на правах рукописи

РОЩУПКИН Алексей Васильевич

РЕШЕНИЕ ДВУХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КОШИ, ОПИСЫВАЮЩИХ СИЛЬНОЕ СЖАТИЕ ГАЗА

Специальность 01 01.02 -- дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2002

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре "Прикладная математика".

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор С.П. Баутин

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук А.Д. Зубов

— кандидат физико-математических наук М.Ф. Прохорова

Ведущая организация — Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск

Защита состоится "25" декабря 2002 г. в 15 ч. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических паук при Уральском государственном университете им А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, д. 51 , к. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "23" ноября 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета доктор физ.-мат. наук, доцент ________ В.Г. Пименов

0-734466

Диссертация посвящена исследованию двух начально-краевых задач для нелинейной системы уравнений с частными производными — системы уравнений газовой динамики. Решения этих начально-краевых задач описывают процессы безударного сильного сжатия двумерных и трехмерных объемов идеального политропного газа.

Актуальность темы. В задачах физики часто возникает необходимость сжатия газа до больших значений плотности, причем энергетически более выгодными являются процессы безударного сжатия. В частности, получение больших плотностей требуется при лазерном (инерционном) термоядерном синтезе. Для реализации реакций слияния ядер атомов требуется создать достаточно большое значение плотности исходного вещества. Считается, что математическое исследование сильного сжатия в рамках модели газовой динамики для идеального политропного газа позволит выявить основные закономерности и дать некоторые рекомендации для осуществления требуемых процессов.

При математическом описании процессов безударного сильного сжатия с помощью построения решений системы уравнений газовой динамики можно выделить два подхода:

1. Использование точных решений, полученных исходя из заранее указанных свойств этих решений: симметрия, автомодельность, линейность по части переменных и т.п. Только после построения этих решений под них подбираются начально-краевые задачи, имеющие содержательный газодинамический смысл.

2. Сначала ставятся нужные (с точки зрения газовой динамики) начально-краевые задачи для системы уравнений газовой динамики, а затем ищутся решения этих задач и анализируются свойства этих решений.

Исследования в рамках первого подхода привели к четырем точным решениям системы уравнений газовой динамики, описывающим процесс безударного сильного сжатия первоначально однородного и покоящегося газа:

1. Простая центрированная волна Б. Римана, описывающая сжатие одномерного плоско-симметричного слоя до бесконечной плотности (см., например, работы [13, 24]).

2. Автомодельные решения Л.И. Седова [19], интерпретированные на сжатие одномерных объемов газа со сферической или цилиндрической симметрией, например, в работах [14, 16].

3. Двумерное решение В.А. Сучкова [25], интерпретированное А.Ф. Сидоровым [21] на сжатие призмы при согласованных значениях показателя 7 и угла призмы.

4. Трехмерное решение А.Ф. Сидорова [20, 21], описывающее сжатие мно-

гогранника при согласованных значениях показателя 7 и двугранных углов.

В рамках первого подхода А.Ф. Сидоровым высказана гипотеза о возможности получения локальной кумуляции значений газодинамических параметров при безударном сжатии не одномерных объемов газа. Так, в работах А.Ф. Сидорова [21, 22, 23] описано построение процессов безударного сжатия газа, находящегося внутри призм, тетраэдров и конусообразных тел специальных форм с согласованными значениями показателя 7 и некоторого угла тела. Показано, что при безударном сильном сжатии газа в таких телах степень кумуляции выше, чем при сжатии цилиндрических или сферических объемов газа. К сожалению, отклонение угла тела от специального значения ведет к возникновению особенностей, связанных с пересечением характеристик одного семейства, и возникновению ударных волн, что показано в работах [3, 17].

Возможность получения таких газодинамических эффектов говорит о важности исследования именно не одномерных процессов безударного сильного сжатия газовых слоев.

Второй подход к решению задачи о безударном сильном сжатии был предложен в работе С.П. Баутина [3], где установлено, что течения, реализующие безударное сильное сжатие различных объемов газа, описываются решением соответствующих характеристических задач Коши (ХЗК).

В работе [3] показано, что для описания процессов безударного сжатия до бесконечной плотности необходимо для нелинейной системы уравнений с частными производными (системы уравнений газовой динамики) решать одну характеристическую задачу — задачу о получении вертикального распределения (ХЗК1). Здесь термин "вертикальное распределение" указывает на то, что в момент сильного сжатия график зависимости плотности от пространственной координаты переходит в вертикальную прямую. Получаемая волна сжатия в одномерном плоскосимметричном случае есть центрированная волна Римана. В случае одномерных цилиндрически и сферически симметричных течений, а также в двумерном и трехмерном случае эта волна есть соответствующее обобщение центрированной волны Римана. Указанная задача рассмотрена в работах [3, 6, 9, 10].

В работе [4], с использованием обобщения центрированной волны Римана, получены асимптотические законы движения одномерного непроницаемого поршня, обеспечивающего безударное сильное сжатие одномерных слоев идеального газа до бесконечной плотности. При помощи этих асимптотик установлено, что траектория одномерного сжимающего газ поршня, лежит в области сходимости рядов, решающих ХЗК1. Тем самым правомерность использования обобщения центрированной волны Римана для описания процессов безударного сжатия до любого значения плотности доказана лишь в случае одномерных течений.

Задача о безударном сильном сжатии слоев газа до конечной плотности решается состыковкой двух искомых течений через слабый разрыв. Первое течение — обобщение центрированной волны Римана — описывается решением задачи о получении вертикального распределения (ХЗК1) и непрерывно примыкает к заданному фоновому течению. Второе течение описывается решением другой характеристической задачи Коши — задами о получении наперед заданных распределений (ХЗК2). В работе [3] для случая одномерных течений в классе аналитических функций установлено существование и единственность решения второй задачи.

После построения решений этих двух характеристических задач Коши становится возможным ответить на вопрос: какое внешнее воздействие на газ осуществляет требуемое сжатие? В частности, возможно построение закона движения сжимающего непроницаемого поршня. Построение траектории движения поршня ведется в обратном направлении изменения времени до её прихода на характеристическую поверхность, разделяющую фоновое течение и решение ХЗК1.

Все доказанные теоремы существования решений задачи о безударном сильном сжатии газа носят локальный характер. Они не указывают конкретное значение массы газа, которую можно сжать безударно. Также не известно как реально скажется наперед заданное распределение плотности на траекторию сжимающего поршня, и будет ли при различных распределениях плотности в момент $t = t_*$ возможность физически реализовать требуемое воздействие. Решение этих вопросов в настоящее время возможно только численными методами.

Численное исследование безударного сильного сжатия проведено, например, в работах [12, 8, 1, 7, 18] (работы приведены в хронологическом порядке).

В работах [12, 8, 1] алгоритм расчета течений при безударном сильном сжатии основан па использовании известных точных решений. Следовательно, закон движения сжимающего поршня известен. Указанные алгоритмы лишь восстанавливают все возникающие течения. Их использование ограничено теми конфигурациями, для которых получены точные решения.

В работах [7, 18] предложен алгоритм построения течения и траектории сжимающего поршня для задачи безударного сильного сжатия одномерных газовых слоев в случае плоской, сферической и цилиндрической симметрии. Исходная задача рассматривается в пространстве физических переменных (две независимые переменные) и решается методом характеристик.

Исследования, представленные в данной диссертации, проведены в рамках второго подхода к рассмотрению процессов безударного сильного сжатия идеального газа.

Методы исследования.

В работе использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики, в частности, метод представления решения в виде степенных рядов. Также применяются численные методы решения уравнений с частными производными, в том числе решение характеристических задач Коши с помощью модификаций метода характеристик.

Цели работы.

1. Доказать существование и единственность локально аналитического решения у одной начально-краевой задачи — задачи о получении наперед заданных распределений при двумерном и трехмерном безударном сильном сжатии газа.

2. При анализе решений нелинейных дифференциальных уравнений установить асимптотическое поведение решения задачи о безударном сильном сжатии двумерных и трехмерных слоев газа до бесконечной плотности.

3. Численно решить начально-краевые задачи с целью построения полей течений газа и траектории поршня, реализующего требуемое сжатие двумерных газовых слоев.

Научная новизна работы.

1. Доказано существование и единственность решения специальных начально-краевых задач, в том числе показано, что задача о получении наперед заданных распределений в случае двумерных и трехмерных течений имеет единственное локально аналитическое решение.

2. Приведены новые асимптотические законы поведения поршня при безударном сильном сжатии двумерных и трехмерных слоев газа до бесконечной плотности.

3. Предложен и реализован численный алгоритм решения двумерных нестационарных начально-краевых задач, имеющих конкретную особенность. Этот алгоритм позволяет рассчитать течения, возникающие при безударном сильном сжатии газа в случае двумерных течений и указать закон движения поршня, реализующего требуемое сжатие. Проведены численные расчеты безударного сжатия двумерных слоев газа до плотности, в шесть раз превышающей исходную.

Теоретическая ценность работы заключается в установлении существования решения специальных начально-краевых задач.

Практическая ценность работы состоит в том, что построенные ряды и асимптотические приближения применимы к содержательным задачам газовой динамики. Предложенный численный алгоритм применим для расчетов задачи о безударном сильном сжатии двумерных слоев газа. Подтверждена гипотеза А.Ф. Сидорова о возможности локальной кумуляции в многомерных течениях, но пока только на уровне доказанных теорем о существовании ненулевой массы газа, при сжатии которой возможны подобные газодинамические эффекты.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на конференциях: VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001 г.), VI и VII Всероссийская школа-семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов в механики жидкости и газа, ", (САМГОП — 2000, Пермь, 2000 г. и САМГОП - 2002, Снежинск, 2002 г.), Международная конференция "VI Забабахинские научные чтения" (Снежинск, 2001 г.), Международная конференция "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика, RDAMM - 2001", (Новосибирск, 2001 г.), Конференция "Вычислительные технологии и математические модели в науке, технике и образовании", (ВТММ - 2000, Новосибирск, 2000 г., ВТММ — 2002, Алма-Ата. 2002 г.), Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы исследования и разработок но созданию силовых и энергетических установок 21 века" (Москва, 2000 г.), III Международная конференция "Симметрия и дифференциальные уравнения" (Красноярск, 2002 г.), 31, 32 и 33 региональная молодежная конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2000, 2001 и 2002 гг.), Межотраслевая научно-практическая конференция "Снежинск и наука" (Снежинск, 2000 г.). Всероссийская научно-практическая конференция "Фундаментальные и прикладные исследования транспорту — 2000" (Екатеринбург, 2000 г.), III научно-техническая конференция "Молодые ученые — транспорту" (Екатеринбург, 2001 г).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 16 работ (2 статьи в журналах [33, 36], 3 депонированных в ВИНИТИ статьи [26, 37, 38], остальные — труды, тезисы и аннотации конференций).

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, двух глав, четырех параграфов, заключения, приложения (12 страниц) и списка литературы. Объем диссертации составляет 122 страницы машинописного текста, включая 9 рисунков и 51 библиографическую ссылку.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дается общая постановка задачи о безударном сильном сжатии газа. Так, с точки зрения газовой динамики, задачу о безударном сильном сжатии газа можно поставить следующим образом.

Пусть задан некоторый объем газа с плотностью $p = \rho_0$. Это состояние газа в дальнейшем будем называть фоновым течением. В момент времени $t = t_0$ *в* фоновое течение плавно вдвигается непроницаемый поршень. При этом в фоновом течении возникает волна сжатия, непрерывно примыкающая к нему через звуковую характеристику $C_0^{\pm}$. Требуется построить такой закон движения поршня, чтобы в момент времени $t = t_* >$ to сжатый газ, во-первых, имел наперед заданное распределение плотности $p - \rho_* > \rho_0$, в том числе бесконечное, во-вторых, во все моменты времени $t <$ t« непрерывно примыкал через звуковую характеристику $C_0^{\pm}$ *к* фоновому течению. Все возникающие течения должны отделяться друг от друга слабыми разрывами, но не ударными волнами.

Указана связь этой задачи с характеристическими задачами Коши для нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными — системы уравнений газовой динамики.

Для описания течения, реализующего безударное сильное сжатие до бесконечной плотности, решается задача о получении вертикального распределения — ХЗК1. Данные Коши этой задачи ставятся на характеристике $C_0^{\pm}$, отделяющей фоновое течение и искомую волну сжатия, и являются значениями параметров газа фонового течения на ней. Добавляя к данным Коши условие "вертикального распределения" в момент $t = t_*$ на поверхности C_*, становится возможным однозначно построить искомую волну сжатия.

Для описания течений, реализующих безударное сильное сжатие газа до любой наперед заданной плотности, требуется через звуковую характеристику состыковывать два решения. Первое решение — решение задачи ХЗК1. Второе решение — решение задачи о получении наперед заданных распределений (ХЗК2). Здесь под термином "наперед заданное распределение" понимается, что в момент сильного сжатия $t = t_*$ задано требуемое распределение плотности $p = \rho_* (\vec{x})$. После решения ХЗК1 на характеристике $C_1^{\pm}$, отделяющей обобщение центрированной волны Римана от искомого течения, ставятся данные Коши для второй задачи. Эти данные есть значения газодинамических параметров первого течения на характеристике $C_1^{\pm}$. Добавляя к данным Коши дополнительное условие о том, что в момент сильного сжатия $t =$ t* значение плотности газа есть $p - \rho_* (\vec{x})$, однозначно определяется как характеристика $C_1^{\pm}$, так и вся искомая волна сжатия.

Также во введении делается обзор современного состояния исследуемой проблемы.

В первой главе с помощью аналитических методов теории дифференциальных уравнений и математической физики рассмотрена конкретная характеристическая задача Коши, приводящая к задаче безударного сильного сжатия газа.

Глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе устанавливаются асимптотические законы поведения решения задачи о безударном сильном сжатии газа до бесконечной плотности для двумерных и трехмерных течений.

Запишем решение задачи о получении вертикального распределения в виде следующего степенного ряда

$$\vec{U}\left(t, c, \vec{\xi}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \vec{U}_l\left(c, \vec{\xi}\right)(t - t_*)^l / l!, \qquad (1)$$

где c — скорость звука, с $= as$ в случае общих пространственных течений, и c — a — в случае, когда газ фонового течения - однородный покой с s = 1, а = $\rho^{(\gamma-1)/2}$, p — плотность, 7 — константа в уравнении состояния политропного газа p — $A^2(S)\rho^\gamma/\gamma\gamma > 1$, p — давление, S — энтропия, s — $A(S)$, U — $\left(\sigma, \vec{V}, s\right)$— неизвестные газодинамические параметры, V - вектор скорости газа, вектор $\vec{\xi}$ = (£1) — в случае двумерных течений, ξ = (ξ_1, ξ_2) — в случае трехмерных течений, ξ_1 и ξ_2 — пространственные координаты, связанные с геометрией поверхности C_*.

Как установлено С.П. Баутиным и С.Л. Дерябиным, область сходимости ряда (1) при $a \to +\infty$ есть

$$\sigma|t - t_*|^{1/\beta} < M(\xi), \ M(\xi) > 0, \beta = \begin{cases} \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}, & 1 < \gamma < 3, \\ 1, & 7 > 3. \end{cases} \qquad (2)$$

Для определения закона внешнего воздействия определяется $c_p\left(t, \vec{\xi}\right)$ - значение скорости звука на сжимающем поршне. В этом случае закон движения поршня в направлении нормали будет задаваться соотношением

$$\eta_p\left(t, \vec{\xi}\right) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l\left(c, \vec{\xi}\right)(t - t_*)^l / l!\right]\Bigg|_{c = c_p\left(t, \vec{\xi}\right)}.$$

Поскольку поршень непроницаемый, то на нем выполнено равенство

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial c_p} \cdot \frac{\partial c_p}{\partial t} = u\left(t, c_p, \vec{\xi}\right) - \frac{\partial \eta_p}{\partial t}.$$

Делая замену т $= t_* - t$, получаем уравнение для определения функции c_p

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial c_p} \cdot \frac{\partial c_p}{\partial \tau} = -\left[u\left(t, c_p, \vec{\xi}\right) + \frac{\partial \eta_p}{\partial \tau}\right]. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением, в которое вектор $\vec{\xi}$ входит как параметр.

Ограничиваясь только первыми коэффициентами рядов (1) для u и η, ранее полученными другими авторами, решения уравнения (3) построены для четырех промежутков значения γ: 1) $1 < 7 < 5/3$, 2) $7 = 5/3$, 3) $7 > 5/3, \gamma \neq 3$, 4) $7 = 3$, а именно

$$1)\quad c_p \sim A\tau^{\chi} \mp \frac{1}{2}k\frac{(\gamma^2-1)}{(\gamma-3)(3\gamma-5)}A^{\alpha}\tau^{1/2} +$$

$$+\frac{k^2}{8}\cdot\frac{\gamma+3}{\gamma-1}\left[\frac{(\gamma^2-1)}{(\gamma-3)(3\gamma-5)}\right]^2 A^{2\alpha-1}\tau^{1-\chi}+\ldots$$

$$2)\quad c_p \sim A\tau^{-1/4} \mp \frac{1}{8}kA^2\ln(\tau)\tau^{1/2} \pm \frac{1}{2}kA^2\left[\ln(A) - \frac{1}{3}\right]\tau^{1/2} +$$

$$+k^2A^3\left[\frac{25}{576}+\frac{43}{96}\ln(A)+\frac{7}{8}\ln^2(A)\right]\tau^{5/4} -$$

$$-k^2A^3\left[\frac{5}{128}+\frac{7}{16}\ln(A)\right]\ln(\tau)\tau^{5/4}+\frac{7}{12c}kA^3\ln^2(\tau)\tau^{5/4}+\ldots$$

$$3)\quad c_p \sim A\tau^{\chi} \pm 2k\frac{\gamma-2}{3\gamma-5}A^2\tau^{2\chi+1}+6k^2\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{(3\gamma-5)^2}A^3\tau^{3\chi+2}+\ldots$$

$$4)\quad c_p \sim A\tau^{-1/2} \pm \frac{k}{2}A^2+\frac{k^2}{8}A^3\tau^{1/2}-\frac{k^4}{128}A^5\tau^{3/2}+\ldots,$$

где под многоточием понимаются слагаемые большего порядка малости, чем последние из приведенных; А $= A(\xi_1, \xi_2)$— функция, появившаяся в результате интегрирования и определяемая начальными данными; $k — -1/r(\xi_1)$ - в случае двумерных течений и $k = k_1(\xi_1, \xi_2) + k_2(\xi_1, £2)$ — в случае трехмерных течений, $r(\xi_1)$ - радиус кривизны кривой C_*, $k_1(\xi_1, \xi_2)$, $k_2(\xi_1, \xi_2)$ — главные кривизны поверхности C_*, $\alpha = 0.5\ (\gamma+1)/(\gamma-1)$, $x — -(\gamma-1)/(\gamma+1)$.

Очевидно, что кривые, описываемые данными формулами, при т $\to 0$ лежат в области сходимости (2) рядов (3).

Во втором параграфе рассматривается задача о получении наперед заданного распределения (ХЗК2), непрерывно примыкающего к фоновому течению.

Для двумерного и трехмерного случая доказывается

ТЕОРЕМА. *Пусть* n *— размерность пространства* ($n = 2$ *в случае дву-*

мерных течений, $n = 3$ в случае трехмерных течений), вектор $\vec{\xi} = (\xi_1)$ *в случае двумерных течений,* $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ *в случае трехмерных течений,* $(\eta, \vec{\xi})$ *— криволинейные координаты, связанные с геометрией поверхности* C_*, $\varphi = \eta - \psi(t, \vec{\xi})$ *— звуковая характеристика фонового течения* $\vec{U}_0(\varphi, t, \vec{\xi})$, *и пусть для системы уравнений газовой динамики в переменных* $(\varphi, \vec{\xi})$

$$A_0\vec{U}_\varphi + A_1\vec{U}_t + \sum_{i=1}^{n-1} A_{i+1}\vec{U}_{\xi_i} = \vec{O} \tag{4}$$

заданы: 1) начальные данные

$$\vec{U}\left(\varphi, t, \vec{\xi}\right)\Big|_{\varphi=0} = \vec{U}_\infty\left(t, \vec{\xi}\right) \tag{5}$$

и 2) краевое условие

$$\sigma\left(\varphi, t, \vec{\xi}\right)\Big|_{t=t_*} = \sigma_*\left(\varphi, \vec{\xi}\right), \tag{6}$$

непрерывно согласованные между собой, т. е.

$$\sigma_\infty\left(t, \vec{\xi}\right)\Big|_{t=t_*} = \sigma_*\left(\varphi, \vec{\xi}\right)\Big|_{\varphi=0}$$

***Если начальные** данные* (5) *есть значения фонового течения* $\vec{U}_0\left(\varphi, t, \vec{\xi}\right)$ *на звуковой характеристике,*

$$\vec{U}_\infty\left(t, \vec{\xi}\right) = \vec{U}_0\left(\varphi, t, \vec{\xi}\right)\Big|_{\varphi=0}$$

и все входные данные задачи (4)-(6) *являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки* $\left(t = t_*, \varphi = 0, \vec{\xi} = \vec{\xi}^{0}\right)$, *то решение этой задачи существует, единственно и является аналитическим в некоторой окрестности указанной точки.*

Для доказательства теоремы поставленная задача сводится к характеристической задаче Коши стандартного вида, для которой С. П. Баутиным ранее уже доказана теорема существования и единственности локально аналитического решения (аналог теоремы Ковалевской [3]). Процесс сведения к стандартному виду состоит в нахождении двух специальных невырожденных матриц перехода T_1 и T_2 таких, что матрицы $T_1A_0T_1$, $T_1A_1T_1$ и вектор $T_2^{-1}\vec{U}$ имеют требуемый в аналоге теоремы Ковалевской вид.

В двумерном случае указанные матрицы имеют следующий вид (для трехмерного случая здесь матрицы не приводятся ввиду их громоздкости):

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma-1}{2}\sigma_{oo} & A_1(\eta,\xi)\frac{\gamma-1}{2}\psi_\xi\sigma_{oo} & \Delta_{oo} \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\gamma-1}s_{oo}^2\sigma_{oo} \\ 0 & 0 & 1 & A_1(\eta,\xi)\frac{2}{\gamma-1}\psi_\xi s_{oo}^2\sigma_{oo} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_{oo} \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_{oo} = \left[u - \frac{\partial\psi}{\partial t} - A_1(\eta,\xi)v\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]\Big|_{\varphi=0} \neq 0, \ \xi = \xi_1,$$

A_1 - известная функция.

Если фоновое течение $\vec{U}_o$ — решение задачи о получении вертикального распределения (задача ХЗК1), то состыковка течений, описываемых решением задач ХЗК1 и ХЗК2, через слабый разрыв (звуковая характеристика первого течения $\varphi = 0$) описывает процесс безударного сжатия до любой наперед заданной величины σ_*, связанной с наперед заданной плотностью ρ_* известным соотношением.

Глава вторая содержит численное исследование безударного сильного сжатия двумерных газовых слоев.

Глава состоит из двух параграфов.

В третьем параграфе описывается алгоритм численного построения траектории поршня, реализующего безударное сжатие начально покоящегося газа до плотности, больше начальной.

В работах С.П. Баутина и Ю.В. Николаева рассматривается применение метода характеристик для расчетов безударного сильного сжатия одномерных газовых слоев. Используя идеологию одномерных расчетов, предлагается следующий алгоритм.

Система уравнений газовой динамики, описывающая изэнтропические течения политропного газа, после ряда эквивалентных преобразований может быть приведена к виду

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{dR}{dt}\right|_{\tilde{C}^+} = A_1 v R_\xi - \dfrac{\gamma-1}{4}(R-L)v_\xi - A_2\left(v^2 - \dfrac{\gamma-1}{8}\left[R^2 - L^2\right]\right), \\
\left.\dfrac{dL}{dt}\right|_{\tilde{C}^-} = A_1 v L_\xi - \dfrac{\gamma-1}{4}(R-L)v_\xi - A_2\left(v^2 + \dfrac{\gamma-1}{8}\left[R^2 - L^2\right]\right), \\
\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{\tilde{C}^0} = -A_1 v v_\xi + \dfrac{\gamma-1}{8}A_1(R-L)(R_\xi - L_\xi) + A_2 v\left[\dfrac{R+L}{2}\right],
\end{cases}
$$

где $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_C$ — производная вдоль кривой C, новые неизвестные функции Я и L определяются из соотношений

$$R = u(t,\eta,\xi) + \frac{2}{\gamma-1}\sigma(t,\eta,\xi),\ L = u(t,\eta,\xi) - \frac{2}{\gamma-1}\sigma(t,\eta,\xi),$$

кривые $\tilde{C}^+$, $\tilde{C}^-$ и $\tilde{C}^0$, лежащие в плоскости ξ = const, удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{C}^+:\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\gamma+1}{4}R - \frac{\gamma-3}{4}L,\ \tilde{C}^-:\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{7+1}{4}L - \frac{\gamma-3}{4}R,$$

$$\tilde{C}^0:\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{R+L}{2}.$$

Разбивая отрезок $[\Xi_1, \Xi_2]$ — область определения кривой C», в окрестности которой требуется получить заданное распределение плотности, точками $\xi_k = \Xi_1 + k\Delta\xi$, $\Delta\xi = (\Xi_2 - \Xi_1)/N$, решение будем строить в каждой плоскости £ $= \xi_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Дополнительно предполагается симметрия искомого течения при $\xi = \xi_0$, то есть

$$\left.\frac{\partial \vec{U}}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0} \equiv \vec{0}.$$

Формулы для расчета течения в плоскостях $\xi = \xi_k$ получаются аналогично формулам для расчета одномерного сильного сжатия с учетом кривой $\tilde{C}^0$ — для расчета неизвестной функции v, и расчета частных производных по ξ из правых частей системы. Эти производные вычисляются с применением уже построенного в плоскости $\xi = \xi_{k-1}$ течения.

Выход с кривой, на которой в момент $t = t_*$ возникает определенная особенность, производится с помощью указанных выше кривых $\tilde{C}^-$ и $\tilde{C}^+$ (в зависимости от того как происходит сжатие: изнутри или снаружи). Такой выход из особенности возможен так как известна зависимость между u и a в момент сильного сжатия — ряды (1) при $t - t_*$.

После построения течения во всех плоскостях £ $= \xi_k$ строится траектория сжимающего поршня. Поверхность поршня строится от некоторой кривой, определяемой по массе газа, которую требуется безударно сжать, и значению конечной плотности $p = \rho_*$, до её прихода на характеристику $C_0^{\pm}$. Эта кривая есть положение сжимающего поршня в момент сильного сжатия.

В четвертом параграфе приводятся результаты расчетов для случая сжатия газовых слоев изнутри.

Для проверки правильности работы алгоритма проведены расчеты одномерного сильного сжатия цилиндрически симметричных слоев газа. Результаты сравнивались с расчетами по методу, предложенному С.П. Баутиным и Ю.В Николаевым. Показано совпадение результатов в пределах точности каждого из алгоритмов.

Отметим, что приведенные в этом параграфе расчеты выполнены для небол ших степеней сжатия ($\rho_* - 6.89$ при $\gamma - 1.7$), что обусловлено долгим временем работы алгоритма и большими требованиями к физическим параметрам ЭВМ. Но следует отметить. что полученные скачки плотности все же больше, чем при сжатии газа бесконечно сильной ударной волной.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

1. С использованием ранее полученных другими авторами решений установлены асимптотические законы поведения зависимости скорости звука от времени на сжимающем поршне, реализующем безударное сильное сжатие многомерных слоев газа до бесконечной плотности.

2. Показано, что при временах, близких к моменту сильного сжатия, траектория поршня лежит в области сходимости рядов, являющихся решением первой характеристической задачи — задачи о получении вертикального распределения.

3. Анализ полученных асимптотических законов позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, полученные асимптотики еще раз подтверждают известный вывод о легко (при малых 7) и трудно (при больших 7) сжимаемых средах.

Во-вторых, дополнительные внешние энергетические затраты, связанные с переходом от сжатия плоских слоев к сжатию многомерных слоев, при $1 < \gamma < 3$ конечны.

4. Для случая двумерных и трехмерных течений доказано существование локально аналитического решения второй характеристической задачи — задачи о получении наперед заданных распределений параметров газа.

Доказанный результат говорит о том, что в окрестности поверхности сильного сжатия С» финальное распределение плотности можно брать непостоянным. В частности, можно взять распределение, описывающее локальную кумуляцию плотности. Тогда существует ненулевая масса газа фонового течения, которую можно безударно сжать в слой с таким распределением.

5. Предложен численный алгоритм построения совместного решения этих двух характеристических задач Коши. Данный алгоритм позволяет строить течения, возникающие при безударном сжатии газовых слоев, а также траекторию сжимающего поршня, реализующего требуемое сжатие.

6. Проведены расчеты процессов безударного сильного сжатия до p_* = 6.89. С точки зрения сжатия, требуемого для термоядерного синтеза (10^3 — 10^4), представленные расчеты имеют предварительный характер. Тем не менее они показывают, что предложенный алгоритм, принципиально отличающийся от всех алгоритмов прямого расчета (когда требуется знание закона движения сжимающего поршня), работает,

Поскольку для получения асимптотических законов безударного сильного сжатия многомерных слоев, а также для построения решения ХЗК2 использовано решение ХЗК1, то в **приложении** приведена постановка задачи о получении вертикального распределения, сё решение в виде ряда и формулы для коэффициентов этого ряда, ранее полученные в работах [6, 9, 10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Анучин М.Г.* Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // Прикладная механика и техническая физика. - 1998, т. 39, № 4, с. 25-32.

[2] *Баутин С.П.* Аналитические решения задачи о движении поршня // Численные методы механики сплошной среды. — 1973, т. 4, № 1, с. 3-15.

[3] *Баутин С.П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. — Новосибирск: Наука, 1997.

[4] *Баутин С.П.* Асимптотические законы безударного сильного сжатия квазиодномерных слоев газа // Прикладная математика и механика. — 1999, т. 63, вып. 3, с. 415-423.

[5] *Баутин С.П.* О задаче получения наперед заданных распределений параметров газа // Прикладная математика и механика. — 1999, т. 63, вып. 6, с. 938-946.

[6] *Баутин С.П., Дерябин С.Л.* Двумерное истечение в вакуум // Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983, с. 3-15.

[7] *Баутин С.П., Николаев Ю.В.* Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычислительные технологии. — 2000, т. 5, № 4, с. 3-12.

[8] *Бронина Т.Н.* Численные расчеты движения поршня при безударном сжатии конуса с идеальным газом // Вычислительные технологии. — 1996, т. 1, № 2, с. 47-56.

[9] *Дерябин С.Л.* Трехмерное истечение в вакуум из состояния покоя // Численные методы механики сплошной среды — 1983, т. 14, № 4, с. 58-73.

[10] *Дерябин С.Л.* Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Нестационарные проблемы механики сплошных сред — 1984, вып. 65, с. 56-74. 1957, с. 77-88.

[11] *Жуков В. Т., ЗабродинА.В., Феодоритова О.Б.* Схема решения нестационарного двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью на подвижных криволинейных сетках. — Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1991, № 18.

[12] *Жуков В.Т., Забродин А.В., Имшенник В.С., Феодоритова О.Б.* Численное моделирование мишени тяжелоионного термоядерного синтеза в приближении теплопроводной газодинамики. — Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1993, № 41.

[13] *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. — М. Наука, 1988.

[14] *Забабахин И.Е., Симоненко В.А.* Сферическая центрированная волна сжатия // Прикладная математика и механика. — 1978, т. 42, вып. 3, с. 573-576.

[15] *Зубов Е.Н., Сидоров А.Ф.* О решении одной краевой задачи для неустановившегося течения газа и распространение слабых ударных волн // Численные методы механики сплошной среды. — 1972, т. 3, № 3, с. 32-50.

[16] *Каждан Я.М.* К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1977, № 1, с. 23-30.

[17] *Кукушкин В.А.* О двумерном взаимодействии волн сжатия Римана // Прикладная математика и механика. — 1999, т. 63, вып. 3, с. 431-443.

[18] *Николаев Ю. В.* О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычислительные технологии. — 2001, т. 6, № 2? с. 104-109.

[19] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981.

[20] *Сидоров А.Ф.* Два точных решения уравнений гидродинамики типа тройной волны // Прикладная математика и механика. — 1964, т. 28, вып. 6, с. 1139-1142.

[21] *Сидоров А. Ф.* Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // Доклады АН СССР. - 1991, т. 318, № 3, с. 548-552.

[22] *Сидоров А.Ф.* Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Доклады АН СССР. - 1993, т. 329, № 4, с. 444-448.

[23] *Сидоров А.Ф.* Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев // Доклады Академии наук. - 1990, т. 313, № 2, с. 283-287.

[24] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. — М: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1955.

[25] *Сучков В.А.* Истечение в вакуум на косой стенке // Прикладная математика и механика. — 1963, т. 27, вып. 4, с. 739-740.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(в хронологическом порядке)

[26] *Баутин С.П., Рощупкин А.В.* Алгоритм расчета безударного сильного сжатия двумерных газовых слоев. Екатеринбург: УрГУПС, 2000, Деп. в ВИНИТИ от 24.10.2000 за № 2699-ВОО, 50 с.

[27] *Баутин С.П., Рощупкин А.В.* Об одном подходе к расчету двумерного сильного сжатия газа // Тезисы межотраслевой научно-практической конференции “Снежинск и наука". Снежинск: Российский Федеральный Ядерный Центр — Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики, 2000, с. 90-91.

[28] *Рощупкин А.В.* Об одном подходе к расчету сильного сжатия двумерных слоев газа // Тезисы Всероссийской конференции молодых ученых "Проблемы исследования и разработок по созданию силовых и энергетических установок 21 века". Москва: Центральный Институт Авиационного Моторостроения, 2000, с. 33.

[29] *Рощупкин А.В.* Безударное сильное сжатие газа в двумерном нестационарном случае // Труды 31 региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: Институт Математики и Механики УрО РАН, 2000, с. 60-61.

[30] *Рощупкин А.В.* Об одном алгоритме расчета двумерного безударного сжатия газа // Тезисы конференции "Вычислительные технологии — 2000". Новосибирск: Институт Вычислительных Технологий СО РАН, 2000, электронная публикация www.ict.nsc.ru/ws/ct-2000.

[31] *Рощупкин А.В.* Применение метода характеристик для расчета двумерного безударного сильного сжатия газа // Труды Всероссийской научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования - транспорту - 2000". Екатеринбург: УрГУПС, 2000, ч. 2, с. 430.

[32] *Баутин С.П., Бердников А.Е., Николаев Ю.В., Рощупкин А.В., Чернышов Ю.Ю., Ягупов С.А.* Новые результаты в математической теории безударного сильного сжатия газа // Аннотации докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001, с. 82.

[33] *Николаев Ю.В., Рощупкин А.В.* Расчеты сильного безударного сжатия газовых слоев // Вычислительные технологии, 2001, т. 6, Спец. выпуск. Труды Международной конференции RDAMM-2001, с. 464-466.

[34] *Рощупкин А.В.* Примеры расчетов сильного сжатия двумерных слоев газа // Тезисы международной конференции "VI Забабахинские научные чтения". Снежинск: Российский Федеральный Ядерный Центр -- Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики, 2001, с. 21.

[35] *Рощупкин А.В.* Расчеты двумерного сильного сжатия идеального газа // Труды 32 региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: Институт Математики и Механики УрО РАН, 2001, с. 155-156.

[36] *Рощупкин А.В.* Исследование некоторых характеристических задач коши, возникающих при решении не одномерных задач безударного сильного сжатия газа // Вычислительные технологии, 2002, т. 7, Вестник КазНУ, 2002, № 4(32), совместный выпуск, ч. 4, с, 96-103.

[37] *Рощупкин А.В.* Трехмерные нестационарные задачи о получении наперед заданных распределений параметров течения идеального газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2002, Деп. в ВИНИТИ от 24.06.2002 за № 1174-В2002, 21 с.

[38] *Рощупкин А.В.* Асимптотические законы безударного сильного сжатия многомерных слоев газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2002, Деп. в ВИНИТИ от 10.07.2002 за № 1281-В2002, 44 с.

[39] *Рощупкин А.В.* Уточненные асимптотические законы безударного сильного сжатия многомерных слоев газа // Труды III Международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения". Красноярск: Институт Вычислительного Моделирования СО РАН, 2002, с. 198-201.

[40] *Рощупкин А.В.* Численно-аналитическое моделирование двумерного безударного сильного сжатия газа // Тезисы VII Всероссийской школы-семинара "Аналитические методы и оптимизация процессов в механики жидкости и газа" (САМГОП — 2002), Снежинск: Российский Федеральный Ядерный Центр — Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики, 2002, с. 52.

[41] *Рощупкин А.В.* Об одном подходе к численному решению задачи безударного сильного сжатия на регулярных сетках // Труды 33 региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: Институт Математики и Механики Ур() РАН, 2002, с. 171-172.