирования полученного уравнения по области Ω подобное утверждение было доказано для пологих оболочек класса $C_\lambda^2(\overline{\Omega})$ и развертывающихся оболочек, принадлежащих $C^2(\overline{\Omega})$. В данной работе к этой проблеме нами предлагается новый подход, основанный на обращении линейной части системы (3.3). При этом существенно используется аппарат обобщенных аналитических функций. Благодаря новому подходу в четвертой главе удалось исследовать задачи для некоторого класса непологих оболочек. А здесь таким способом доказывается

Лемма 2. *Пусть выполнено условие 2),* $w=(w_0,w_3)\in H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ *удовлетворяет в* Ω *п.в. системе (3.3) и п.в.* $w_0\big|_{\Gamma}=0$, $\Gamma_1+\Gamma_2\neq 0$. *Кроме того, пусть*

$$q=q_0(\Omega)\left\|(I-P)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|G^1_{11}+G^1_{22}-i(G^2_{11}+G^2_{22})\right\|_C<1, \tag{3.4}$$

где

$$Pf=T(Af+B\bar{f}),\qquad Tf=-1/\pi\iint_{\Omega}f(\varsigma)/(\varsigma-z)d\xi d\eta,\quad \varsigma=\xi+i\eta,$$

$$A(B)=1/4[G^1_{22}-G^1_{11}-(+)G^2_{12}-i(2G^1_{12}+(-)G^2_{22}-(+)G^2_{11})],$$

$q_0(\Omega)=1/\pi\,\underset{z\in\overline{\Omega}}{Sup}\iint_{\Omega}1/|\varsigma-z|d\xi d\eta$, I - *тождественный о> 'ератор.*

Тогда $w\equiv 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

Выполнение условия (3.4) иллюстрируется на конкретных примерах.

Основной результат §3 дается теоремой 1.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)-9), упругие характеристики* $B^{\lambda\mu qs}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ *суть четные функции по переменной* α^3, *существует параметр* $t_0\in[0,1)$, *при котором оператор* $G_{\alpha\beta,*}$ *имеет резольвенту,* $\Gamma_1+\Gamma_2\neq 0$, *связи на* $\Gamma_6,\Gamma_7,\Gamma_8$ *существенно упругие и выполняется условие (3.4). Тогда задача aft для пологих оболочек разрешима, все ее обобщенные решения лежат внутри эллипсоида с достаточно большими полуосями.*

Вторая глава посвящена исследованию краевых задач геометрически и физически нелинейной теории пологих оболочек с граничными условиями, отличными от рассмотренных в первой главе. Особенность этих граничных условий состоит в том, что для них не представляется возможным образование пространств перемещений типа $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. В силу этого для изучения задач с такими граничными условиями предлагается новый метод, суть которого заключается в доказательстве их разрешимости в пространстве условных деформаций $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, отличном от пространств перемещений, усилий. Основу метода составляют интегральные представления для компонент перемещения через $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

Данная глава включает в себя три параграфа. Новым задачам посвящены §§5,6. В §4 новый метод применяется к исследованию задачи для пологих оболочек, жестко защемленных по всему краю, рассмотренной в первой главе.

В пункте 4.1 дается постановка задачи, вводится линейное пространство $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ условных деформаций, выводятся интегральные представления для компонент перемещения, деформаций.

Пусть $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ - линейное пространство вектор-функций $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ с компонентами вида

$$\varepsilon_1 = w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2}\ ,\ \varepsilon_2 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}\ ,$$
$$\varepsilon_3 = -w_{3\alpha^1\alpha^1} - w_{3\alpha^2\alpha^2}, \qquad (4.1)$$

где $w=(w_1,w_2,w_3)\in D_{15}(\overline{\Omega})$.

В случае линейных задач для пластин функции $\varepsilon_j,\ j=\overline{1,3}$ представляют собой линейные **комбинации** некоторых компонент деформации. Поэтому далее они будут называться условными деформациями.

Через функции $\varepsilon_j,\ j=\overline{1,3}$ компоненты вектора $w\in D_{15}(\overline{\Omega})$ выражаются формулами

$$w_1=\frac{1}{2}\operatorname{Re}T\varepsilon_0\ ,\ w_2=\frac{1}{2}\operatorname{Im}T\varepsilon_0\quad w_3=-\frac{1}{4}T\overline{T\varepsilon_3}\equiv\frac{1}{2}\tilde{T}\varepsilon_3,$$

а для деформаций имеем, например,

$$\varepsilon_{jj}^0=(\operatorname{Re}S\varepsilon_0-(-1)^j\varepsilon_1)/2-\operatorname{Re}(g_{jj}T\varepsilon_0)+b_{ij}\tilde{T}\varepsilon_3+$$
$$+\tilde{\omega}_j\omega_j(\varepsilon)+\omega_j^2(\varepsilon)/2+\tilde{\gamma}_{jj}^0,\ \ j=1,2$$

и т.д. Здесь $\omega_j(\varepsilon)=\operatorname{Re}[(-1/2)i^{j-1}T\varepsilon_3+l\beta_jT\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$, $Sf=(-1/\pi)\iint\limits_{\Omega}f(\varsigma)/(\varsigma-z)^2\,d\xi d\eta$, где интеграл следует понимать в смысле главного значения по **Коши**; оператор Tf введен в лемме 2; $g_{jj}, b_{ij},\ \tilde{\omega}_j, \tilde{\gamma}_{jj}^0, \beta_j$ -известные функции. Особенность этих соотношений состоит в том, что в них зависимость от условных деформаций носит интегральный характер. В этом же пункте вариация потенциальной энергии деформации, элементарная работа внешних сил также выражаются через элементы пространства $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$.

Пункт 4.2 посвящен построению основного пространства $E_{15}(\overline{\Omega})$. Для этой цели сначала на $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ задается скалярное произведение, после чего $E_{15}(\overline{\Omega})$ определяется как замыкание $D_\varepsilon(\Omega)$ в норме, порожденной этим скалярным произведением. Изучаются свойства элементов $E_{15}(\overline{\Omega})$, в частности, доказывается

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon\in E_{15}(\overline{\Omega})$. *Тогда**

$$m_0\|\varepsilon\|_{L_2}^2\le\|\varepsilon\|_{E_{15}}^2\le M_0\|\varepsilon\|_{L_2}^2,$$

где постоянные $m_0, M_0>0$ не зависят от ε.

Достаточно много внимания уделяется изучению свойств некоторых операторов, действующих в $E_{15}(\overline{\Omega})$.

Введению понятия обобщенного решения задачи 15 в условных деформациях посвящен пункт 4.3. Доказывается корректность определения обобщенного решения. Его нахождение сводится к решению эквивалентного НОУ с ограниченным оператором, разрешимость которого устанавливается в пункте 4.4. Для этого используется схема рассуждений пункта 3.4. Таким образом доказывается теорема существования по крайней мере одного обобщенного решения задачи 15 в условных деформациях внутри эллипсоида пространства $E_{15}(\overline{\Omega})$ с достаточно большими полуосями.

В §5 метод §4 применяется к изучению разрешимости геометрически и физически нелинейных краевых задач для свободных анизотропных пологих оболочек, не подчиненных никаким геометрическим граничным условиям, подверженных действию самоуравновешенной внешней нагрузки.

В пункте 5.1 дается постановка задачи, вводится пространство $D(\overline{\Omega})$ перемещений $w=(w_1,w_2,w_3)$, компоненты которых имеют вид:

$$w_1=\frac{1}{2}\operatorname{Re}T\varepsilon_0\ ,\ w_2=\frac{1}{2}\operatorname{Im}T\varepsilon_0,$$

$$w_3=\frac{1}{2}\tilde{T}\varepsilon_3\equiv-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\varepsilon_3(\varsigma)\ln(|\varsigma-z|/l_0)d\xi d\eta\ ,\ \varsigma=\xi+i\eta, \qquad (5.1)$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in L_p(\overline{\Omega}),\ p>2-$ произвольная вектор-функция с действительными компонентами; l_0 - характерный линейный размер срединной поверхности S_0.

Лемма 4. *Пространство $D(\overline{\Omega})$ не содержит жесткие перемещения пологой оболочки как абсолютно твердого тепа.*

Выводятся соотношения для компонент деформаций, вариации потенциальной энергии деформации, элементарной работы внешних сил через функции $\varepsilon\in L_p(\overline{Q}),\ p>2,$ которые составляют основу исследований §5.

Построению основного пространства, в котором будет решаться задача, посвящен пункт 5.2. Здесь, как и выше, существенным моментом является определение скалярного произведения для функций e из $L_p(\overline{\Omega}),\ p>2$. При проверке выполнения условий скалярного произведения используется идея аналитического продолжения на всю плоскость, благодаря которой удалось применить обобщенную теорему Лиувилля для обобщенных аналитических функций. Основное пространство $E(\overline{\Omega})$ получается как замыкание $L_p(\overline{Q}),\ p>2$ в норме, заданной скалярным произведением. Изучаются свойства элементов $E(\overline{\Omega})$, а также операторов, действующих в $E(\overline{\Omega})$. В частности, показывается эквивалентность $E(\overline{\Omega})$ пространству $L_2(\overline{Q})$.

В пункте 5.3 дается обобщенная постановка задачи, доказывается ее корректность. Нахождение обобщенного решения сводится к НОУ с ограниченным в $E(\overline{\Omega})$ оператором:

$$\varepsilon - G(\varepsilon) = 0. \tag{5.2}$$

Оператор $G(\varepsilon)$ представляется в виде $G(E) = G_c(\varepsilon;t_0) + G_*(\varepsilon;t_0) + t_0\varepsilon$, где G_c - вполне **непрерывный**, G_* - ограниченный нелинейные операторы, зависящие от параметра $t_0 \in [0,1)$. Для физически линейной задачи $t_0 = 0$, G, =0.

Исследованию разрешимости уравнения (5.2) посвящен пункт 5.4. Для этого используется метод, рассмотренный в пункте 3.4: сначала уравнение (5.2) преобразуется в уравнение с вполне непрерывным оператором, затем вычисляется вращение соответствующего вполне непрерывного поля на эллипсоиде пространства $E(\overline{\Omega})$. При этом наибольшую трудность представляет вывод оценки снизу для функционала $\Phi(\varepsilon;\mu, \vartheta) = \left((1-t_0)\varepsilon - \mu G_c(\varepsilon;t_0) - \mu\vartheta G_*(\varepsilon;t_0), a\right)_E$, определенного на $E(\overline{\Omega}) \times [0,1] \times [0,1]$, a — $(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, которая получается в виде $\Phi(\varepsilon,\mu,\vartheta) > cR^2, c > О, \forall\mu, \&$ е $[0,1]$; R - достаточно большое число. В процессе вывода этой оценки существенную роль играет следующая лемма, являющаяся аналогом леммы 2.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие 2) пункта 3.1, Г- гладкий контур класса $C^1_\alpha(0<\alpha<1)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in E(\Omega)$ есть решение системы уравнений*

$$(\operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j \varepsilon_1)/2 - \operatorname{Re}(g_{jj} T\varepsilon_0) + \frac{1}{2}\omega_j^2(\varepsilon_3) = 0, \quad j = 1,2,$$

$$\varepsilon_2 - 2\operatorname{Re}(g_{12} T\varepsilon_0) + \omega_1(\varepsilon_3)\omega_2(\varepsilon_3) = 0.$$

Кроме того, пусть

$$q = \left\|(I-K)^{-1}\right\|_{L_1} \left\|\rho_0(z)\right\|_C < 1, \tag{5.3}$$

где $K\varepsilon_0 = \operatorname{Re}[(g_{11} - g_{22})T\varepsilon_0] + 2i\operatorname{Re}(g_{12}T\varepsilon_0)$, $\rho_0(z) = \Phi'_\Gamma(z) - T(g_{11} + g_{22})$,

$$\Phi_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{t}dt}{t-z}, \quad g_{jk} = (G^1_{jk} - iG^2_{jk})/2, \quad j,k = 1,2.$$

Тогда $\varepsilon = 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

Приводятся примеры, когда условие (5.3) выполняется.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)-3), 5), б), 8) §3, неравенство (5.3), Г- гладкий контур класса $C^1_\alpha(0<\alpha<1)$, $B^{\lambda\mu\varsigma}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ суть четные функции по α^3, существует параметр $t_0 \in [0,1)$, при котором оператор $\widetilde{G}_* = G_*/(1-t_0)$ допускает резольвенту. Тогда задача равновесия пологих свободных оболочек разрешима в пространстве*

$E(\overline{\Omega})$; *все ее обобщенные решения лежат внутри эллипсоида с достаточно большими полуосями.*

Указывается подпространство пространства $E(\overline{\Omega})$, в котором задача разрешима без условия (5.3) и когда Г-КГК класса C^1_α.

§6 посвящен исследованию нелинейных задач для пологих оболочек с шарнирно опертыми краями.

В пункте **6.1** дается постановка задачи. Пусть срединная поверхность S_0 пологой оболочки гомеоморфна односвязной плоской области Ω с границей Γ. Будем различать два варианта изгибных условий:

$$w_3 \big|_\Gamma = \tilde{w}_3 ; \tag{6.1}$$

$$w_4 \big|_\Gamma = w_4 \tag{6.2}$$

и четыре варианта тангенциальных условий закрепления оболочки:

$$w_1 \big|_\Gamma = \tilde{w}_1 ; \tag{6.3}$$

$$w_2 \big|_\Gamma = \tilde{w}_2 ; \tag{6.4}$$

$$w_m \big|_\Gamma = w_m , \tag{6.5}$$

$$w_\tau \big|_\Gamma = \tilde{w}_\tau \tag{6.6}$$

в которых $\tilde{w}_j\,(j=\overline{1,4}), \tilde{w}_m, \tilde{w}_\tau$ - заданные функции.

Предполагается, что выполнены условия 1)-3), 5), 6), 8) §3, Γ - гладкий контур класса $C^1_\alpha (0<\alpha<1)$; $\tilde{w}_3 \in C^1_\alpha(\Gamma)$, $\tilde{w}_j\,(j=1,2,4)$, $\tilde{w}_m, \tilde{w}_\tau \in C_\alpha(\Gamma)$.

При формулировке краевых задач мы можем комбинировать любой вариант тангенциальных и любой вариант изгибных граничных условий. В соответствии с этим будем различать задачи $\mu\nu$, $\mu=1,2$, $\nu=\overline{3,6}$. Итак, задача $\mu\nu$ заключается в нахождении решения задачи равновесия пологой оболочки при геометрических граничных условиях (6. μ), (6. ν).

В пункте 6.2 приводятся некоторые сведения из теории краевых задач Римана-Гильберта для аналитических функций в односвязных областях.

Пункт 6.3 посвящен выводу основных соотношений. Центральным местом этого пункта является получение интегрального представления для перемещения, удовлетворяющего заданным граничным условиям. С этой целью рассматривается следующая вспомогательная задача.

Задача $A_{\mu\nu}$. *Найти компоненты перемещения* $w=(w_1, w_2, w_3)$ *класса* $w_i, w_{3\alpha^i} \in C(\overline{\Omega})$, $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$, $i,j=1,2$, *удовлетворяющие системе (4.1), в которой* $\varepsilon_j\,(j=\overline{1,3}) \in L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$ *суть произвольные* *функции, временно считавшиеся известными, и граничным условиям (6, μ), (6.ν).*

Задача $A_{\mu\nu}$ решается с привлечением краевых задач Римана-Гильберта для аналитических функций. В результате для прогиба w_3 получаем единственное представление через ε_3, однако, при этом должно выполняться условие разрешимости вида

$$\iint\limits_{\Omega} k_{0\mu}(z)\varepsilon_3(z)d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \tag{6.7}$$

где $k_{0\mu}(z)$ - известная функция.

Тангенциальные перемещения определяются безусловно, но неоднозначно; для однозначности их представлений через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ требуется, чтобы w_1, w_2 удовлетворяли некоторым дополнительным условиям интегрального характера. Значительное место пункта 6.3 занимает изучение свойств операторов и функций, входящих в эти представления. Здесь же через условные деформации $\varepsilon_j, j=\overline{1,3}$ выражаются компоненты деформации, вариация потенциальной энергии, элементарная работа внешних сил.

Пункт 6.4 посвящен построению функциональных пространств. Пусть $D_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$ " линейное пространство вектор-функций $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in L_p(\overline{\Omega})$, $2 < p < 2/(1 - a)$, у которых третья компонента ε_3 удовлетворяет условию (6.7). На $D_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$ задается скалярное произведение, при этом существенно используются некоторые факты из теории задач Римана-Гильберта для обобщенных аналитических функций. Замыкание $D_{\mu\nu}(\Omega)$ в соответствующей норме обозначается через $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$. Изучаются свойства элементов пространства $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$, показывается его полнота. Достаточно много внимания уделяется изучению операторов, действующих в $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$.

В пункте 6.5 дается обобщенная постановка задач $\mu\nu$ в $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$, доказывается ее корректность. Нахождение обобщенного решения сводится к НОУ

$$\varepsilon - G_{\mu\nu}(\varepsilon) = 0, \tag{6.8}$$

где $G_{\mu\nu}(\varepsilon)$ - ограниченный оператор.

Исследованию разрешимости уравнения (6.8) посвящен пункт 6.6. Рассуждения, аналогичные примененным в §§ 4,5 приводят к тому, что при выполнении вышеуказанных условий и некоторых ограничений на геометрические параметры оболочки задача $\mu\nu$ разрешима в пространстве $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$, все ее обобщенные решения лежат внутри эллипсоида с достаточно большими полуосями. Указывается подпространство пространства $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$, в котором задача $\mu\nu$ разрешима при более слабых ограничениях на исходные данные.

В третьей главе для исследования нелинейных краевых задач, рассмотренных в первых двух главах, используется вариационный метод. Хотя здесь основной результат снова теоремы разрешимости, полученные таким способом решения качественно отличаются от решений §§ 3,5,6, поскольку они характеризуют экстремальные состояния системы.

Третья глава включает в себя четыре параграфа. В §7 вариационный метод применяется к исследованию задач $\alpha\beta$ в пространствах $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала дается формула для функционала $J_{\alpha\beta}$ полной энергии системы "оболочка-внешняя нагрузка". Затем изучаются некоторые свойства $J_{\alpha\beta}$, а именно, доказывается

Теорема 3. *Функционал $J_{\alpha\beta}(w)$ определен и дифференцируем в любой точке $w \in H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ и $gradJ_{\alpha\beta}(w) = w - G_{\alpha\beta}(w)$.*

Следствие. *Множество критических точек функционала $J_{\alpha\beta}(w)$ совпадает с множеством обобщенных решений задачи $\alpha\beta$.*

Дальнейшее исследование $J_{\alpha\beta}(w)$ опирается на обобщенную теорему Вейерштрасса, согласно которой если 1) функционал слабо полунепрерывен снизу и 2) является возрастающим в рефлексивном банаховом пространстве, то он имеет точку абсолютного минимума на этом пространстве. В связи с этим доказываются следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть для любых двух векторов деформации $\gamma_k = (\gamma_{k,11}, \gamma_{k,12}, \gamma_{k,22}) \in L_2(\overline{V})$, $k = 1,2$ выполнено условие*

$$\iiint\limits_V \left[\sigma^{\lambda\mu}(\gamma_1) - \sigma^{\lambda\mu}(\gamma_2)\right](\gamma_{1,\lambda\mu} - \gamma_{2,\lambda\mu})\, dV \geq 0 .$$

Тогда функционал $J_{\alpha\beta}(w)$ слабо полунепрерывен снизу в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$.

Пусть

$$|U_*| \leq q_0 U_\tau, 0 < q_0 < 1 \tag{7.1}$$

где U_τ и U_* - потенциальные энергии деформации при напряжениях $\sigma_\tau^{\lambda\mu}$ и $\sigma_*^{\lambda\mu}$ соответственно.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 1)-9) §3, $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, $B^{\lambda\mu qs}$ суть четные функции по α^3, неравенства (3.4), (7.1) и связи на $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$ существенно упругие. Тогда $J_{\alpha\beta}(w)$ суть возрастающий функционал в $H_{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$.*

Из теорем 3,4,5 следует, что задача $\alpha\beta$ имеет по крайней мере одно обобщенное решение, доставляющее функционалу $J_{\alpha\beta}$ абсолютный минимум.

В заключительной части §7 обсуждается вопрос существования точек локального минимума $J_{\alpha\beta}$, являющихся также обобщенными решениями задач $\alpha\beta$.

§8 посвящен изучению задачи равновесия для свободных пологих оболочек в пространстве $E(\overline{\Omega})$, а в §9 вариационный подход применяется к задачам $\mu\nu$ в $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$. Исследования в этих параграфах проводятся по той же схеме, что и в §7, и опираются на допущения и соотношения §§ 5,6. В результате доказываются утверждения теорем 3-5 для функционалов J_0 и $J_{\mu\nu}$ полной энергии в соответствующих пространствах $E(\overline{\Omega})$ и $E_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$.

Последний §10 третьей главы посвящен обоснованию применимости методов Бубнова-Галеркина (БГ) и Ритца к исследованию рассмотренных выше задач. Обоснование приближенных методов проводится по следующей схеме. Сначала устанавливается, что системы уравнений БГ и Ритца при каждом и имеют по крайней мере одно решение. Затем показывается, что 1) множество приближенных решений БГ сильно компактно в соответствующем пространстве и всякая предельная точка этого множества является обобщенным решением задачи; 2) из множества приближений Ритца можно выделить подпоследовательность, сильно сходящуюся к некоторой точке абсолютного минимума соответствующего функционала полной энергии.

В четвертой главе диссертации изучаются геометрически и физически нелинейные задачи для анизотропных непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны. Основу рассмотрений составляют вариационные соображения.

Данная глава состоит из трех параграфов. В §11 краевые задачи изучаются в перемещениях. В пункте 11.1 дается постановка задач. Пусть $\Gamma=\bigcup_{m=1}^{6}\Gamma_m$ есть разбиение граничного контура Γ области Ω.

Рассматривается следующий вариант граничных условий:

$$w_k\big|_{\Gamma_1}=\widetilde{w}_k,\, k=\overline{1,4}; \qquad (11.1)$$

$$w_1\big|_{\Gamma_2}=\widetilde{w}_1,\; w_{3\alpha^1}\big|_{\Gamma_2}=\widetilde{w}_{31}, \quad u_{on}\big|_{\Gamma_2}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\left(k_p^{22}\omega_2^2+k_u^{33}w_3^2\right)ds, \qquad (11.2)$$

$$w_2\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{w}_2,\, w_{3\alpha^2}\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{w}_{32},\, u_{on}\big|_{\Gamma_3}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_3}\left(k_p^{11}\omega_1^2+k_u^{33}w_3^2\right)ds; \qquad (11.3)$$

$$w_k\big|_{\Gamma_4}=w_k,\; k=3,4,\; w_1\big|_{\Gamma_4}=\widetilde{w}_1,\; u_{\delta n}\big|_{\Gamma_4}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_4}k_p^{22}\omega_2^2\, ds; \qquad (11.4)$$

$$w_k\big|_{\Gamma_5}=\widetilde{w}_k,\, k=3,4,\, w_2\big|_{\Gamma_5}=\widetilde{w}_2. \quad u_{on}\big|_{\Gamma_5}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_5}k_p^{11}\omega_1^2\, ds; \qquad (11.5)$$

$$u_{on}\big|_{\Gamma_6}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_6}\left(k_p^{ij}\omega_i\omega_j\big|_{i,j=1,2}+k_u^{ij}w_iw_j\big|_{i,j=3,4}\right)ds.$$

Здесь k_p^{ij}, k_u^{ij} - коэффициенты упругости опор, сами опоры характеризуются энергией u_{on}; $w_k (k = \overline{1,4})$, $w_{3j} (j = 1,2)$ - заданные функции.

Будем различать задачи m, $m = \overline{1,6}$. Задача m заключается в нахождении из уравнений равновесия перемещения $w = (w_1, w_2, w_3)$, удовлетворяющего (11.1)-(11.5) и статическим граничным условиям при обязательном требовании $mes\,\Gamma_m > 0$, при этом остальные участки контура Γ или некоторые из них могут и отсутствовать.

В этом же пункте выводятся соотношения для деформаций, вариации потенциальной энергии, элементарной работы, которые используются и в последующих параграфах четвертой главы. Эти соотношения характеризуются тем, что в них тангенциальные перемещения, следуя И.И.Воровичу, Л.П.Лебедеву и Ш.М.Шлафману, заменены на ω_1, ω_2. Значительное место пункта 11.1 занимает построение функциональных пространств. Пусть $D_m(\overline{\Omega})$ -линейное пространство вектор-функций $\omega = (\omega_1, \omega_2, w_3)$ класса $\omega_0 = (\omega_1, \omega_2) \in C(\Omega)$, $w_3 \in C^1(\overline{\Omega})$, имеющих кусочно-непрерывные в Ω производные $\omega_{,}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и удовлетворяющих однородным граничным условиям (11.1)-(11.5) при обязательном требовании $mes\Gamma_m > 0$, при этом связи на $\Gamma_m (m \neq 1)$ являются существенно упругими, остальные участки разбиения Γ могут отсутствовать, а при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. Замыкание $D_m(\overline{\Omega})$ в соответствующей норме, заданной скалярным произведением, обозначается через $H_m(\overline{\Omega})$. Доказываются теоремы вложения для $H_m(\overline{\Omega})$, а также некоторые другие свойства этих пространств. Изучаются свойства операторов, действующих в $H_m(\overline{\Omega})$.

Введению понятия обобщенного решения задачи m в $H_m(\overline{\Omega})$ и сведению его к НОУ посвящен пункт 11.2. Разрешимость НОУ рассматривается в пункте 11.3. Для этого используется вариационный подход. Показывается, что 1) функционал $J_m(\omega)$ полной энергии определен и дифференцируем в каждой точке пространства $H_m(\overline{\Omega})$; 2) множество критических точек $J_m(\omega)$ совпадает с множеством обобщенных решений задачи m; 3) $J_m(\omega)$ – слабо полунепрерывный снизу и возрастающий в $H_m(\overline{\Omega})$ функционал. Основу вариационного подхода составляют априорные оценки для J_m, при выводе которых определяющее значение имеет получение условий существования лишь тривиального решения системы нелинейных уравнений

$$
\begin{gathered}
-b_j w_{3\alpha^j\alpha^j} + g_{jj}^k w_{3\alpha^k} - B_{jj} w_3 + \frac{1}{2}\omega_j^2 = 0, \quad j = 1,2, \\
-(b_1 + b_2) w_{3\alpha^1\alpha^2} + g_{12}^k w_{3\alpha^k} + \omega_1 \cdot \omega_2 = 0,
\end{gathered}
\tag{11.6}
$$

являющейся аналогом системы (3.3).

Имеет место

Лемма 6. *Пусть выполнено условие 2) $(l=1)$ §3, вектор $\omega=(\omega_1,\omega_2,w_3)\in H_m(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω п.в системе (11.6) и $w_3\big|_{\Gamma}=w_4\big|_{\Gamma}=0$. Кроме того, пусть*

$$q_1\equiv\frac{1}{2}\left\|(I-P_1)^{-1}\right\|_{L_1}\|Tb\|_C\,q_0(\Omega)<1,$$

$$\begin{gathered}q_2\equiv\frac{1}{4}\left[\|T(B_{11}+B_{22})\|_C+2\|g\|_C\right]\left\|(I-P_2)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|(I-P_1)^{-1}\right\|_{L_1}\times\\ \times q_0(\Omega)\max\left(\|B_1^1\|_C;\|B_2^2\|_C\right)<1,\end{gathered}\tag{11.7}$$

где $P_1f=-T(Af+\overline{A\bar{f}});\quad P_2f=-\frac{1}{4}(I-P_1)^{-1}T(b\overline{Tf});\quad b=B_j^jB_{jj},$

$$g=(G_{11}^1+G_{22}^1)b_1+i(G_{11}^2+G_{22}^2)b_2,\quad b_j=1/B_j^j.$$

Тогда $\omega=0$ в $\overline{\Omega}$.

Выполнение условий (11.7) иллюстрируется на конкретном примере непологой оболочки.

В заключительном пункте 11.4 исследуется вопрос применимости метода Ритца для приближенного решения задач m.

Основной результат §11 дается следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия 1)-6), 8) §3, коэффициенты упругости опор $k_p^{ij}, i,j=1,2$, $k_u^{ij}, i,j=3,4$ суть ограниченные функции, причем связи* fc* *$, i,j=3,4$ на $\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_6$ существенно упругие, $B^{\lambda\mu qs}$ - четные функции по α^3, а также имеют место условие теоремы 4, неравенства (7.1), (11 7). Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи m, доставляющее функционалу J_m абсолютный минимум.*

§12 посвящен изучению разрешимости нелинейных краевых задач для непологих свободных оболочек ненулевой гауссовой кривизны. Для этого предлагается метод, аналогичный примененному в §5.

В пункте 12.1 дается постановка задачи, вводится пространство $D_\omega(\overline{\Omega})$ вектор-функций $\omega=(\omega_1,\omega_2,w_3)$, компоненты которых имеют вид (5.1), где $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in L_p(\overline{\Omega}), p>2$ - произвольная вектор-функция. С помощью этих интегральных представлений компоненты деформации, вариация потенциальной энергии, элементарная работа внешних сил выражаются через ε. Основное пространство $E_c(\overline{\Omega})$ определяется как замыкание $L_p(\overline{\Omega}), p>2$ в соответствующей норме. Изучаются свойства элементов $E_c(\overline{\Omega})$. Показывается, что при выполнении некоторого условия пространство перемещений, определенных при помощи $\varepsilon\in E_c(\overline{\Omega})$, не содержит жесткие смещения оболочки.

В пункте 12.2 вводится понятие обобщенного решения задачи и его нахождение сводится к НОУ.

Исследованию разрешимости НОУ в $E_c(\overline{\Omega})$ посвящен пункт 12.3. При помощи рассуждений, аналогичных примененным в §11, показывается, что при выполнении условий 1)-3), 5), 6), 8) §3, Γ-гладкий контур класса $C^1_\alpha(0<\alpha<1)$, $B^{\lambda\mu qs}$ - четные функции по α^3, а также условий теоремы 4, неравенств (7.1) и типа (11.7), задача равновесия для свободных оболочек имеет по крайней мере одно обобщенное решение, придающее абсолютный минимум функционалу полной энергии. Указывается подпространство пространства $E_c(\overline{\Omega})$, в котором задача разрешима при менее жестких ограничениях на исходные данные.

В §13 изучаются нелинейные задачи для непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны с шарнирно опертыми краями. Эти граничные условия характеризуются тем, что для них не представляется возможным образование пространств типа $H_m(\overline{\Omega})$. В силу этого для их исследования предлагается метод, разработанный в §6, основу которого составляют интегральные представления для перемещения, полученные с помощью задачи Римана-Гильберта для аналитических функций.

В пункте 13.1 дается постановка задачи, выводятся основные соотношения, строятся функциональные пространства.

Пусть Ω - односвязная область с гладкой границей $\Gamma \in C^1_\alpha$. Пусть компоненты перемещения удовлетворяют одному из следующих вариантов граничных условий:

$$w_1\big|_\Gamma = \tilde{w}_1, \quad w_{3\alpha^1}\big|_\Gamma = w_{31}, \tag{13.1}$$

$$w_2\big|_\Gamma = \tilde{w}_2, \quad w_{3\alpha^2}\big|_\Gamma = w_{32}, \tag{13.2}$$

$$w_3\big|_\Gamma = \tilde{w}_3, \quad (B_1^1 w_1 \tau^1 + B_2^2 w_2 \tau^2)\big|_\Gamma = \tilde{w}_\tau; \tag{13.3}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial m}\Big|_\Gamma \equiv w_4\big|_\Gamma = \tilde{w}_4, (B_1^1 w_1 m^1 + B_2^2 w_2 m^2)\big|_\Gamma = \tilde{w}_m, \tag{13.4}$$

где $\tilde{w}_3 \in C^1_\alpha(\Gamma)$, w_j, w_{3j} (у = 1,2), $w_4, w_\tau, w_m \in C_\alpha(\Gamma)$ – известные функции.

Эта задача путем исключения тангенциальных перемещений сводится к эквивалентной задаче для вектора $co = (\omega_1, \omega_2, w_3)$, названной нами задачей $\boldsymbol{n}$.

Для вывода интегральных представлений рассматривается следующая вспомогательная

Задача A_n. *Требуется найти* ***вектор-функцию*** $\omega = (\omega_1, \omega_2, w_3)$ *класса* $\omega_i, w_{3\alpha^i}$ 6 $C(\overline{\Omega}), \omega_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega}), p > 2$, *i,j* = 1,2, *удовлетворяющую* ***п.в.*** *системе*

$$\omega_{1\alpha^1} - \omega_{2\alpha^2} = \varepsilon_1, \qquad \omega_{1\alpha^2} + \omega_{2\alpha^1} = \varepsilon_2,$$

$$w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} = -\varepsilon_3$$

и граничному условию (13. n).

Здесь $\varepsilon_j (j = \overline{1,3}) \in L_p(\overline{\Omega}),\ p > 2$ - произвольные функции.

Задача A_n решается сведением к задаче Римана-Гильберта для аналитических функций в односвязной области. В результате получаем интегральные представления для функций ω через e - $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, третья компонента ε_3 которых в случае граничных условий (13.3), (13.4) удовлетворяет условию вида

$$\iint_{\Omega} k_{0n}(z)\varepsilon_3(z)d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \tag{13.5}$$

где $k_{0n}(z)$ - известные функции.

Пусть $D_n(\overline{\Omega})$ – линейные пространства вектор-функций $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in L_p(\overline{\Omega}), 2 < p < 2/(1-\alpha)$, у которых третья компонента ε_3 при $n = 3,4$ удовлетворяет условию (13.5). Замыкание $D_n(\overline{\Omega})$в соответствующей норме обозначается через $E_n(\overline{\Omega})$. Устанавливаются некоторые свойства пространств $E_n(\overline{\Omega})$.

В пункте 13.2 дается обобщенная постановка задач n . Нахождение обобщенного решения сводится к НОУ, разрешимость которого доказывается в пункте 13.3, для чего используется вариационный метод. Таким способом показывается, что задача n для непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны при некоторых ограничениях на параметры оболочки имеет обобщенное решение в $E_n(\overline{\Omega})$, доставляющее функционалу полной энергии абсолютный минимум.

Характерная особенность глав 1-4 заключается в том, что доказанные в них теоремы разрешимости носят нелокальный характер, т.е. существование хотя бы одного решения устанавливается внутри эллипсоидов с достаточно большими полуосями без каких бы то ни было предположений о малости параметров внешней нагрузки. В то же время в теории нелинейных краевых задач для тонких оболочек важной проблемой является определение пределов изменения параметров внешней нагрузки, при которых задача имеет единственное решение. Этой проблеме посвящена пятая глава.

В пятой главе краевые задачи, рассмотренные в главах I,II в случае пологих оболочек, изучаются для тонких непологих оболочек. Целью главы является вывод условий, при которых эти задачи имеют единственное решение.

Данная глава состоит из трех параграфов. В §14 рассматриваются задачи $\alpha\beta$ *в* перемещениях. **§15** посвящен задаче для свободных тонких оболочек, а в §16 изучаются задачи $\mu\nu$. Исходным пунктом в исследованиях этих параграфов являются нелинейные операторные уравнения, к которым было сведено нахождение обобщенных решений задач. Существование единственного решения НОУ устанавливается по следующей схеме. Ограниченный оператор, входящий в НОУ, представляется в виде суммы линейного вполне непрерывного и ограниченного нелинейного операторов. Основным моментом в данной схеме является доказательство утверждения о том, что число 1 не есть собственное число линейного оператора. Для этой цели привлекается аппарат обобщенных аналитических функций. В случае свободных оболочек и задач $\mu\nu$ данное утверждение имеет место при некоторых ограничениях на геометрические параметры оболочки, которым, в частности, удовлетворяют непологие оболочки положительной гауссовой кривизны, произвольные пологие оболочки. После этого НОУ преобразуется к эквивалентному виду, к которому применяется принцип сжатых отображений. Таким путем доказывается, что при некоторых ограничениях на исходные данные в шаре соответствующего пространства задача имеет единственное обобщенное решение.

Заключительная **шестая глава** диссертации посвящена изучению геометрически и физически нелинейных краевых задач для тонких упругих анизотропных нерегулярных неоднородных оболочек. Для этой цели предлагается метод, разработанный в предыдущих главах, и основанный на решении задач в условных деформациях. Такой подход позволяет получить в качестве уравнений равновесия нелинейные сингулярные интегральные уравнения (СИУ) по ограниченной плоской области £2 относительно условных деформаций.

Шестая глава включает в себя три параграфа. В **§17** изучаются нелинейные задачи для нерегулярных оболочек с жестко заделанным краем. В пункте 17.1 соотношения для перемещений, деформаций через функции $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)>$ полученные в §4, представляются несколько в другом виде, удобном для дальнейших исследований. Здесь же строится основное пространство $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ условных деформаций. Оно получается как замыкание линейного пространства $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ (см. §4) в норме $L_2(\overline{\Omega})$. Изучаются функциональные свойства элементов пространства $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, а также свойства операторов, действующих в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

В пункте 17.2 с помощью вариационного принципа Лагранжа вводится понятие обобщенного решения задачи, доказывается корректность его определения. Нахождение обобщенного решения сводится к решению системы нелинейных СИУ по области Ω в пространстве $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$. При этом используются некоторые сопряженные операторы, в связи с чем сначала изучаются их свойства.

Пункт 17.3 посвящен исследованию разрешимости СИУ. Для этой цели привлекается принцип сжатых отображений. Таким способом показывается, что при выполнении условий 2)-6), 8), 9) §3 и при некоторых ограничениях на физико-геометрические характеристики оболочек и на параметры внешней нагрузки система в шаре малого радиуса имеет единственное решение. Выполнение условий разрешимости иллюстрируется на конкретных примерах.

§18 посвящен исследованию задачи равновесия для нерегулярных свободных оболочек. В заключительном §19 для нерегулярных оболочек изучаются задачи $\mu\nu$. Исследования этих параграфов ведутся по той же схеме, что и в §17. В качестве основных пространств, в которых ищутся решения, выступают $L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$ (§18) и $\tilde{E}_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$ (§19), образованое как замыкание линейного пространства $D_{\mu\nu}(\overline{\Omega})$ (см.§6) в норме $L_2(\overline{\Omega})$. Основу рассмотрений составляют интегральные представления для перемещений, деформаций, полученные в §§5,6. Разрешимость СИУ устанавливается при помощи принципа сжатых отображений. В результате получается, что задачи в некотором шаре соответствующего пространства при некоторых ограничениях на параметры оболочек и внешней нагрузки имеют единственное решение.

Таким образом, в диссертации получены следующие основные результаты:

- развиты топологический и вариационный методы исследования геометрически и физически нелинейных краевых задач в перемещениях для тонких упругих анизотропных пологих кусочно-гладких класса C^2 оболочек. С помощью этих методов доказаны теоремы разрешимости для таких оболочек при смешанных условиях их закрепления;

- предложен новый метод исследования нелинейных краевых задач, суть которого заключается в доказательстве их разрешимости в пространстве условных деформаций. Основу метода составляют интегральные представления для перемещений через условные деформации, полученные с использованием аппарата обобщенных аналитических функций, краевых задач Римана-Гильберта для аналитических функций;

- разработаны топологический и вариационный методы исследования задач в условных деформациях. На их основе установлены теоремы существования для упругих анизотропных пологих кусочно-гладких класса C^2 оболочек со свободным и шарнирно-опертым краями;

- развит вариационный метод исследования нелинейных краевых задач в перемещениях и условных деформациях для тонких анизотропных упругих непологих кусочно-гладких класса C^3 оболочек ненулевой гауссовой кривизны и на его базе получены условия существования решений задач для таких оболочек при смешанных граничных условиях, свободном и шарнирно-опертом краях;

- дано обоснование применимости методов Бубнова-Галеркина и Ритца для приближенного решения нелинейных задач в перемещениях и условных деформациях;

- получены условия, при выполнении которых существует единственное решение нелинейных задач для тонких упругих анизотропных оболочек;

- метод исследования задач в условных деформациях развит на случай тонких упругих анизотропных неоднородных нерегулярных оболочек. Доказаны теоремы существования единственного решения нелинейных задач для таких оболочек с жестко заделанным, свободным и шарнирно-опертым краями.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. О разрешимости одной геометрически нелинейной задачи теории пологих оболочек//Изв. вузов.Математика.-1998.-№7.-С.53-61.
2. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. О существовании решения одной задачи нелинейной теории пологих оболочек//Изв. РАН. МТТ.-1998.-№3.-С.21-29.
3. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. К вопросу разрешимости физически нелинейной задачи теории пологих оболочек при конечных перемещениях//Изв. вузов.Математика.-1998.-№9.-С.70-80.
4. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. Исследование разрешимости краевых задач геометрически и физически нелинейной теории тонких оболочек//Изв. РАН. МТТ.-2000.-№6.-С.116-128.
5. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. Метод Ритца приближенного решения краевых задач нелинейной теории тонких оболочек//Изв. РАН .МТТ.-2002.-№1.-С.154-164.
6. Тимергалиев С.Н. Доказательство разрешимости одной задачи нелинейной теории пологих оболочек//Изв. вузов.Математика.-1996.-№9.-С.60-70.
7. Тимергалиев С.Н. Об одном методе доказательства разрешимости задачи нелинейной теории пологих оболочек//Дифференциальные уравнения.-1998.-Т.34.-№10.-С.1412-1419.
8. Тимергалиев С.Н. Исследование разрешимости вариационных задач нелинейной теории тонких оболочек//Изв. вузов.Математика.-2001.-№9.-С.66-74.
9. Тимергалиев С.Н. Вариационный метод в проблеме разрешимости краевых задач геометрически нелинейной теории тонких оболочек//Дифференциальные уравнения.-2002.-Т.38.-№4.-С.521-528.
10. Тимергалиев С.Н. Метод Бубнова-Галеркина приближенного решения краевых задач нелинейной теории тонких оболочек // Дифференциальные уравнения.-2002.-Т.38.-№12.-С.1680-1689.

11. Тимергалиев С.Н. Исследование разрешимости одной краевой задачи нелинейной теории пологих оболочек//Труды XVII международной конференции по теории оболочек и пластин.Т1.-Казань,1996.-С.133-138.

12. Тимергалиев С.Н. О разрешимости задач нелинейной теории пологих оболочек//Камский политехнический институт.- Наб.Челны, 1997.-19 с /Рукоп. депон. в ВИНИТИ 21.05.97,№1689-В97.

13. Тимергалиев С.Н. Об одном методе доказательства существования решения краевых задач нелинейной теории непологих оболочек//Труды международной конференции «Актуальные проблемы механики оболочек», посвящ. памяти засл. деятеля науки ТАССР проф. А.В.Саченкова, 9-11 сентября 1998 года.-Казань,1998.-С.210-216.

14. Тимергалиев С.Н. К вопросу о существовании и единственности решения краевых задач в нелинейной теории тонких оболочек//Труды X межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»(29-31 мая 2000 года).Часть I.-Самара,2000.-С.161-163.

15. Тимергалиев С.Н. Об одном методе исследования краевых задач нелинейной теории тонких оболочек//Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского.Т5.-Казань,2000.-С.296-297.

16. Тимергалиев С.Н. К исследованию разрешимости нелинейных краевых задач теории непологих оболочек//Труды XI межвузовской конф. «Математическое моделирование и краевые задачи», 29-31 мая 2001 года.Часть I.-Самара, 2001.-С.179-182.

17. Тимергалиев С.Н. Единственность решения краевых задач нелинейной теории тонких оболочек//Тезисы докл. уч. V междунар. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 18-22 сентября 2000 года.-Новосибирск,2000.-С.107.

18. Тимергалиев С.Н. О разрешимости геометрически и физически нелинейных задач теории пологих оболочек//Тезисы докл. участн. VII Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 10-13 июля 1997 года.-Казань,1997.-С.165.

19. Тимергалиев С.Н. К вопросу разрешимости одной задачи нелинейной теории пологих оболочек//Тезисы Международной конференции «Механика машиностроения» (28-30 марта 1995 года) . -Наб.Челны: КамПИ,1995.-С.104-105.

20. Тимергалиев С.Н. Исследование разрешимости задачи о НДС нелинейной теории пологих композитных оболочек//Тезисы докл. участн. I международного симпозиума «Будущее за композитами» (5-7 февраля 1997 года).-Наб.Челны:КамПИ,1997.-С.44-46.

21. Тимергалиев С.Н. О разрешимости геометрически и физически нелинейных задач теории тонких непологих оболочек//Тезисы докл. участн. международной научно-технической конференции «Механика машиностроения», 23-25 сентября 1997 года.-Наб.Челны:КамПИ,1997.-С.59.

22. Тимергалиев С.Н. Принцип сжатых отображений в проблеме разрешимости краевых задач нелинейной теории тонких оболочек//Тезисы доклад. участн. международной научно-технической конференции «Тех-

нико-экономические проблемы промышленного производства»(29-31 марта 2000 года).-Наб.Челны,2000.-С.47.

23. Тимергалиев С.Н. Вариационный метод исследования краевых задач нелинейной теории тонких оболочек//Тезисы докл. уч. международной конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина «Актуальные проблемы механики оболочек», 26-30 июня 2000 года.-Казань,2000.-С.232.