КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.938

на правах рукописи

Глухова Наталья Александровна

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа Рязанского государственного педагогического университета имени С.А. Есенина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор М.Т. Терехин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.В. Малышев; кандидат физико-математических наук В.П. Кузнецов

Ведущая организация: Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

Защита состоится 8 октября 2003 г. в 15 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д.17, ауд.324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “ ” августа 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертационной работе изучаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие управление. Создание математической теории управления обязано трудам Л.С. Понтрягина, Р. Калмана, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова, Р. Беллмана. Значительный вклад в развитие теории внесен В.Г. Болтянским, Р.В. Гамкрелидзе, А.Б. Куржанским, Р.Ф. Габасовым, Ф.М. Кирилловой, Е.Л. Тонковым.

Хотя математические постановки задач управления стимулировались практическими потребностями, классические их варианты были рассчитаны на идеальные условия, а именно, на существование безупречной по строгости математической модели системы и на полную априорную информацию об исходных данных. Однако далеко не каждая прикладная задача укладывается в подобные рамки.

Весьма распространенной при исследовании математической модели является ситуация, когда начальные данные о неизвестных параметрах системы минимальны: соответствующая информация ограничивается заданием лишь допустимых областей изменения неизвестных величин. Изучение ситуаций, характеризующихся указанными информационными ограничениями, приводит к теории управления в условиях неопределенности. Такие задачи носят весьма общий характер.

Впервые подобная задача была поставлена А.Б. Куржанским, который рассматривал системы дифференциальных уравнений, линейные как по фазовой переменной, так и по программному управлению. В процессе решения он пришел к специальному классу задач математического программирования при выпуклых операторных ограничениях. Операторные линейные уравнения, задающие эти ограничения, содержали набор неопределенных параметров, а оптимум выпуклой функции понимался в смысле критерия минимакса. А.Б. Куржанским получены необходимое условие минимума, которому удовлетворяет оптимальное управление, и достаточные условия оптимальности. В исследованиях применялся аппарат выпуклого анализа, в частности, конструкции, вытекающие из теории двойственности.

В настоящей работе для управляемых систем ставится задача управления в условиях неопределенности. Целью исследования является поиск среди допустимых программных управлений оптимального, являющегося таковым для всех движений рассматриваемой системы.

В работе исследуются системы с известным видом общего решения. Операторные ограничения задаются принадлежностью постоянного вектора некоторому выпуклому ограниченному компактному множеству. Под критерием качества понимается достаточно гладкая функция, которая может не быть выпуклой. Рассматриваются также нелинейные системы с одним известным решением, для которых указывается положение оптимального управления в окрестности нулевого. Полученные условия оптимальности позволяют для многих задач привести аналитическое решение.

Если вопрос об оптимальном управлении для линейных систем изучен достаточно хорошо, то для нелинейных систем эта проблема до сих пор является одной из самых трудных и малоразрешенных. Применение на практике большинства известных результатов представляет значительную сложность, поэтому в диссертационной работе внимание уделяется получению условий оптимальности, непосредственная проверка которых была бы более простой.

Большинство результатов в работе предусматривает возможность численной проверки, что обусловлено растущей мощностью вычислительной техники и совершенствованием компьютерных программ.

Изложенные факты позволяют считать тему диссертации актуальной.

Цель работы. Целью исследования является получение необходимых и достаточных условий оптимальности управления для систем (линейных и нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях неопределенности, причем оптимальное управление должно являться таковым для всех решений рассматриваемой системы.

Методика исследования. Допустимые управления $u(\cdot)$ отыскиваются в виде $u(t)=K(t)c$, где $K(t)$ – матрица ограниченных измеримых известных функций, c – неизвестный постоянный вектор, значения которого принадлежат выпуклому компактному множеству C.

Исследования опираются на свойства коэффициентов в разложении функций по формуле Тейлора в окрестности исследуемого на оптимальность управления в случае, когда известно общее решение рассматриваемой системы, или в окрестности заданного движения, если общее решение системы неизвестно.

Если для системы определен вид общего решения, необходимые и достаточные условия оптимальности управления формулируются в терминах разрешимости систем недифференциальных уравнений и неравенств.

Если известно только одно решение системы, то задача решается на сужении исходного множества C. Доказательства теорем о существовании управлений, удовлетворяющих необходимому условию оптимальности, основаны на применении метода неподвижной точки.

Научная новизна. В диссертации найдены новые необходимые и достаточные условия оптимальности управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии неопределенности по начальным значениям, использующие вид коэффициентов в разложении функций по формуле Тейлора. Приведены различные достаточные условия оптимальности, учитывающие свойства исходной системы и оптимизируемого критерия качества. В случае неизвестного вида решения управляемой системы сформулированы условия, позволяющие судить о том, будет ли оптимальное управление граничной или внутренней точкой множества допустимых управлений. Предложен способ построения множества, для которого оптимальное управление гарантировано будет граничной точкой. Условия оптимальности, приведенные в диссертационной работе, справедливы как для линейных, так и для некоторых нелинейных систем.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в работе результаты являются новыми, имеют практический и теоретический интерес. Они могут быть использованы для аналитического решения задачи оптимального управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях неопределенности. Для систем с одним известным решением построенная теория позволяет найти оптимальное управление численными методами. Полученные результаты применяются при исследовании конкретных систем дифференциальных уравнений – моделей процессов, происходящих в природных и физических системах.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Необходимые и достаточные условия оптимальности управления в условиях неопределенности.

2. Условия, при которых оптимальными могут быть только граничные точки множества допустимых управлений, критерий оптимальности в этом случае.

3. Условия, при которых управления, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности, находятся внутри множества и оценка их положения.

Апробация диссертации. Основные результаты докладывались на заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом университете, на IV, V, VII Всероссийских научно-технических конференциях студентов, молодых ученых и специалистов “Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании” в Рязанской государственной радиотехнической академии, на V Международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” в г.Саранске, на III Всероссийской научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики” в г.Туле, на X Международной конференции “Математика. Компьютер. Образование.” в г.Пущино.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в пятнадцати работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы (7 параграфов), заключения, приложения и списка литературы, включающего 106 наименований. Работа изложена на 117 страницах машинописного текста.

Содержание работы

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, обзор работ по ее тематике, краткое описание методики исследования и содержания работы.

Первая глава посвящена исследованию управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известен общий вид решения.

В первом параграфе первой главы доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности управления для внутренних точек n-мерной области допустимых параметров управления. Исследование оптимальности управления выполнено с помощью разложения по формуле Тейлора заданного функционала качества, являющегося функцией многомерной переменной. Необходимое и достаточное условия оптимальности связаны со свойствами коэффициентов этого разложения.

Рассматривается n-мерная система

$$\dot{x} = f(t,x,u), \tag{1.1}$$

где $f(t,x,u)$ – n-мерная вектор-функция, $x \in R^n$ – фазовая переменная, $u \in R^p$ – управляющее воздействие, $p \le n$, $t \in [t_0;T]$. Пусть C – ограниченное замкнутое выпуклое множество в пространстве R^n. Допустимые управления $u(\cdot)$ являются программными и определяются равенствами $u(t) = K(t)c$, где $K(t)$ – $p \times n$-матрица ограниченных измеримых известных функций, $c \in C$ – неизвестный постоянный вектор. Обозначим $U(\cdot)$ – класс допустимых управлений. Так как множество значений управления $u(t)$ ограничено, то существует выпуклый компакт $U \subset R^p$, такой, что $u(t) \in U$ при $t \in [t_0;T]$.

Предположим, что функция $f(t,x,u)$, определенная на множестве $\Omega = [t_0;T] \times \Gamma \times U$, где Γ открыто в R^n, такова, что при любом $u(\cdot) \in U(\cdot)$ для любого $x^0 \in \Gamma$ существует единственное решение системы (1.1) $x = x(t; x^0, u(\cdot))$, определенное на отрезке $[t_0;T]$ и удовлетворяющее начальному условию $x^0 = x(t_0; x^0, u(\cdot))$.

Будем считать, что начальное состояние системы неизвестно заранее и задано лишь ограничение на допустимые значения этой величины, а именно, условие $x^0 \in X^0$, где X^0 – заданное выпуклое компактное множество в R^n. Тогда в каждый момент времени t определено множество $X(t;u(\cdot)) = \{x \mid x = x(t; x^0, u(\cdot)), x^0 \in X^0\}$. Учитывая, что $u(t) = K(t)c$, множеству $X(t;u(\cdot))$ поставим в соответствие множество $X(t;c) = \{x \mid x = x(t; x^0, c), x^0 \in X^0\}$.

Будем считать, что для всех $c \in C$ и всех $x^0 \in X^0$ решения системы (1.1) определены на всем отрезке $[t_0;T]$, непрерывно зависят от начальных данных и параметра и имеют частные производные по начальным данным и параметру до третьего порядка включительно.

Определим множество $H\left(u^0(\cdot)\right)$ вариаций управления $u^0(\cdot)\in U(\cdot)$ равенством $H\left(u^0(\cdot)\right)=\left\{h(\cdot)\,|\,h(t)=u(t)-u^0(t), t\in[t_0;T], u(\cdot)\in U(\cdot)\right\}$. Ему соответствует множество $H\left(c^0\right)=\left\{h\,|\,h=c-c^0, c\in C\right\}$, где $u^0(t)=K(t)c^0$, $u(t)=K(t)c$.

Предположим, что $\varphi=\varphi(x)$ – функция в R^n, имеющая частные производные по всем координатам вектора x до третьего порядка включительно и принимающая конечные значения. Определим функционал $\Phi(\cdot)$ на множестве $U(\cdot)$ равенством $\Phi(u(\cdot))=\max\limits_x \varphi(x)$, $x\in X(T;u(\cdot))$. Ему соответствует функция $\Phi(c)=\max\limits_x \varphi(x)$, $x\in X(T;c)$, определенная на множестве C.

Ставится задача: в классе функций $U(\cdot)$ найти оптимальное управление $u^0(\cdot)$, удовлетворяющее условию $\Phi\left(u^0(\cdot)\right)=\min\limits_{u(\cdot)}\max\limits_x \varphi(x)$, $u(\cdot)\in U(\cdot)$, $x\in X(T;u(\cdot))$, или же во множестве C найти такое c^0, что $\Phi\left(c^0\right)=\min\limits_c \max\limits_{x^0}\left(\varphi\left(x\left(T;x^0,c\right)\right)\right)$, $c\in C$, $x^0\in X^0$. Управление, удовлетворяющее этому минимаксному равенству, позволяет минимизировать функцию $\Phi(c)$ на всем ансамбле траекторий системы (1.1).

Пусть $\lambda\in[0;1]$. Дадим вектору $c^0\in C$ приращение λh, такое, что $c^0+\lambda h\in C$. Разложим по формуле Тейлора функцию $\varphi\left(x\left(T;x^0,c\right)\right)$ в окрестности точки c^0, получим

$$\varphi\left(x\left(T;x^0,c^0+\lambda h\right)\right)=\varphi\left(x\left(T;x^0,c^0\right)\right)+D\left(T;x^0,c^0\right)\lambda h+o\left(|\lambda h|\right), \tag{1.2}$$

где $D\left(T;x^0,c^0\right)$ – n-мерный вектор из производных функции φ по c.

Теорема 1.1. (Необходимое условие оптимальности) Пусть $c^0\in\operatorname{int}C$. Тогда для того, чтобы точка c^0 доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо, чтобы для любого направления $h\in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ выполнялось условие $\max\limits_{x^0\in X^0}\left(D\left(T;x^0,c^0\right)h\right)\geq 0$.

Замечание. Теорема 1.1 справедлива и в случае, когда точка c^0 является граничной точкой множества C, так как при доказательстве теоремы не использовались свойства внутренних точек множества.

Следствие 1.1. Для того, чтобы точка $c^0\in\operatorname{int}C$ доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо, чтобы для любого $h\in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ существовал вектор $x^*\in X^0$, такой, что $D\left(T;x^*,c^0\right)h=0$.

Следствие 1.2. Если уравнение $D\left(T;x^0,c\right)=0$ имеет решение $\left(x^*,c^0\right)\in X^0\times\operatorname{int}C$, то в точке c^0 выполнено необходимое условие оптимальности управления.

Разложим по формуле Тейлора функцию $\varphi\left(x\left(T;x^0,c\right)\right)$ в окрестности точки c^0, получим

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\left(T;x^0,c^0+\lambda h\right)\right)=\varphi\left(x\left(T;x^0,c^0\right)\right)+D\left(T;x^0,c^0\right)\lambda h+\\+\frac{1}{2}\lambda^2 N\left(T;x^0,c^0,h\right)+o\left(|\lambda h|^2\right),\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $N(T;x^0,c^0,h)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 x_i}{\partial c_k\partial c_m}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial c_m}\right)h_k h_m$.

Пусть $\sigma(x^0)$ – некоторая функция, определенная на множестве X^0. Обозначим $X^*(\sigma(x^0))=\{x^* \mid x^*\in X^0, \forall x^0\in X^0\ \ \sigma(x^*)\ge\sigma(x^0)\}$. Поскольку требуется найти локальный минимум функции $\Phi(c)$ на множестве $\operatorname{int} C$, то в дальнейшем вместо множества $H(c^0)$ будем рассматривать некоторую окрестность нуля множества вариаций управления c^0 $\tilde{H}(c^0)\subset H(c^0)$.

Будем говорить, что для функции $\varphi(x(T;x^0,c^0))$ по направлению $h\in\tilde{H}(c^0)\setminus\{0\}$ выполнено

условие (А), если существует вектор $x^*\in X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))$, такой, что $D(T;x^*,c^0)h=0$ и $N(T;x^*,c^0,h)>0$;

условие (Б), если существует вектор $x^*\in X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))$, такой, что $D(T;x^*,c^0)h>0$.

Теорема 1.2. Пусть $c^0\in\operatorname{int} C$ и существует множество $\tilde{\tilde{H}}(c^0)\subset\tilde{H}(c^0)\setminus\{0\}$, такое, что для любого $h\in\tilde{\tilde{H}}(c^0)$ выполнено одно из условий (А) или (Б), а для каждого $h\in\tilde{H}(c^0)\setminus\left(\{0\}\cup\tilde{\tilde{H}}(c^0)\right)$ при любом $\lambda\in[0;1]$ справедливо неравенство $\Phi(c^0+\lambda h)\ge\Phi(c^0)$, тогда точка c^0 доставляет минимум функции $\Phi(c)$.

Во втором параграфе первой главы на оптимизируемый критерий качества налагаются дополнительные ограничения, которые позволяют сформулировать условия оптимальности, более удобные для практического применения в некоторых частных случаях.

Лемма 1.4. Пусть при некоторых значениях векторов $c^0\in C$ и $h\in H(c^0)\setminus\{0\}$ множество $X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))\cap X^*(D(T;x^0,c^0)h)$ не пусто. Тогда производная по направлению h функции $\Phi(c)$ в точке c^0 существует и определяется равенством

$$\frac{d\Phi}{dh}=\max_{x^0\in X^0}\left(D(T;x^0,c^0)h\right).$$

Теорема 1.5. Пусть $c^0\in\operatorname{int} C$, для любого вектора $h\in H(c^0)\setminus\{0\}$ множество $X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))\cap X^*(D(T;x^0,c^0)h)$ не пусто и выполнено равенство $\left.\frac{d\Phi}{dh}\right|_{c^0}=-\left.\frac{d\Phi}{d(-h)}\right|_{c^0}$. Тогда для того, чтобы значение c^0 минимизировало функцию $\Phi(c)$, необходимо, чтобы для любого $x^0\in X^0$ выполнялось равенство $D(T;x^0,c^0)=0$.

В случаях, когда непустыми являются множества $\bigcap_{\lambda\in[0;1]}X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0+\lambda h)))$ и $\bigcap_{h\in\tilde{H}(c^0),\lambda\in[0;1]}X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0+\lambda h)))$, сформулированы утверждения, аналогичные теореме 1.5.

Сформулируем достаточное условие оптимальности управления, используя разложение (1.3).

Теорема 1.9. Пусть $c^0 \in \operatorname{int} C$, для любого направления $h \in H(c^0) \setminus \{0\}$ множество $X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0))) \cap X^*(D(T;x^0,c^0)h)$ не пусто и выполнено равенство $\left.\frac{d\Phi}{dh}\right|_{c^0} = -\left.\frac{d\Phi}{d(-h)}\right|_{c^0}$. Тогда для того, чтобы значение c^0 доставляло минимум функции $\Phi(c)$, достаточно выполнения условий

1. $D(T;x^0,c^0) = 0$ для любого вектора $x^0 \in X^0$;
2. для любого $h \in H(c^0) \setminus \{0\}$ существует вектор $x^* \in X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))$, такой, что $N(T;x^*,c^0,h) > 0$.

Теоремы параграфов 1 и 2 позволяют составить схему поиска оптимального управления для внутренних точек произвольного выпуклого множества допустимых управлений:

1. Для всех точек $c^0 \in \operatorname{int} C$ определяется множество $X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0)))$.
2. Находятся множества $X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0))) \cap X^*(D(T;x^0,c^0)h)$, $\bigcap_{\lambda \in [0;1]} X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0+\lambda h)))$, $\bigcap_{h \in \tilde{H}(c^0), \lambda \in [0;1]} X^*(\varphi(x(T;x^0,c^0+\lambda h)))$ для каждого значения допустимого управления.
3. С помощью следствия 1.1 и теоремы 1.5 (или аналогичных ей) определяются подозрительные на экстремум точки.
4. Для найденных значений управления проверяются условия теорем 1.2, 1.9. Каждая точка, удовлетворяющая этим условиям, определяет локальный минимум функции $\Phi(c)$.
5. Непосредственными вычислениями из найденных точек выбирается точка, являющаяся точкой минимума для всего множества $\operatorname{int} C$. Соответствующее управление решает поставленную задачу.

Вторая глава посвящена получению условий оптимальности управления для граничных точек множества допустимых управлений в случае, когда это множество и множество начальных значений являются выпуклыми многогранниками.

В первом параграфе второй главы доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности управления для рассматриваемого случая.

Пусть числа $\lambda, \mu \in [0;1]$. Дадим переменной $x^0 \in X^0$ приращение μg, такое, что $x^0 + \mu g \in X^0$. Тогда

$$\Delta\varphi(x^0) = P(T;x^0,c)\mu g + o(|\mu g|), \tag{2.1}$$

где $P(T;x^0,c)$ – n-мерный вектор из производных функции φ по x^0.

Теорема 2.1. Для того, чтобы вектор $x^0 \in \operatorname{int} X^0$ при фиксированном значении $c \in C$ доставлял максимум функции $\varphi(x(T;x^0,c))$, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$P(T;x^0,c) = 0. \tag{2.2}$$

Пусть множество S – выпуклый многогранник в пространстве R^n. Произвольную грань многогранника S, для которой несущей плоскостью является гиперплоскость пространства R^n, обозначим $B^{n-1}(S)$. Через $B^{n-q}(S)$ обозначим грань многогранника S, которая может быть получена пересечением ровно q его граней вида $B^{n-1}(S)$, где $q=\overline{2,...,n}$. Несущая плоскость грани $B^{n-q}(S)$ определится системой линейных уравнений

$$\begin{cases} L^1(s)=0, \\ \dots\dots\dots, \\ L^q(s)=0, \end{cases}$$

где $L^i(s)=0$, $i=\overline{1,\dots,q}$ – уравнение гиперплоскости в пространстве R^n. Пусть $B_i^{n-1}(S)$ – грань, несущая гиперплоскость $b^i(s)$ которой задается уравнением $L^i(s)=0$.

Определение 2.1. Назовем грань $B^{n-q}(S)$ правильной, если она принадлежит ровно q граням вида $B^{n-1}(S)$.

Лемма 2.1. Пусть $s^0 \in B^{n-q}(S)$ не принадлежит никакой грани меньшей размерности многогранника S и грань $B^{n-q}(S)$ правильная, $q=\overline{1,...,n}$. Тогда во множестве $H(s^0)$ существует система линейно независимых векторов $h_1,...,h_n$, таких, что для любого вектора $h \in H(s^0)$ возможно разложение $h=\sum_{i=1}^{n} k_i h_i$, где $h_1,...,h_{n-q}$ принадлежат грани $B^{n-q}(s^0,H)$ и коэффициенты $k_{n-q+1} \geq 0,...,k_n \geq 0$.

Предположим, что при рассматриваемом фиксированном значении c условие (2.2) не выполняется ни в одной точке $x^0 \in \operatorname{int} X^0$. Тогда так как множество X^0 замкнуто и ограничено, а функция $\varphi(x(T;x^0,c))$ непрерывна, то она достигает максимума по переменной x^0 на границе ∂X^0.

Пусть точка $x^0 \in B^{n-q}(X^0)$ для некоторого $q=\overline{1,...,n}$ не принадлежит никакой грани меньшей размерности многогранника X^0. Для точки x^0 выберем систему из n линейно независимых векторов $g_1^{x^0},...,g_{n-q}^{x^0},g_{n-q+1}^{x^0},...,g_n^{x^0}$, таких, что точки $x^0+g_1^{x^0},...,x^0+g_{n-q}^{x^0}$ принадлежат грани $B^{n-q}(X^0)$. Если грань $B^{n-q}(X^0)$ правильная, то в качестве системы $g_1^{x^0},...,g_{n-q}^{x^0},g_{n-q+1}^{x^0},...,g_n^{x^0}$ выберем систему векторов, удовлетворяющих лемме 2.1.

Теорема 2.2. Для того, чтобы точка $x^0 \in B^{n-q}(X^0)$, $q=\overline{1,\dots,n}$, не принадлежащая никакой грани меньшей размерности, доставляла максимум функции $\varphi(x(T;x^0,c))$ при фиксированном значении $c \in C$, необходимо, чтобы:

1) выполнялись условия

$$\begin{cases} P(T;x^0,c)g_1^{x^0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ P(T;x^0,c)g_{n-q}^{x^0} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L^1(x^0)=0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ L^q(x^0)=0; \end{cases} \tag{2.3}$$

2) для каждого вектора $g \neq 0$, такого, что $x^0 + g \in X^0 \setminus B^{n-q}(X^0)$, было справедливо неравенство $P(T;x^0,c)g \leq 0$.

В выражении (2.1) для приращения $\Delta\varphi(x^0)$ выделим форму второго порядка по координатам вектора $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$. Получим разложение

$$\Delta\varphi(x^0) = P(T;x^0,c)\mu g + \mu^2 P^2(T;x^0,c,g) + o(|\mu g|^2). \tag{2.4}$$

Теорема 2.3. Для того, чтобы точка $x^0 \in \operatorname{int} X^0$ при фиксированном значении $c \in C$ доставляла максимум функции $\varphi(x(T;x^0,c))$, достаточно, чтобы выполнялось равенство $P(T;x^0,c)=0$ и при всяком $g \neq 0$ выполнялось условие $P^2(T;x^0,c,g)<0$.

Теорема 2.4. Для того, чтобы точка $x^0 \in B^{n-q}(X^0)$, $q=\overline{1,\dots,n}$, не принадлежащая никакой грани меньшей размерности, доставляла максимум функции $\varphi(x(T;x^0,c))$ при фиксированном $c \in C$, достаточно, чтобы:

1) выполнялось условие (2.3);

2) при всяком векторе $g \neq 0$, таком, что $x^0 + g \in B^{n-q}(X^0)$, было справедливо неравенство $P^2(T;x^0,c,g)<0$;

3) при любом векторе $g \neq 0$, таком, что $x^0 + g \in X^0 \setminus B^{n-q}(X^0)$, точка x^0 удовлетворяла неравенству

$$P(T;x^0,c)g < 0. \tag{2.5}$$

Предположим, что для каждой грани и внутренности многогранника X^0 система (2.3) или (2.2) соответственно либо разрешима относительно x^0 единственным образом и ее решением является $x^0 = f(c)$, причем функция $f(c)$ трижды дифференцируема на всем множестве C, либо эта система не имеет решения. Множество всех таких функций обозначим $\tilde{\Omega}$. Заметим, что ввиду поставленных условий множество $\tilde{\Omega}$ конечно. Введем в рассмотрение также множество

$$\Omega^*(c) = \left\{ f^*(\cdot) \,\middle|\, \forall f(\cdot) \in \tilde{\Omega}\ \ \varphi(x(T;f^*(c),c)) \geq \varphi(x(T;f(c),c)),\ f^*(\cdot) \in \tilde{\Omega} \right\}.$$

Очевидно, что значения $x^* = f^*(c)$ определяют максимум функции $\varphi(x(T;x^0,c))$ на множестве X^0 при фиксированном значении $c \in C$.

Пусть $c^0 \in C$. Дадим вектору c^0 приращение λh, такое, что $c^0 + \lambda h \in C$. Тогда $\varphi(x(T;f(c^0+\lambda h),c^0+\lambda h)) = \varphi(x(T;f(c^0),c^0)) + D(T;f(c^0),c^0)\lambda h + o(|\lambda h|)$, где

$$D(T;f(c^0),c^0) = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x(T;f(c^0),c^0)} \left.\frac{dx}{dc}\right|_{c^0} + \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x(T;f(c^0),c^0)} \left.\frac{dx}{df}\right|_{f(c^0)} \left.\frac{df}{dc}\right|_{c^0}.$$

Лемма 2.2. Для любой точки $c^0 \in C$ и любого направления $h \in H(c^0) \setminus \{0\}$ существует число λ_h, такое, что не пусто множество $\bigcap_{\lambda \in [0;\lambda_h)} \Omega * (c^0 + \lambda h)$.

Теорема 2.6. (Необходимое условие оптимальности для точек границы) Пусть в точке $c^0 \in B^{n-q}(C)$ множество $\Omega * (c^0)$ одноэлементное и его элементом является функция $\tilde{f}(\cdot)$. Для того, чтобы точка $c^0 \in B^{n-q}(C)$, не принадлежащая никакой грани меньшей размерности, доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо, чтобы:

1) выполнялись условия

$$\begin{cases} D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h_1^c = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h_{n-q}^c = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L^1(c^0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ L^q(c^0) = 0; \end{cases} \tag{2.8}$$

2) для каждого вектора $h \neq 0$, такого, что $c^0 + h \in C \setminus B^{n-q}(C)$, было справедливо неравенство $D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h \geq 0$.

Выделив в $o(|\lambda h|)$ форму второго порядка $D^2(T;f(c^0),c^0,h)$ по h аналогично тому, как это было сделано в равенстве (1.3), получим

$$\Delta\varphi(c^0) = D(T;f(c^0),c^0)\lambda h + \lambda^2 D^2(T;f(c^0),c^0,h) + o(|\lambda h|^2).$$

Теорема 2.9. (Достаточное условие оптимальности для точек границы) Пусть в точке $c^0 \in B^{n-q}(C)$ множество $\Omega * (c^0)$ одноэлементное и его элементом является функция $\tilde{f}(\cdot)$. Для того, чтобы точка $c^0 \in B^{n-q}(C)$, не принадлежащая никакой грани меньшей размерности, доставляла минимум функции $\Phi(c)$, достаточно, чтобы:

1) выполнялось условие (2.8);

2) при всяком $h \neq 0$, таком, что $c^0 + h \in B^{n-q}(C)$, было справедливо неравенство $D^2(T;\tilde{f}(c^0),c^0,h) > 0$;

3) для каждого вектора $h \neq 0$, такого, что $c^0 + h \in C \setminus B^{n-q}(C)$, было справедливо неравенство

$$D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h > 0. \tag{2.10}$$

Следствие 2.2. Если грань $B^{n-q}(C)$ правильная, то условие 3 теоремы 2.9 равносильно тому, что точка c^0 удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h_{n-q+1}^c > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ D(T;\tilde{f}(c^0),c^0)h_n^c > 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пусть множество $\Omega * (c^0)$ содержит более одного элемента. Зафиксируем некоторое допустимое направление h. Обозначим $\Omega *_h (c^0) = \Omega * (c^0) \cap \Omega * (c^0 + \bar{\bar{\lambda}} h)$, где $0 < \bar{\bar{\lambda}} < \lambda_h$ – некоторое фиксированное число. Согласно лемме 2.2 множество $\Omega*_h\left(c^0\right)$ не пусто и не зависит от выбора $\overline{\overline{\lambda}}$.

Теорема 2.12. Для того, чтобы значение $c^0 \in C$ доставляло минимум функции $\Phi(c)$, необходимо, чтобы для любого направления $h \in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ для каждой функции $f_h(\cdot)\in\Omega*_h\left(c^0\right)$ было справедливо неравенство $D\left(T;\, f_h\left(c^0\right), c^0\right)h \ge 0$.

Теорема 2.13. Пусть в точке $c^0 \in C$ для некоторого направления $h \in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ выполнено одно из условий

1) существует функция $f_h(\cdot)\in\Omega*\left(c^0\right)$, для которой справедливо равенство $D\left(T;\, f_h\left(c^0\right), c^0\right)h = 0$, но при этом $D^2\left(T;\, f_h\left(c^0\right), c^0, h\right) > 0$;

2) существует функция $f_h(\cdot)\in\Omega*\left(c^0\right)$, для которой выполнено неравенство $D\left(T;\, f_h\left(c^0\right), c^0\right)h > 0$.

Тогда точка $c^0 \in C$ доставляет минимум функции $\Phi(c)$ по направлению h.

Следствие 2.3. Пусть $c^0 \in C$. Если для любого направления $h \in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ выполнены условие 1 или условие 2 теоремы 2.13, то точка $c^0 \in C$ доставляет минимум функции $\Phi(c)$.

Изложенные в §1 главы II положения позволяют составить схему поиска оптимального управления.

Во втором параграфе второй главы рассмотрено приложение теории к линейным системам в случае, когда оптимизируемый функционал представляет собой евклидову метрику.

Третья глава посвящена проблеме оценки положения оптимального управления для нелинейных систем с неизвестным видом общего решения. Предполагается, что известно одно решение системы при некотором значении управления.

В первом параграфе третьей главы заменой переменных система сводится к более удобному для изучения виду $\dot{y} = f_1(t, y, u)$, причем полученная система имеет решение $y \equiv 0$ при $u \equiv 0$.

Предполагается, что вектор-функция $f_1(t, y, u)$ определена равенством $f_1(t, y, u) = A(t)y + B(t, u) + \psi(t, y, u)$ и выполнены условия $B(t,0) \equiv 0$, $\psi(t, y, u) = \Psi(t, y, u)y$, $y^0 = 0$ является внутренней точкой множества начальных значений Y^0. Обозначим $\gamma = \left(y^0, c\right)$ – вектор размерности $2n$.

Подстановкой $u(t) = K(t)c$ исследуемая система сводится к системе

$$\dot{y} = A(t)y + \overline{B}(t, c) + \overline{\psi}(t, y, c), \tag{3.3}$$

в которой $\overline{B}(t,0) \equiv 0$, $\overline{\psi}(t, y, c) = \overline{\Psi}(t, y, c)y$. Предполагается, что $c = 0$ – внутренняя точка множества C.

Лемма 3.2. Если в системе (3.3) вектор-функция $\overline{B}(t, c)$ имеет производные второго порядка по координатам вектора c, $\overline{\psi}(t, y, c) = \overline{\Psi}(t, y, c)y$, причем $\lim\limits_{\gamma\to 0}\overline{\Psi}(t, y, c) = 0$ равномерно на множестве $[t_0; T]$, то существует такое число $\theta > 0$, что для всех $c \in C$, $|c| \le \theta$, решение $y = \bar{y}(t; y^0, c)$ системы (3.3) можно представить в виде $\bar{y}(t) = Y(t)y^0 + \overline{B}_1(t)c + o(|c|) + \tilde{\varphi}(t, c)$, где $\lim\limits_{|\gamma| \to 0} \dfrac{|\tilde{\varphi}(t, c)|}{|\gamma|} = 0$ на отрезке $[t_0; T]$.

Пусть $z \in R^m$. Символом $[z]^k$ обозначим вектор размерности m^k, координатами которого являются все возможные произведения $z_{i1} z_{i2} \ldots z_{ik}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Используя лемму 3.2, разложим решение системы (3.3) по степеням координат вектора γ:

$$y(t; y^0, c) = Y(t)y^0 + B_1(t)c + B_2(t)[c]^2 + \overline{\Psi}_1(t)[y^0]^2 + \overline{\Psi}_2(t)[y^0 c] + o(|\gamma|^2), \qquad (3.6)$$

где $\overline{\Psi}_1(t), \overline{\Psi}_2(t), B_2(t)$ – $n \times n^2$-матрицы при векторах $[y^0]^2, [y^0 c], [c]^2$ соответственно. Тогда производная решения по параметру c в произвольной, но фиксированной точке γ из малой окрестности нуля имеет вид $\dfrac{dy}{dc}(t; y^0, c) = B_1(t) + L_c(t) + L_{y^0}(t) + L_\gamma^2(t) + o(|\gamma|^2)$, где L_c, L_{y^0} – $n \times n$-матрицы, элементами которых являются линейные комбинации координат векторов c и y^0 соответственно, L_γ^2 – $n \times n$-матрица, элементами которой являются формы второго порядка по координатам вектора γ.

Разложим функцию $\varphi(y)$ по формуле Тейлора в окрестности решения $y \equiv 0$, получим

$$\varphi(y(t; y^0, c)) = \varphi(0) + I_1(0) y(t; y^0, c) + \frac{1}{2} I_2(0)[y(t; y^0, c)]^2 + \frac{1}{6} I_3(0)[y(t; y^0, c)]^3 + o(|\gamma|^3).$$

Тогда $\dfrac{d\varphi}{dy}(y(t; y^0, c)) = I_1(0) + y(t; y^{0,}, c)^T \bar{I}_2(0) + [y(t; y^0, c)]^{2T} \bar{I}_3(0) + o(|\gamma|^2)$, где $y(t; y^0, c)$ определяется из разложения (3.6). Знак ^{T} означает операцию транспонирования. Пусть $F_1(T; 0, 0) = I_1(0) B_1(T)$. Обозначим $D(T; y^0, c) = \dfrac{d\varphi}{dy}(y(T; y^0, c)) \dfrac{dy}{dc}(T, y^0, c)$. Используя полученные представления для производных, выделим в данном произведении формы первого и второго порядков по координатам вектора γ, получим

$$D(T; y^0, c) = F_1(T; 0, 0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c + \overline{L}^2(\gamma) + o(|\gamma|^2) =$$

$$= F_1(T; 0, 0) + \gamma^T F_2(T; 0, 0) + [\gamma]^{2T} F_3(T; 0, 0) + o(|\gamma|^2). \qquad (3.7)$$

Во втором параграфе третьей главы исследование проводится на сужении исходных множеств допустимых управлений и начальных значений. Рассматривается случай, когда оптимальное управление может являться только точкой границы.

Введем обозначение: $\Gamma_\gamma(r)=\{\gamma \mid |\gamma|\le r\}$. Исследуем вопрос об оптимальном управлении системы (3.3) в случае, когда вектор $F_1(T;0,0)$ в разложении (3.7) отличен от нулевого.

Теорема 3.1. Если выполнено неравенство $F_1(T;0,0)\ne 0$, то существует такое число $\kappa>0$, что при $\gamma\in\Gamma_\gamma(\kappa)$ ни одно значение c из окрестности нуля $\Gamma_c(\kappa)$ не является точкой минимума функции $\Phi(c)$.

Лемма 3.3. Для того, чтобы существовала окрестность начала координат $\Gamma_\gamma(\tilde\kappa)$, для точек которой справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\tilde\kappa)}\left(\left|F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c\right|\right)\ne 0$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $F_1(T;0,0)$ был ненулевым.

Теорема 3.2. Если $F_1(T;0,0)\ne 0$, то существует число $\kappa^*\le\tilde\kappa$, такое, что для точек γ из множества $\Gamma_\gamma(\kappa^*)$ справедливо неравенство $\left|o(|\gamma|)\right|<\left|F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c\right|$.

Теорема 3.4. Если $F_1(T;0,0)\ne 0$, то ни одна внутренняя точка множества $\Gamma_c(\kappa^*)$ не доставляет минимум функции $\Phi(c)$.

Лемма 3.4. Пусть для некоторого направления h справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\kappa^*)}\left(\left|\left(F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c\right)h\right|\right)\ne 0$. Тогда существует такое число $\kappa_h>0$, что в окрестности нуля $\Gamma_\gamma(\kappa_h)$ выполняется условие

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\kappa_h)}\left(\left|\left(F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c+o(|\gamma|)\right)h\right|\right)\ne 0 .$$

Теорема 3.5. Пусть для некоторого направления $h\in H(c^0)\setminus\{0\}$ справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\kappa^*)}\left(\left|\left(F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c\right)h\right|\right)\ne 0$. Тогда для того, чтобы точка $c^0\in\partial\Gamma_c(\kappa_h)$ доставляла минимум функции $\Phi(c)$ по направлению h, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\left(F_1(T;0,0)+c^{0T}\overline{L}_c\right)h>0$.

Выбор числа κ_h в лемме 3.4 определяется только направлением вектора h. Пусть $E(c^0)=\left\{e \mid e=\dfrac{h}{|h|}, h\in H(c^0)\setminus\{0\}\right\}$, $\tilde H^0$ – множество таких значений h, для которых выполнено неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\kappa^*)}\left(\left|\left(F_1(T;0,0)+y^{0T}\overline{L}_{y^0}+c^T\overline{L}_c\right)h\right|\right)\ne 0$. Во множестве $\tilde H^0$ выделим замкнутое подмножество H^0. Определим множество $E^0=\left\{e \mid e=\dfrac{h}{|h|}, h\in H^0\right\}$. Тогда множество $\Gamma_\gamma=\bigcap\limits_{e\in E^0}\Gamma_\gamma(\kappa_e)$ замкнуто и не является одноэлементным. Множество Γ_γ определяет два множества Γ_c и Γ_{y^0}.

Теорема 3.6. Пусть c^0 – граничная точка множества Γ_c и $E(c^0) \subset E^0$. Для того, чтобы точка $c^0 \in \partial\Gamma_c$ доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $e \in E(c^0)$ выполнялось неравенство $\left(F_1(T;0,0) + c^{0T}\bar{L}_c\right)e > 0$.

Пользуясь теоремами 3.5, 3.6, можно сконструировать множество допустимых управлений Γ_c таким образом, что оптимальное управление c^0 будет являться граничной точкой этого множества.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается вопрос о наличии оптимального управления внутри множества допустимых управлений.

Пусть $F_1(T;0,0) = 0$. Покажем, что в этом случае внутренние точки множества C могут доставлять экстремум функции $\Phi(c)$.

Теорема 3.7. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$. Если матрица $\bar{L}_{y^0}$ в равенстве (3.7) неособенная, то существует такое положительное число κ_1, что в каждой точке множества $\Gamma_c(\kappa_1)$ выполнено необходимое условие оптимальности, указанное в следствии 1.1.

Теорема 3.8. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$. Если матрица $\bar{L}_c$ в равенстве (3.7) неособенная, то существуют внутренние точки множества C, в которых выполнено необходимое условие оптимальности управления (следствие 1.1) для траекторий ансамбля с начальными значениями в некотором непустом множестве $\tilde{Y}^0 \subset Y^0$.

Теорема 3.9. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$ и матрицы $\bar{L}_{y^0}$ и $\bar{L}_c$ в равенстве (3.7) особенные. Тогда если $rang F_2(T;0,0) = n$, то существуют внутренние точки множества C, в которых выполнено необходимое условие оптимальности управления (следствие 1.1) для траекторий ансамбля с начальными значениями в некотором множестве $\tilde{\tilde{Y}}^0 \subset Y^0$.

Замечание 2. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$, матрицы $\bar{L}_{y^0}$ и $\bar{L}_c$ в равенстве (3.7) особенные и $rang F_2(T;0,0) = n$. В этом случае существуют ненулевые управления c, для которых выполнено необходимое условие оптимальности.

Предположим, что система (3.3) такова, что $F_1(T;0,0) = 0$ и матрица $F_2(T;0,0)$ является нулевой. В этом случае, очевидно, ни одна из приведенных выше теорем не может указать управлений, подозрительных на оптимальные. Согласно разложению (3.7), уравнение $D(T; y^0, c) = 0$ имеет вид

$$\bar{L}^2(\gamma) + o\left(|\gamma|^2\right) = 0. \qquad (3.14)$$

Пусть $e_\gamma = \dfrac{\gamma}{|\gamma|}$, тогда уравнение (3.14) можно записать так

$$\bar{L}^2(e_\gamma) + O(|\gamma|) = 0. \qquad (3.15)$$

Наряду с системой (3.15) рассмотрим систему $D(T; y^0, c)h = 0$, которая в данном случае имеет вид

$$\overline{L}^2(e_\gamma)h + O(|\gamma|)h = 0. \qquad (3.16)$$

Теорема 3.11. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$ и $F_2(T;0,0) = 0$. Если хотя бы одна координата вектора $\overline{L}^2(e_\gamma)$ является знакоопределенной формой, то существует некоторое множество $Y^0 * \times C* \subset Y^0 \times C$, такое, что ни одно значение $c \in \operatorname{int} C*$ не решает задачу оптимального управления ансамблем траекторий с начальными значениями из множества $Y^0 *$.

Пусть $D_\gamma\left[\overline{L}^2(e_\gamma)\right] = \left.\dfrac{d\overline{L}^2(e_\gamma)}{de_\gamma}\right|_{e_\gamma *}$.

Теорема 3.12. Пусть $F_1(T;0,0) = 0$ и $F_2(T;0,0) = 0$. Если при некотором значении $e_\gamma *$, $|e_\gamma *| = 1$, выполняется равенство $\overline{L}^2(e_\gamma *) = 0$ и $rangD_\gamma\left[\overline{L}^2(e_\gamma)\right] = n$, то в окрестности нуля (по c) существует управление, для которого выполнено необходимое условие оптимальности (следствие 1.1).

В приложении приведена программа, позволяющая найти приближенное значение оптимального управления для системы двух дифференциальных уравнений. Приведены результаты выполнения программы для примера биологической системы “хищник-жертва”. Совпадение численных результатов с предсказанными теоретически позволяет считать их достоверными, не находя множества Γ_γ.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору М.Т. Терехину за постановку задачи, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. Глухова Н.А. К вопросу об управляемости системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов 4 всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Изд-во РГРТА, 1999. С. 48-49.
2. Глухова Н.А. Управляемость систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов 5 всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Изд-во РГРТА, 2000. С. 27-30.
3. Глухова Н.А. Условия оптимальности управления систем в условиях неопределенности // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов 7 всероссийской научно-

технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Изд-во РГРТА, 2002. С. 9-11.

4. Глухова Н.А. Оптимальность управления систем дифференциальных уравнений в условиях неопределенности // Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Изд-во СВМО.2002. Т.3-4.№ 1. С.234-235.

5. Глухова Н.А. Оптимизация управления для систем с неизвестным видом общего решения // Тезисы докладов всероссийской научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики." Тула: ТулГУ, 2002. С. 12-13.

6. Глухова Н.А. Оптимизация критерия качества для нелинейных систем // Тезисы докладов X Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование." в г. Пущино. Изд. "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. С. 102.

7. Глухова Н.А. Схема поиска оптимального управления для выпуклых многогранников // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003, – 300с. С. 74-75.

8. Глухова Н.А. Минимизация радиуса конечной окрестности для линейных систем // Информатика и прикладная математика: Межвуз. сб. науч. тр. / Ряз. гос. пед. ун-т. им. С.А. Есенина. – Рязань: РГПУ,2002. С.43-45.

9. Глухова Н.А. Задача оптимизации для систем с неизвестным видом решения // Информатика и прикладная математика: Межвуз. сб. науч. тр. / Ряз. гос. пед. ун-т. им. С.А. Есенина. – Рязань: РГПУ, 2002. С. 46-48.

10.Глухова Н.А. Необходимые и достаточные условия оптимальности управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях неопределенности // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2002. № 6. С. 20-28.

11.Глухова Н.А. Об оптимальности управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях неопределенности в частных случаях // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2002. № 6. С. 29-40.

12.Глухова Н.А., Терехин М.Т. Поиск оптимального управления в условиях неопределенности // Вестник Рязанского государственного педагогического университета им. С.А. Есенина. № 1(9), 2003. С. 160-170.

13.Глухова Н.А. Оптимизация критерия качества во внутренних точках выпуклых множеств / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2002. – 10 с. Деп. в ВИНИТИ 30.09.02, № 1645-В2002.

14.Глухова Н.А. Схема поиска оптимального управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2002. – 14 с. Деп. в ВИНИТИ 30.09.02, № 1646-В2002.

15.Глухова Н.А. Управление в условиях неопределенности для систем с неизвестным видом общего решения / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2003. – 19 с. Деп. в ВИНИТИ 13.02.03, № 293-В2003.

Глухова Наталья Александровна

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Рязанский государственный
педагогический университет им. С.А. Есенина
Россия, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46.