На правах рукописи

ОСЬМИНИНА НАТАЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата **физико-математических** наук

Казань – 2003

Работа выполнена на кафедре алгебры Пензенского государственного университета имени В. Г. Белинского.

Научный руководитель: кандидат физ.-мат. наук,
профессор А. Я. Султанов.

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук,
профессор С. Е. Степанов,
доктор физ.-мат. наук,
профессор В. В. Шурыгин.

Ведущая организация: Московский государственный университет.

Защита состоится 24 апреля 2003 года в 12. 30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете (420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан « 17 » марта 2003 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Малахальцев М. А.

М.А. Мал

0-734429

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: Геометрия касательного расслоения над дифференцируемым многообразием M_n является одним из интенсивно развивающихся разделов теории расслоенных пространств. Впервые расслоения p'-струй высших порядков, к числу которых принадлежат касательные расслоения высших порядков, были введены С. Эресманом[1,2]. Позже А. Вейлем[3] было замечено, что эти расслоения могут быть включены в общую теорию расслоения «близких точек» над локальными алгебрами. Использование локальной алгебры позволяет строить лифты тензорных полей и связностей с базового многообразия в расслоение Вейля. Такие построения были приведены в работах Моримото, Коларжа и других ученых. Результаты исследований по расслоениям Вейля над локальными алгебрами были описаны в монографии Коларжа, Михора, Словака[4].

Интенсивное изучение касательных расслоений началось в конце 50-х годов прошлого столетия. Эти исследования были в основном посвящены касательным расслоениям первого порядка. Так в 1958 г. вышла в свет работа Ш. Сасаки[5], где он определил в касательном расслоении метрику, названную в последствии его именем, рассмотрел ряд вопросов, связанных с изометриями в касательном расслоении с введенной метрикой,

1. Ehresmann C Les prolongements d'une variete differentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal. // C. R Acad. Sci. — 1951. - № 11. — P.598 — 600.
2. Ehresmann C. Les prolongements d'une variete differentiable. II. L`espace des jets d`ordre r de V* dans V^n. // C. R. Acad. Sci. — 1951. — № 15. — P.777 — 779.
3. Weil Andre. Theorie des points proches sur les varietes differentiables. Collog. Intern. Du centre national de la recherche sci 52 — Geom. Different. — Strasbourg, 1953. — P. 111— 117.
4. Kolar I., Michor P., Slovak J. Natural operation in differential geometry // Springer — Verlad, 1993.
5. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I //Tohoku Math. J — 1958.—V.10.—№ 3.—P 338—354.

ввел предварительные понятия вертикального и полного лифтов векторных и ковекторных полей с базисного многообразия в его касательное расслоение.

Дальнейшее развитие теория касательных расслоений получила в работах К. Яно , А. Леджер , Ш. Кобаяси , Ш. Исихара, где была построена и изучена линейная связность в касательном расслоении, полный, вертикальный и горизонтальный лифты векторных и тензорных полей в касательном расслоении.

Геометрии касательных расслоений 1-го порядка посвящены работы отечественных ученых А.П. Широкова, Н.В. Талантовой, В.Л. Спесивых, В.В. Шурыгина, Б.Н. Шапукова и их учеников. Значительный вклад в эту область внесен Ф.И. Каганом.

Моримото А.[6] подробно изложил идеи А. Вейля применительно к лифтам тензорных полей и связностей в расслоения «близких точек». Им же рассмотрены на касательном расслоении $T^r(M_n)$ порядка r некоторые классические структуры: почти комплексная, симплектическая, псевдориманова. Построены продолжения тензорных полей и связностей с многообразия M_n на его касательные расслоения $T(M_n)$, $T^2(M_n)$, обобщая их на случай касательного расслоения $T^r(M_n)$ порядка r.

В. В. Вагнером[7] была установлена связь локальных алгебр и их групп автоморфизмов с теорией касательных пространств высших порядков и дифференциально-геометрических объектов высших порядков.

К. Яно. Ш. Исихара[8] подвели итоги развития геометрии касательных и

6, Morimoto Akihiko. Prolongations of connections to infinitely near points. // J. Different. Geom - 1976. — V. 11. — № 4. — P.479—498.

7. Вагнер В. В Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — Вып. 10. — МГУ, 1956. — С. 31—88.

8. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles; differential geometry // New York, Dekker, 1973.

кокасательных расслоений до 1973 года, в частности, изучали продолжения тензорных полей, связностей и G-структур в касательное расслоение высшего порядка.

С. Ишикава[9] получил результаты об инфинитезимальных изометриях и аффинных коллинеациях в касательных расслоениях 2-го порядка $T^2(M_n)$, где M_n - риманово многообразие или многообразие аффинной связности.

Расслоение p-скоростей для построения нелинейной p-связности, ассоциированной с системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка использовали Л. Е. Евтушик[10] и В. В. Третьяков[11].

А. П. Широковым[12] были обнаружены структуры многообразий над алгебрами на касательных расслоениях и расслоениях А-близких точек в смысле А. Вейля, что позволило упростить построение лифтов тензорных полей и линейных связностей с базовых многообразий на указанные расслоения.

В. В. Вишневским[13,14] были введены полукасательные расслоения k-го

9, Ishikawa Susumu. The infinitesimal automorphisms on the tangent bundles of order 2 // Rend. Accad. naz.XL — 1973—1974 (1975). - V 24—25.— P.265—274.

10 Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР Проблемы геометрии. — Т. 9. — Москва, 1979 - 247 С.

11. Третьяков В. Б. Нелинейные m^p-связности в пространствах m- протяжений высших порядков // Всес. конф по совр. проблемам геометрии Тезисы докладов. — Минск, 1979. — С.200.

12 Широков А. П. Замечания о структурах в касательных расслоениях // Труды геометрического семинара. — Т. 5. — Москва, 1974. — С. 311—318.

13 Вишневский В. В. Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. — Т 20. — Москва, 1988. — С. 35—75

14. Вишневский В. В Лифты дифференциально-геометрических структур в полукасательные расслоения высших порядков // Изв вузов Математика. — 1995. — №5. — С. 16—24.

порядка, обобщающее понятие касательного расслоения порядка k и изучались структуры многообразий над алгебрами плюральных чисел, возникающие на этих расслоениях.

Изучению различных структур касательных расслоений посвящена монография А. П. Широкова, В. В. Вишневского, В. В. Шурыгина «Пространства над алгебрами»[15].

Теория касательных расслоений высших порядков развивалась в различных направлениях. Так, был указан подход к теории связностей высших порядков с помощью цепочки последовательных касательных расслоений исходного многообразия[16]; было показано, что расслоение касательных векторов порядка г можно рассматривать как расслоение, ассоциированное с главным расслоением r-струй диффеоморфизмов[17]; касательное расслоение второго порядка рассматривалось как новое расслоенное пространство с базой $T(M_n)$; изучалась гармоничность касательных расслоений r-го порядка и исследовались вопросы о гармоничности индуцированных отображений касательных расслоений"; рассматривалась структура естественных операторов в смысле Коларжа, применительно к случаю касательного расслоения второго порядка[19]; излагалась теория касательных расслоений высшего порядка, рассматривая

15. Широков АЛ, Вишневский ВВ., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами // Казань, 1985.

16 Рахула М. О Инфинитезимальная связность в расслоении // Итоги науки и техн. ВИНИТИ Проблемы геометрии. — Т. 8. — Москва, 1977 — С.163 — 183

17. Bowman R H. Tangent bundles of higher order // Tensor. — 1988. — № 1. — P. 97— 100.

18 .Vazguez-Abal Maria Elena. Harmanicity on the tangent bundle of order r // C.r. Acad Sci. Ser. — 1991.—№ 1.—P.131—136.

19. Doupovec Miroslav. Natural operators transforming vector fields to the second order tangent bundle // Cas. pestov. mat. — 1990— - № 1. — P. 64—72.

свойства натуральных атласов этих пространств[20]; изучалось кручение связности касательного расслоения порядка r[21]; было обобщено понятие связности Грифона на касательном расслоении второго порядка[22].

Теория расслоений находит применение в геометрии, теории дифференциальных уравнений, анализе, теории групп. Актуальность работы в этом направлении диктуется как самой логикой развития дифференциальной геометрии, так и многочисленными приложениями теории расслоенных пространств.

Значительное место в изучении геометрии касательных расслоений занимает вопрос об инфинитезимальных преобразованиях касательных расслоений над дифференцируемым многообразием с заданной связностью, к этой теме и относится настоящая диссертация.

Основная цель работы. Нахождение канонического разложения произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ с синектической связностью ∇^* и необходимых и достаточных условий существования этого преобразования.

20. Garler W., Kawaguchi Mannigfaltigkeiten und Tangential bundle hoherer Ordnung Monatsber D tech. Akad. Wiss: Berlin, 1986. — V. 10. — № 6. — P.393—404.

21 Kures Miroslav Torsions of connections on tangent bundles of higher order // Rend Circ. mat. Palermo, 1998 — № 54. — P.65—73.

22 Andres Luis C. de, Leon Manuel de, Rodrigues Paulo R. Connections on tangent bundles of higher order // Demonstr. Math. — 1989. — №3. — P.607—632.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту.

1. Построены лифты с дифференцируемого многообразия в касательное расслоение второго порядка:

   А) (a)-горизонтальные лифты векторных и ковекторных полей;

   Б) γ -лифты 1 -форм.

   Построены тензорные произведения введенных лифтов.

   Найдены коммутаторы некоторых типов векторных полей, полученных с помощью этих лифтов.

2. Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ с синектической связностью ∇^* в смысле А.П. Широкова. В качестве следствия, выяснено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ со связностью полного лифта ∇^C. Найдены необходимые и достаточные условия, накладываемые на компоненты тензоров, входящих в данные разложения. Доказано, что полученные разложения единственны и все компоненты разложений существенны.

3. Показано, что не все векторные поля, входящие в разложение инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$ являются проектируемыми.

4. Вычислены коммутаторы различных лифтов тензорных полей с базы M_n в $T^2(M_n)$, входящих в каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.

5. Получена оценка размерности алгебры Ли $\widetilde{L}$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.

6. Найдено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования $(T^2(M_n),\nabla^*)$ над проективно-евклидовыми пространствами M_n. Как следствие, сформулирована теорема о каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования $(T^2(M_n),\nabla^C)$ в случае проективно-евклидовой базы M_n.
7. Доказано, что каждое инфинитезимальное аффинное преобразование пространства $(T^2(M_n),\nabla^*)$ над проективно-евклидовым пространством ненулевой кривизны является проектируемым.
8. Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^*)$ над максимально подвижными пространствами ненулевой кривизны. В частности, выяснено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования $(T^2(M_n),\nabla^C)$ в случае максимально подвижной базы M_n. Установлена максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.
9. Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального проективного преобразования касательного расслоение второго порядка $T^2(M_n)$ со связностью полного лифта ∇^C.

Метод исследований. Исследования проводятся в тензорной форме, локально. Функции, тензорные поля предполагаются гладкими класса C^∞. В работе используются обозначения, введенные К. Яно. Ш. Исихара[23].

23. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles; differential geometry // New York, Dekker, 1973

Теоретическое значение. Результаты диссертации имеют теоретический характер и являются продолжением исследований, проводившихся при изучении инфинитезимальных преобразований касательного расслоения первого и второго порядков. Они могут быть использованы для дальнейшего развития теории расслоений второго, а так же высших порядков, для чтения спецкурсов и проведения спецсеминаров со студентами и аспирантами.

Апробация работы: Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на геометрических семинарах в Пензенском государственном педагогическом университете им. В.Г. Белинского (1996-2003 гг.), на Международной научной конференции, посвященной 40-летию мехмата КГУ (Казань, 3 октября 2000 г.), на геометрическом семинаре кафедры Геометрии КГУ (Казань, март 2002 г; октябрь 2002 г.), на Международной научной конференции (Пенза, октябрь 2002 г.), на молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения - 2002» (ноябрь 2002 г.).

Структура и объём диссертации: Диссертационная работа изложена на 111 страницах и состоит из введения, четырех глав, содержащих десять параграфов и списка литературы. Нумерация параграфов сквозная.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит краткий литературный обзор и обоснование темы диссертации, краткое содержание работы.

Первая глава (§1-§5) является вводной и содержит необходимые для дальнейшего изложения сведения.

В §1 приводится определение касательного расслоения $T^2(M_n)$ над дифференцируемым многообразием M_n, рассматривается закон преобразования индуцированных координат на T^2 (M_n).

В §2 приведены определения лифтов функций, векторных и ковекторных нолей, введенные К. Яно, Ш. Исихара[24]. Строятся (а)-горизонтальные лифты векторных и ковекторных полей, 7 -лифты линейных форм с M_n в $T^{`}(M_n)$. Построены их тензорные произведения.

В §3 вычислены коммутаторы некоторых типов векторных полей на $T^2(M_n)$, приведенных в §2, необходимые для исследования инфинитезимальных преобразований.

Действию продолжений тензорных полей, заданных на M_n, до векторных полей на $T^2(M_n)$ на функции специального вида посвящен §4.

В §5 дается определение синектического ∇^* (в смысле А.П. Широкова) и полного ∇^C лифтов линейной связности ∇ с M_n на $T^2(M_n)$, приводятся локальные компоненты связности ∇^* и компоненты тензора кривизны в натуральном репере.

Вторая глава (§6, §7) посвящена изучению инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения второго порядка $T\ (M_n)$ с синектической связностью ∇^*.

В §6, из уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований, найдено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^*)$. Получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на тензорные поля, участвующие в этом разложении. Здесь же доказано, что полученное разложение единственно. Показано, что каждое слагаемое в разложении существенно.

В качестве следствия, в §7 приведено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования.

24. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles; differential geometry // New York, Dekker, 1973

касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта. Далее изучено строение алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.

Получена оценка размерности этой алгебры. В заключении параграфа вычислены коммутаторы векторных полей, входящих в каноническое разложение произвольных инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.

Результаты этих вычислений приведены в виде таблицы.

Третья глава (§8, §9) посвящена изучению инфинитезимальных аффинных преобразований специальных классов пространств $(T^2(M_n),\nabla^*)$.

В §8 изучаются инфинитезимальные аффинные преобразования пространств $(T^2(M_n),\nabla^*)$ над проективно-евклидовым пространством (M_n,∇). Принимая во внимание строение тензора кривизны проективно-евклидова пространства и, полученные ранее результаты, найдено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования изучаемого пространства.

Как следствие, сформулирована теорема о каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$ в случае проективно-евклидовой базы (M_n,∇).

Показано, что каждое инфинитезимальное аффинное преобразование пространства $(T^2(M_n),\nabla^*)$ над проективно-евклидовым пространством ненулевой кривизны является проектируемым.

В §9 решается задача, аналогичная задаче предыдущего параграфа только для случая, если база расслоения (M_n,∇) - есть максимально подвижное пространство, то есть такое пространство, которое среди неплоских пространств имеет группу движений максимальной размерности. В качестве частного случая формулируется теорема о каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка над максимально подвижным пространством со связностью полного лифта. Установлена максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований этих пространств.

Четвертая глава (§10) посвящена инфинитезимальным проективным преобразованиям касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ со связностью полного лифта ∇^C.

В последнем параграфе получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального проективного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$.

Работы автора по теме диссертации

1. Секачева Н.А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Математика и информатика: Межвузовский сборник научных трудов.– Пенза: ПГПУ, 1996.— С.24– 26.
2. Осьминина Н.А. Об алгебре Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов.— Пенза: ПГПУ, 1999.— С. 102— 106.
3. Осьминина Н.А. О некоторых лифтах касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов. Пенза: ПГПУ, 1999.— С.107— 120.

4.Осьминина Н.А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального проективного преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов.— Пенза: ПГПУ , 2000 — С. 178— 181.

5.Осьминина Н.А. Инфинитезимальные аффинные преобразования $(T^2(M_n),\nabla^C)$ над максимально подвижными пространствами// Тр. Мат. Центра им. Н И. Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики/ Материалы Международной научной конференции. — Казань: УНИПРЕСС, 2000.— С.171.

6.Осьминина Н.А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^2(M_n),\nabla^C)$ в случае максимально подвижной базы// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский тематический сборник научных трудов.-- Калининград: КГУ, 2001.— С.122.

7.Осьминина Н. А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ с синектической связностью $\nabla^*(\nabla,\underset{1}{H},\underset{2}{H})$ // Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов. — Пенза: ПГПУ, 2002.— С. 176 — 181.

8.Осьминина Н.А. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ с синектической связностью $\nabla^*(\nabla,\underset{1}{H},\underset{2}{H})$ над проективно-евклидовым пространством// Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов. — Пенза: ПГПУ, 2002.— С. 173— 176.

9.Осьминина Н.А. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка $T^2(M_n)$ с синектической связностью V" над максимально подвижным пространством// Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов. — Пенза: ПГПУ, 2002. — С. 181 — 182.