На правах рукописи

Онегова Ольга Васильевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ И КРАЕВОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

05.13.18 -- математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ - 2002

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Научный руководитель: — доктор физико-математических наук, доцент Пименов В.Г.

Официальные оппоненты: — доктор физико-математических наук, профессор Ю.Ф. Долгий;
— кандидат физико-математических нау доцент А.Ю. Вдовин.

Ведущая организация — Московский авиационный институт (государственный технический университет).

Защита диссертации состоится "25" 12 2002 г. в 15 ч. 00 м. на заседании диссертационного Совета К 212.286.01 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М.Горького по адресу: 620063, г.Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Автореферат разослан "20" 11 2002 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
доктор физ.-мат. наук, доцент Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Многие свойства реальных объектов определяются эффектом последействия, состоящего в том, что дальнейшее состояние объекта зависит не только от настоящего, но и от прошлого, т.е. от его предыстории. Кроме того, многие задачи вообще теряют смысл, если не рассматривается зависимость от прошлого. Моделировать такие процессы позволяют функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ), называемые также уравнениями с запаздыванием или уравнениями с последействием.

Системы с последействием получили значительные приложения в таких областях, как, например, механика и техника, биология, медицина, экономика. Так, в механике модели с последействием используются для описания напряженно-деформированного состояния ряда материалов. Иным кругом задач, в которых применяются такие уравнения, являются задачи управления механическими объектами при помощи регуляторов, зависящих от всей предшествующей траектории. В биологических системах эволюция связана с такими длительными процессами, как размножение, развитие или вымирание, поэтому существенно зависит от предыстории.

Возникновение подобных систем, связанных с эффектом последействия, потребовало развития соответствующей теории, которая активно развивалась такими математиками как Н.В. Азбелев, Г.А. Каменский, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, Г.И. Марчук, А.Д. Мышкис, В.Р. Носов, С.Б. Норкин, Ю.С. Осипов, Л.С. Понтрягин, С.Н. Шиманов, Л.Э. Эльсгольц, C.H.T. Baker, H.T. Banks, R. Bellman, K.L. Cooke, R.D. Driver, J.K. Hale, V. Lakshmikantam, V. Volterra и многими другими.

Полученные в этой области фундаментальные результаты сформировали качественную теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вместе с тем, точное решение подобных систем аналитическими методами удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому проблема создания эффективных численных методов решения задач и разработка их программной реализации современными вычислительными средствами является особенно актуальной.

Для получения численного решения уравнений с последействием существуют различные методы. Прежде всего, дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием могут быть сведены к обыкновенному дифференциальному уравнению методом шагов [1].

Во многих работах для получения решения существенно используется структура конкретного уравнения, см. обзоры [2]. В теоретическом плане очень эффективен функциональный подход [3]. Для практической разработки численных алгоритмов хорошо себя зарекомендовала методика, основанная на идеях разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих, интерполяции с заданными свойствами и использовании специальной техники (i-гладкого анализа) вычисления производных функционала правой части ФДУ, предложенных в работах [4]. Эта методика позволяет создавать численные методы, являющиеся полными аналогами методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе рассматриваются способы решения начальных и краевых задач для ФДУ, полученные на базе данного подхода. Разработанные методы реализованы в виде пакета прикладных программ, который позволяет решать широкий класс задач моделирования систем с запаздыванием. В частности, в диссертации рассматриваются задача исследования колебаний токоприемника движущегося локомотива и задача управления регулятором гирорамы с запаздыванием.

По сравнению с другими разделами теории функционально-дифференциальных уравнений, теория краевых задач для этих уравнений (особенно численных методов) в настоящее время еще не достигла своего завершения, за исключением теории линейных краевых задач второго порядка [5]. Краевые задачи для ФДУ возникают, например, при исследовании вариационных задач и задач оптимального управления систем с последействием, а также ряда других прикладных задач. В данном исследовании

---

[1] *Эльсгольц Л.Э , Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. Наука. 1971. 296 с.

[2] *Холл Д., Уатт Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Мир. 1979. 312 с., *Bellen A.* Constrained mesh methods for functional differential equations // International Series of Numerical Mathematics, Verlag, Basel. 1985. P. 52 70., *Baker C.T.H., Paul C.A.H. and Wille D.R.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advances in Comput. Math. 1995. V. 3. P. 171 196.

[3] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. Гостехиздат. 1959. 211 с., *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 421 с.

[4] *Kim A.V., Pimenov V.G,* Numerical methods for time-delay systems on the basis of i-smooth analysis // Proc. of the 15th World Congr. on Scient. Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin, August 1997. V. 1: Computational Mathematics. P. 193 - 196, *Ким А.В., Пименов В.Г.* О применении i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т.5. С. 104 126, *Пименов В.Г.* Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург. Из-во Урал. ун-та. 1998. 80 с.

[5] *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциальных разностных уравнений. М.: МАИ. 1992, 192 с.

предлагаются численные алгоритмы решения нелинейной краевой задачи для ФДУ второго порядка, основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей. Рассматриваются также численные методы решения краевых задач для линейной системы ФДУ.

Цель работы.

Основная цель данной работы состояла в разработке методов численного решения начальной и краевой задач для систем функционально-дифференциальных уравнений.

Требовалось построить и исследовать методы типа Рунге-Кутты для начальной задачи, разработать схемы численного решения систем ФДУ с автоматическим выбором шага и реализовать данные алгоритмы в виде пакета прикладных программ. Следующей целью являлось тестирование полученных схем на тестовых и модельных примерах.

Для решения краевой задачи систем с запаздыванием было необходимо разработать методы, являющиеся аналогами метода прогонки и метода стрельбы, исследовать условия сходимости полученных численных схем. Требовалось также получить алгоритмы для решения краевой задачи в случае систем линейных ФДУ.

Методы исследования.

Методы исследования существенно опираются на теорию численных методов решения дифференциальных уравнений. Используются также понятия и методы теории функционально-дифференциальных уравнений, функционального анализа и численного анализа.

Научная новизна.

Все существенные результаты работы являются новыми. Отметим основные из них.

В диссертации рассмотрены некоторые способы решения начальной задачи для ФДУ, основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей фазового вектора. Разработанные методы реализованы в виде пакета прикладных программ, который позволяет решать широкий класс задач моделирования систем с запаздыванием.

Для решения краевой задачи для систем с запаздыванием предложен метод прогонки и его модификация, изучен вопрос сходимости данных методов. Представлена методика решения краевой задачи для ФДУ на основе метода стрельбы.

Для численного решения краевой задачи линейных систем ФДУ рассмотрен метод суперпозиции, в том числе с ортогонализацией, выписаны формулы численного решения в случае систем с постоянными коэффициентами.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации могут быть применены для дальнейшей разработки численных методов решения ФДУ и исследования их свойств. С помощью предложенных в работе алгоритмов и созданного на их основе программного обеспечения (пакет программ TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX) могут быть численно изучены многие задачи моделирования реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, а также могут быть решены задачи управления и стабилизации таких объектов. Сконструированные численные схемы для решения краевых задач могут быть положены в основу пакета прикладных программ.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на

Всероссийских конференциях "Алгоритмический анализ некорректных задач" (Екатеринбург - 1998 и Екатеринбург - 2001);

Международных конференциях "Дифференциальные и интегральные уравнения" (Челябинск - 1999, Челябинск - 2002), "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара - 2002);

Международных конгрессах "Нелинейный динамический анализ" (Москва - 2002), "The Third European Congress of Mathematics" (Barcelona - 2000);

на других Российских и международных конференциях, на научных семинарах в Уральском государственного университете и в Институте математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1-12]. Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 158 наименований. В работе приведено 30 рисунков. Общий объем диссертации 103 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе 1 представлены алгоритмы численного решения начальной задачи для уравнений с последействием. Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0\,, \tag{2}$$

$$x_{t_0}(s) = y^0(s)\,,\ -\tau < s < 0\,. \tag{3}$$

Здесь переменная t, называемая временем, принадлежит отрезку $T = [t_0, t_0 + \theta]$, $\theta > 0$ – величина временного интервала; $x \in R^l$ - фазовый вектор, где R^l - l-мерное Евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$; отображение $f(t, x, y(\cdot))$: $[t_0, to + \theta]$ x R^l x $Q[-\tau, 0)$ $\to$ R^l, где $Q[-\tau, 0)$ – пространство l-мерных кусочно-непрерывных функций $y(\cdot)$ (непрерывных справа в точках разрыва) с нормой $\|y(\cdot)\|_Q = \sup\{\|y(s)\| : -\tau <$ в $< 0\}$, $y^0(s) \in Q[-\tau, 0)$; $x_t(\cdot) \equiv \{x(t+s), -\tau \le s < 0\} \in Q[-\tau, 0)$ - функция-предыстория, сложившаяся к моменту t.

Особенностью этой системы является то, что конечномерная и бесконечномерная составляющие фазового вектора отделены, в отличие от обычно рассматриваемых систем.

В разделе 1.1 приводятся основные теоретические положения о системе. На систему (1)-(3) накладываются условия (непрерывность по сдвигу и липшицевость по второму и третьему аргументам функционала правой части системы (1)), обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи.

В большинстве случаев найти аналитическое решение рассматриваемой системы не представляется возможным. Поэтому актуальной является задача о численном нахождении решения. Идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей позволяет строить методы, являющиеся аналогами методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо использовать соответствующую интерполяцию и экстраполяцию бесконечномерной составляющей.

В разделе 1.2 представлено общее описание явных методов типа Рунге-Кутты с равномерным шагом для функционально-дифференциальных уравнений.

Пусть на $[t_0, t_0 + \theta]$ задана временная сетка $t_n = t_0 + n\Delta$, $n = 0, 1, ..., N$, с равномерным шагом $\Delta = \theta/N$, где N - количество шагов.

Введем *дискретную численную модель* системы (1), обозначив приближение точного решения $x(t_n) = x_n$ в точке t_n через $u_n \in R^l$.

Дискретной предысторией модели в момент t_n назовем множество из $m + 1$ вектора:

$$\{u_i\}_n = \{u_i \in R^l,\ \ n - m \le i \le n\}.$$

Оператором *интерполирования* I дискретной предыстории модели назовем отображение $I : \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n]$.

Будем говорить, что оператор I *имеет порядок погрешности* p на точном решении $x(t)$, если существуют константы C_1, C_2 такие, что для всех $n = 0, 1, ..., N$ и $t \in [t_n - \tau, t_n]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \le C_1 \max_{i \ge 0, n-m \le i \le n} \|u_i - x_i\| + C_2\Delta^p. \tag{4}$$

Во многих методах необходимо в момент времени t_n знать значение модели в некоторой точке $t_n + a\Delta$, при $a > 0$, то есть произвести экстраполяцию модели на отрезок $[t_n, t_n + a\Delta]$.

Для любого $a > 0$ оператором *экстраполирования* E предыстории модели назовем отображение $E : \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n, t_n + a\Delta]$.

Будем говорить, что *экстраполяция предыстории модели имеет порядок погрешности* p на точном решении, если существуют константы C_3, C_4 такие, что для всех $a > 0$ и всех $n = 0, 1, ..., N - 1$ и $t \in [t_n, t_n + a\Delta]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \le C_3 \max_{n-m \le i \le n} \|u_i - x_i\| + C_4\Delta^p. \tag{5}$$

Для натурального k назовем k-этапным *явным методом типа Рунге-Кутты* - ЯРК (с интерполяцией I и экстраполяцией E) численную модель вида

$$u_0 = x_0, \tag{6}$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta \sum_{i=1}^{k} \sigma_i h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)),\ \ n = 0, ..., N - 1, \tag{7}$$

$$h_1(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)), \tag{8}$$

$$h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n + a_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}h_j(u_n, u_{t_n}(\cdot)), u_{t_n+a_i\Delta}(\cdot)). \tag{9}$$

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$u_t(s) = \begin{cases} y^0(t+s-t_0) \text{ при } t+s < t_0, \\ I(\{u_i\}_n) \text{ при } t_n - \tau \le t+s < t_n, \\ E(\{u_i\}_n) \text{ при } t_n \le t+s \le t_n + a\Delta, \end{cases} \qquad (10)$$

$$a = \max\{|a_i|, 1 \le i \le k\}.$$

Числа a_i, σ_i, b_{ij} называются *коэффициентами* метода.

В данной работе рассматривается интерполяция функциями, кусочно составленными из многочленов p-й степени, где p - произвольное натуральное число. Экстраполяция проводится продолжением интерполяционного многочлена p-й степени.

При этом, если точное решение $x(t)$ $p+1$ раз непрерывно дифференцируемо на отрезке $[t_0 - m, to + \theta]$, тогда оператор интерполяции вырожденными сплайнами p-го порядка имеет погрешность интерполяции р + 1, а оператор экстраполяции продолжением интерполяционного многочлена p-й степени имеет погрешность экстраполяции порядка $p+1$.

Приводится теорема о том, что порядок сходимости метода зависит от порядка интерполяции, экстраполяции и порядка невязки.

Автором данной диссертационной работы проведено исследование численной схемы при различных параметрах метода и различных способах интерполяции и экстраполяции. Результаты представлены в разделе 1.3.

Построена простейшая модель, имеющая первый порядок сходимости - метод Эйлера:

$$u_0 = x_0, \qquad (11)$$

$$u_{n+1} - u_n + \Delta f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)) \qquad (12)$$

с интерполяцией предыстории модели с помощью кусочно-постоянных функций (продолжение вправо):

$$u(t) = \begin{cases} u_i, \ t \in [t_i, t_{i+1}), \text{г} = 0, 1, ..., n, \\ y^0(t-t_0), \ t \in [t_0 - \tau, t_0), \end{cases} \qquad 13)$$

Исследуется порядок метод Эйлера с пересчетом

$$u_0 = x_0, \qquad (14)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta}{2}(f(t_n u_n, u_{t_n}(\cdot)) + f(t_n + \Delta, u_n + \Delta f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)), u_{t_n+\Delta}(\cdot))) \qquad (15)$$

при различных способах интерполяции и экстраполяции:

а) кусочно-постоянной интерполяции и экстраполяции предыстории;

б) интерполяции и экстраполяции ломаными;

в) интерполяции ломаными и экстраполяции по методу Эйлера.

Построены примеры методов более высокого порядка.

В разделе 1.4 представлены результаты проведенных автором численных экспериментов. Экспериментально подтверждается сходимость описанных в разделе 1.3 методов с постоянным шагом, для тестовых примеров с известным точным решением исследуется погрешность методов. Рассматриваются некоторые примеры, аналитическое решение которых неизвестно.

В таких случаях актуальным становится вопрос о практической оценке погрешности, который обсуждается в разделе 1.5. Для оценки погрешности можно использовать известные из теории численных методов метод Рунге и, так называемые, вложенные методы.

Пусть u_n - приближенное решение задачи (1) - (3), полученное методом (6) - (10) порядка p с некоторым шагом Δ, а w_n - приближенное решение, полученное тем же методом (6) -- (10), но с шагом 2Д. Тогда справедлива оценка

$$x_n - u_n \sim \frac{u_n - w_n}{2^p - 1}. \tag{16}$$

На практике данную оценку можно использовать, измельчая шаг в два раза до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\frac{||w_n - u_n||}{2^p - 1} \leq tol, \tag{17}$$

где tol - требуемая точность.

Недостаток данного метода состоит в том, что при увеличении количества точек разбиения увеличивается и количество вычислений правой части системы.

Для устранения этого эффекта можно использовать так называемые вложенные методы. Пусть u_n - приближение точного решения в точке t_n, полученное методом порядка p, а $\hat{u}_n$ - приближение, полученное методом порядка $p+1$. Тогда погрешность аппроксимации может быть хорошо приближена величиной $\hat{u}_n - u_n$ по крайней мере для достаточно малого Д. Эту оценку можно использовать как для контроля за величиной локальной погрешности, так и для выбора подходящего шага интегрирования. Для того, чтобы существенно сократить вычисления, используются так называемые вложенные методы, при которых метод p-го порядка получается как "побочный продукт" метода $p+1$-го порядка. В данном разделе представлен алгоритм автоматического выбора шага, и приведены примеры вложенных методов.

Глава 2 посвящена описанию пакета прикладных программ TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX и его применению в моделировании и исследовании систем с запаздыванием.

В разделе 2.1 описываются некоторые отличительные особенности системы MATLAB, описывается структура и назначение пакета.

Пакет TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX состоит из следующих частей:

- **Numerical algorithms** - алгоритмы численного решения систем с запаздыванием;
- **Time-domain analysis** - алгоритмы моделирования переходных процессов для линейных систем с запаздыванием;
- **Stability** - алгоритмы проверки устойчивости линейных систем с запаздыванием;
- **Control algorithms** - алгоритмы управления для систем с запаздыванием.

Главный раздел пакета **Numerical algorithms** реализован на базе вложенных методов Рунге-Кутты-Фельберга с автоматическим выбором шага и с добавлением процедуры интерполяции и экстраполяции.

В разделе 2.2 описываются параметры, необходимые для компьютерного моделирования нелинейных систем с запаздыванием общего вида (1)-(3), представлены предназначенные для этого программы, приведены примеры моделирования систем с запаздыванием различного вида.

Достаточно часто в инженерных задачах возникают линейные системы с запаздыванием. В пакете предусмотрено моделирование систем вида

$$\dot{x}(t) = A_0(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\,x(t-\tau_i(t)) + \int\limits_{-\tau_{k+1}(t)}^{0} F(t,s)\,x(t+s)\,ds + B(t) \quad (18)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0\,, \\ x(t_0+s) = y^0(s)\,,\ -\tau^* \le s < 0\,, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\tau^* = \max_{i\in\{1,\dots,k+1\}} \max_{t\in[t_0,t_f]} \{\tau_i(t) - (t - t_0)\}.$$

$A_0(t)$, $A_i(t)$ $(i = 1, \dots, \text{то})$ - матрицы размера n x n, элементами которых являются функции, зависящие от переменной t, $F(t, s)$ -матрица n x n, элементами которой являются функции двух переменных, $B(t)$ - вектор-функция n-ой размерности. Моделирование подобных и некоторых других систем описано в разделе 2.3.

Применение программ пакета продемонстрировано в разделе 2.4 на примере исследования колебаний токоприемника движущегося локомотива.

Рассматривается токоприемник локомотива, состоящий из полоза и рамы, соединенных между собой подъемной пружиной. Токоприемник проезжает по контактному проводу, который упруго закреплен в опорных точках. Возникает вопрос об устойчивости движения токоприемника при прохождении опоры.

Математическая модель данной конструкции была предложена группой ученых и инженеров Оксфордского университета [6]. Она представляет собой стационарную линейную систему четвертого порядка с запаздыванием, линейно зависящим от времени *t:*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Bu(\mu t): \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \mu < 1, \tag{20}$$

где коэффициенты матриц *A, B*, начального вектора u_0 и значение μ выражаются через параметры конструкции.

Решение данной задачи было получено с помощью программы **dde45lin** пакета TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX при подстановке в систему реальных параметров подвески, применяемой на железных дорогах Великобритании, и скорости движения локомотива v = 24 м/сек. В работе представлены графики, характеризующие вертикальные колебания токоприемника и силу нажатия токоприемника на контактный провод.

Программы пакета можно использовать также для решения некоторых задач управления системами, содержащими запаздывание в фазовых координатах или управляющих параметрах.

В разделе 2.5 рассматривается трехстепенный гироскоп в кардановом подвесе, применяемый для измерения углов поворота движущегося объекта [7]. Из-за вредных моментов гироскоп теряет свойство быть индика-

[6] *Ockendon J., Taylor A.* The dinamics of a current collection systen for an electric locomotive //Proc. Roy. Soc. London. Ser A., 322, 1971, p. 447–468.

[7] *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. М. Высшая школа. 1989. 264 с.

тором поворота летательного аппарата. Помехи можно нейтрализовать, установив управление при помощи двигателя. Задача состоит в приведении состояния гирорамы в положение, близкому к невозмущенному, при минимальном расходе ресурсов энергии двигателя, при этом на последнем отрезке времени *[в* - т, *в]* двигатель выключается, чтобы последействие в дальнейшем не отклоняло систему.

Математическая модель данной задачи выглядит следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2; \tag{21}$$

$$\dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{22}u(t - m); \tag{22}$$

$$\dot{x}_3 - a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u(t) \tag{23}$$

с отклоненными начальными данными

$$x_1(t_0) = x_1^0;\ x_2(t_0) = x_2^0;\ x_3(t_0) = x_3^0; \tag{24}$$

$$u_{t_0}(s) = v^0(s),\ -\tau \leq s < 0, \tag{25}$$

$$\min J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\theta-\tau} Ru^2(t)dt + q_1x_1^2(\theta) + q_2x_2^2(\theta) + q_3x_3^2(\theta), \tag{26}$$

$$u(t) = 0,\ \text{при } t \in [\theta - \tau, \theta]. \tag{27}$$

Данная система ФДУ была численно реализована при конкретных параметрах конструкции. В работе получены вид оптимального управления и значение функционала качества при выбранном управлении.

Глава 3 посвящена численным алгоритмам решения краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{28}$$

с краевыми условиями

$$x(a) = \alpha, \tag{29}$$

$$x(b) = \beta, \tag{30}$$

$$x_a(s) = \varphi(s),\ -\tau < s < 0. \tag{31}$$

Здесь $x \in R$; $t \in [o, b]$; $x_t(\cdot) - \{x(t+s),\ -\tau < s < 0\}$ - функция-предыстория, сложившаяся к моменту t.

Пусть $\varphi(\cdot)$ - непрерывно-дифференцируемая в области определения функция. Под решением задачи (28) - (31) будем понимать функцию $x(t)$, абсолютно-непрерывную на $[a,b]$ вместе со своей производной, при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющую уравнению (28), а также условиям (29) - (31). Будем предполагать, что решение этой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Пусть функционал $f(t,x,y(\cdot))$ определен и непрерывен по сдвигу на $[a,b]$ x R x $C[-\tau,0)$ и удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам с константами L и M соответственно.

В разделе 3.1 дана постановка задачи нахождения численного решения системы (28) - (31), описан метод прогонки, доказана теорема сходимости метода при определенных условиях.

Обозначим $u_i = u(t_i)$, $i = 0,...,N$ приближенное решение исходной задачи в в узлах t_i отрезка [a, Ъ].

Будем говорить, что численное приближение сходится при $N \to \infty$ к точному решению с порядком p, если найдется константа с, такая что

$$\max_{0 \le i \le N} |u_i - x_i| \le ch^p.$$

Заменив в уравнении (28) вторую производную разностным соотношением и используя операторы интерполяции и экстраполяции, получим систему уравнений

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = h^2 f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)), \quad i = 1,...,N-1, \tag{32}$$

$$u_0 = a, \quad u_N = \beta. \tag{33}$$

Система (32)-(33) является нелинейной. Для ее решения рассмотрим метод нелинейной прогонки. Запишем систему в матричном виде:

$$AU = B(U). \tag{34}$$

Для нахождения U будем строить последовательность $U^0. U^1, ..., U^j, ...$, где $U^j = \left(u_0^j,\ u_1^j,\ u_2^j,\ \dots,\ u_N^j\right)^T$. Пусть начальный вектор U^0 задан в виде линейного приближения:

$$u_i^0 = -\alpha \frac{t_i - t_N}{t_N - t_0} + \beta \frac{t_i - t_0}{t_N - t_0}, \quad i = 0,...,N.$$

Тогда вектор $U^j = \left(u_0^j,\ u_1^j,\ u_2^j,\ \dots,\ u_N^j\right)^T$ находится как решение системы

$$u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j = h^2 f(t_i, u_i^{j-1}, u_{t_i}^{j-1}(\cdot)), \quad i = 1,...,N-1, \tag{35}$$

$$u_0^j = \alpha, \quad u_N^j = \beta, \tag{36}$$

или в матричном виде

$$AU^j = B(U^{j-1}). \tag{37}$$

При фиксированном j система (37) является линейной с трехдиагональной структурой. Решение системы существует и единственно и может быть найдено методом прогонки. Прогоночные коэффициенты λ_i, μ_i находятся рекуррентно по формулам (прямая прогонка):

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{2-\lambda_i}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_{i+1} = \lambda_{i+1}(\mu_i - B_i^{j-1}), \quad \mu_1 = B_0^{j-1}, \tag{38}$$

а искомые значения u_i^j - по формулам обратной прогонки

$$u_{i-1}^j = \lambda_i u_i^j + \mu_i, \quad u_N = B_N^{j-1}. \tag{39}$$

Теорема 3.1. Если $(L + ML_I) < \frac{8}{(b-a)^2}$, то процесс (37) сходится к решению системы (34).

Теорема 3.2. Пусть решение задачи (34) существует и единственно; решение системы (28) - (31) имеет непрерывную четвертую производную и выполняется условие $L + 24M < \frac{8}{(b-a)^2}$. Тогда метод (34) имеет второй порядок сходимости.

В разделе 3.2 предлагается модификация метода прогонки.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение, содержащее в правой части линейную часть относительно $x(t)$

$$\ddot{x}(t) = p(t)x(t) + f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{40}$$

с краевыми условиями (29)- (31), где $p(t)$ - непрерывная функция, причем $p(t) > p > 0$ для $t \in [a, b]$. Уравнение (28) легко можно привести к виду (40) различными способами.

Заменив вторую производную в левой части разностным отношением и обозначив $p_i = p(t_i)$, получим следующую систему

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = p_i u_i + f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)) \quad i = 1, ..., N-1, \tag{41}$$

$$u_0 = a, \quad u_N = \beta, \tag{42}$$

или в матричном виде

$$\hat{A}U = B(U). \tag{43}$$

Система (43) является нелинейной. Для ее решения воспользуемся методом нелинейной прогонки: для нахождения U будем строить последовательность $U^0, U^1, ..., U^j, ...$ при помощи итерационного процесса

$$\hat{A}U^j = B(U^{j-1}). \tag{44}$$

При фиксированном j система (44) является линейной с трехдиагональной структурой с диагональным преобладанием.

Решение системы существует и единственно и может быть найдено методом прогонки. Прогоночные коэффициенты λ_i, μ_i находятся рекуррентно по формулам (прямая прогонка)

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{2 + p_i h^2 - \lambda_i}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_{i+1} = \lambda_{i+1}(\mu_i - B_i^{j-1}), \quad \mu_1 = B_0^{j-1}, \tag{45}$$

а искомые значения u_i^j - по формулам обратной прогонки

$$u_{i-1}^j = \lambda_i u_i^j + \mu_i, \quad u_N = B_N^{j-1}. \tag{46}$$

Теорема 3.3. Если $(L + ML_I) < p$, то процесс (44) сходится к решению системы (43). Метод (43) имеет второй порядок сходимости.

В разделе 3.3 предлагается методика решения краевой задачи для ФДУ методом стрельбы. При этом краевая задача (28)~(31) сводится к решению двух задача Коши для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка.

В разделе 3.4 приводятся примеры численного решения краевой задачи описанными методами. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие сходимость методов. Приводится пример, когда метод прогонки в первом варианте не сходится к точному решению, но при использовании модифицированного метода, когда в правой части выделяется линейное слагаемое, метод сходится.

Глава 4 посвящена разработке численных методов решения краевых задач для линейных систем ФДУ.

В разделе 4.1 приводится постановка задачи и рассматривается простейший способ решения, основанный на идее метода суперпозиции.

Дана система функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \int_{-\tau_0(t)}^{0} A(t,s)x(t+s)ds + f(t) \tag{47}$$

с краевыми условиями

$$x_i(a) = \alpha_i, \quad i = 1, ..., k \tag{48}$$

$$x_i(b) = \quad i = k+1, ..., n, \tag{49}$$

где $t \in [a, b]$, $x \in R^n$, величины запаздывания $\tau_j(t)$непрерывные на $[a, 6]$ функции, удовлетворяющие ограничениям $0 \le \tau_j(t) \le \tau$ для всех $j =$

$0, ..., m$; $A_j(t)$ при $j = 0, ..., m$ интегрируемы на $[a,b]$; $A(t,s)$ измерима на множестве $\{a \le t \le b, -\tau_0(t) \le s \le 0\}$, причем функция $\int\limits_{-\tau_0(t)}^{0} |A(t,s)|ds$ интегрируемана[a,ft].

Заданы также функциональные начальные условия

$$x_a(s) \equiv x(a+s) = \varphi(s), \quad -m \le s < 0. \tag{50}$$

Согласно принципу суперпозиции, решение данной задачи можно искать в виде

$$x(t) = z(t) + Z(t)c, \tag{51}$$

где $c \in R^n$, $z(t)$ - решение задачи неоднородной задачи (47) с функциональными условиями (50) и начальными условиями

$$z(a) = 0, \tag{52}$$

а $Z(t)$ - фундаментальная система решений однородной задачи, соответствующей (47), нормированная в точке a.

Функции $z(t)$ и $Z(t)$ можно находить численно, решая начальную задачу, например, с помощью пакета TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX или другими алгоритмами.

Коэффициенты вектора c определяются из системы

$$c_i = \alpha_i, \quad г = 1, ..., k, \tag{53}$$

$$z_i(b) + \sum_{j=1}^{n} Z_i^j(b)c_j = Д. \quad t = k+1, ..., п. \tag{54}$$

Данный метод не всегда применим, поскольку система для нахождения коэффициентов c_i может оказаться плохо обусловленной. Применяемые в обыкновенных дифференциальных уравнениях методы преодоления этой проблемы в большинстве сводятся к численному интегрированию в обратном времени [8] и для функционально-дифференциальных уравнений не приемлемы.

В разделе 4.2 предлагается метод ортогонализации, позволяющий решить эту проблему.

---

[8] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М. Наука. 1973. 632 с., *ХоллД., Уатт Д.*Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Мир. 1979. 312 с., *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1982. 287 с.

Выберем некоторый критерий "достаточной ортогональности" [9], например

$$\min_{i,j=1,\dots,n} \arccos\left(\frac{|Z^i(t)||Z^j(t)|}{||Z^i(t)||||Z^j(t)||}\right) < \alpha, \tag{55}$$

где a достаточно мало.

Если в некоторой точке $t = \hat{t}$ неравенство (55) нарушается, то матрица $Z(\hat{t})$ ортонормируется.

Для нахождения Z_* можно применить известную процедуру Грамма-Шмидта или QR-алгоритм, разлагающий матрицу в произведение двух множителей, один из которых имеет ортономированные столбцы, а другой - верхняя треугольная матрица. Для нахождения столбца w доказывается лемма: если

$$w_i =< z(\hat{t}), Z_*^i >, \tag{56}$$

где $< \cdot, \bullet >$ скалярное произведение в евклидовом пространстве R^n, тогда вектор $z_* = z(\hat{t}) - Z_* w$ ортогонален столбцам матрицы Z_*.

На отрезке $[\hat{t}, Ь]$ строится в виде комбинации

$$\hat{x}(t) = \hat{z}(t) + \hat{Z}(t)c^1. \tag{57}$$

Здесь $\hat{z}(t)$ удовлетворяет исходному уравнению с начальными условиями

$$\hat{z}_i(s) = z_i(s) + Z_i(s)c, \quad -\tau \le s < 0, \tag{58}$$

$$\hat{z}(\hat{t}) = z_*, \tag{59}$$

а столбцы матрицы $\hat{Z}(t)$ удовлетворяют однородной системе с нулевыми функциональными условиями и начальными условиями

$$\hat{Z}(\hat{t}) = Z_*. \tag{60}$$

Тогда вектора c и c^1 можно найти по формулам

$$c_i = \alpha_i, \quad г - 1, \dots, k \tag{61}$$

$$c = P[c^1 - w] \tag{62}$$

$$\hat{x}_i(b) = \hat{z}_i(b) + \sum_{j=1}^{n} \hat{Z}_i^j(b)c_j^1 = \text{ ft}, \quad i = k + 1, \dots, n. \tag{63}$$

Теорема 4.1. Если система (61)-(63) разрешима, то решение исходной задачи определяется формулой

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t), & a - \tau \le t \le \hat{t} \\ \hat{x}(t), & \hat{t} \le t \le b. \end{cases} \tag{64}$$

[9] *Conte S.D.* The numerical solution of linear boundary value problems. Siam Review, vol.8, 3, 1966, p.309–321

В разделе 4.3 выписаны явные выражения для нахождения с и c^1 в случае системы с постоянными запаздываниями на основе аналога формулы Коши для функционально-дифференциальных уравнений [10].

Описанные в главе 4 методы были реализованы в виде программ, с помощью которых были решены тестовые примеры.

В разделе 4.4 приведены результаты численных экспериментов. Приводится краевая задача для уравнения четвертого порядка, когда метод суперпозиции не приводит к достаточно точному решению. Данная задача решена методом ортогонализации.

Рассмотрена краевая задача для системы ФДУ с переменными коэффициентами, для решения которой используется метод ортогонализации.

Приводится пример краевой задачи для системы четвертого порядка с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Для данного тестового примера применим метод суперпозиции.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Гребенщиков Б.Г., Онегова О.В.* Асимптотические методы в исследованиях свойств устойчивости систем с линейным запаздыванием // Дифференциальные и интегральные уравнения. Тезисы докладов международной конференции. Челябинск. ЧГУ. 22 - 26 июня 1999. С. 36.

[2] *Гребенщиков Б.Г., Онегова О.В.* Исследование колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом в непосредственной близости от опоры // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. 18. (Математика и механика. Вып.3.) С.53–66.

[3] *Ким А.В., Кучина Е.П., Онегова О.В., Пименов В.Г., Прохоров В.В.* Пакеты программ для решения функционально-дифференциальных уравнений // Алгоритмический анализ некорректных задач. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова. 2-6 февраля 1998. Екатеринбург. С. 119–120.

[4] *Онегова О.В.* Некоторые методы численного решения краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений. // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. 22. (Математика и механика. Вып.4.) С.89–103.

[5] *Онегова О.В.* Численные методы с автоматическим выбором шага для функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тезисы докладов 30-й Региональной молодежной конференции. 1999.

[10] *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Applied theory of functional differential equations. Dordrecht - Boston - London. Kluwer Academic Pub. 1992. 236 p.

2 —

[6] *Онегова О. В.* Численное решение нелинейной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений. // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: Тезисы докладов международной научной конференции. 4-8 февраля 2002 г. Челябинск: Челяб.гос.ун-т. 2002. С. 76

[7] *Пименов В.Г., Онегова О.В.* О применении численных методов к решению задач управления системам с запаздыванием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Изд-во УрГУ. 2001.

[8] *Пименов В.Г., Онегова О.В.* Метод ортогонализации решения краевых задач для линейных систем ФДУ // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды двенадцатой межвузовской конференции. Самара. 2002. С.106–109.

[9] *Пименов В.Г., Онегова О.В.* Численное решение нелинейной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений // Нелинейный динамический анализ. Второй международный конгресс Тезисы докладов. М.: Изд-во МАИ. 2002. С.194.

[10] *Han S.H., Kim A.V., Kwon W.H., Lozhnikov A.B., Onegova O.V, Pimenov V.G.* Time-Delay System Toolbox // The Third European Congress of Mathematics. Barcelona. Yuly 10 - 14. 2000. P. 116.

[11] *Kwon W.H., Kim A.V., Pimenov V.G., Han S.H., Lozhmkov A.B., Onegova 0. V.* Time-Delay System Toolbox and its Applications // Proc. of Korean Automatic Control Conference. Pusan. October 1998. P. 147 - 150.

[12] *Kwon W.H., Kim A.V., Pimenov V.G., Lozhnikov A.B., Han S.H., Onegova O.V.* Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Beta Version. Seoul National University. Seoul. Korea. 1998. P. 114.

Подписано в печать 19.11.02. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,25. Заказ 323. Тираж 100.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ».
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.