КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

*ДОЛГОВ СЕРГЕЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ*

# ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

01.01.04 – геометрия и топология

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ - 2002

Работа выполнена в Чувашском государственном педагогическом университете имени И.Я.Яковлева

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор **Столяров А.В.**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Игошин В.А.**,
кандидат физико-математических наук, доцент **Подковырин А.С.**

Ведущая организация:

Тверской государственный университет

Защита состоится 27 ноября 2002 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, ауд.____.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета

Автореферат разослан «___» октября 2002 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент **М.А.Малахальцев**

# I. Общая характеристика диссертации

1.Актуальность темы. Дифференциальная геометрия сегодня представляет собой обширную область исследований разнообразных структур на гладких многообразиях, в том числе оснащенных; в изучении последних одно из ведущих мест занимает теория связностей в однородных расслоениях.

Теория связностей, берущая свое начало и развитие от работ Т.Леви-Чивита[1], Г.Вейля[2], Р.Кенига[3], Э.Картана[4], И.А.Схоутена[5], В.В.Вагнера[6], и Ш.Эресмана[7], в настоящее время представляет собой широкую область исследования расслоенных пространств. Особое место в общей теории занимает теория связностей в однородных расслоениях, в рамках которой линейные связности чаще всего находят приложения при изучении дифференциальной геометрии оснащенных подмногообразий.

Приложение аффинной связности, индуцируемой оснащением (нормализацией) изучаемого многообразия, к теории поверхностей $V_m$ проективного пространства и различных пространств Клейна, фундаментальная группа которых является подгруппой группы проективных преобразований, характеризует одно из главных направлений в дифференциально-геометрических исследованиях А.П.Нордена[8] и его школы.

Следует отметить, что А.П.Норден при изучении геометрии гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ использует две двойственные симметрические аффинные связности (первого и второго рода), индуцируемые при нормализации подмногообразия $V_{n-1}$. Определение двойственных пространств с линейной (проективной, аффинной, нормальной) связностью, данное А.В.Столяровым с точки зрения инволютивного преобразования форм связностей их, позволило[9], во-первых, расширить объемлющее простран-

---

[1] *Levi-Civita T.* Nozioni di parallelismo in una varieta qualinque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemannianna. Rend. circ. matem. – Palermo, 1917. – V.42. – P. 173-205.

[2] *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1918.

[3] *König R.* Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Jahresb // d. Deutch. Math. Ver. – 1920. – V.28. – P. 213-228.

[4] *Cartan E.* Les groups d'holonomie des espaces generalises // Acta math. – 1926. – V.48. – P. 1-42. ( см. русск. перевод: Картан Э., Группы голономии обобщенных пространств. Казань, 1939).

[5] *Schouten J.A.* Ricci Calculus. An introduction to tens analysis and its geometrical applications. 2-nd ed // Berlin. – Göttingen – Heidelberg. – Springer. – 1954.

[6] *Вагнер В.В.* Геометрия ($n$-1)-мерного неголономного многообразия в $n$-мерном пространстве // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу . – 1941. – Вып. 5. – С. 173-225.

*Вагнер В.В.* Теория составного многообразия // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу . – 1950. – Вып. 8. – С. 11-72.

[7] *Ehresmann C.* Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable // Collque de Topologie. – Bruxelles, 1950. – P. 29-55.

[8] *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976. - 432с.

[9] *Столяров А.В.* Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности // Пробл. геометрии / Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. - 1975. - Т.8. - С. 25-46.

*Столяров А.В.* Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. I // Изв. вузов. Матем. – 1980. - № 1. – С. 79-82.

*Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. – Чебоксары, 1994. - 290с.

ство (проективное) до пространства проективной связности; во-вторых, рассматривать двойственные вопросы не только при нормализации подмногообразия, но и при различных других его оснащениях, и, в-третьих, проводить изучение вопросов двойственной геометрии оснащенных как голономных, так и неголономных подмногообразий.

Подмногообразие (поверхность, распределение), несущее сеть (ткань) того или иного класса, как один из примеров касательно оснащенных[10] многообразий, стало объектом изучения для целого ряда геометров. Среди них: А.П.Норден[11], А.И.Чахтаури[12], В.И.Шуликовский[13], В.Т.Базылев[14], М.А.Акивис[15], Н.М.Остиану[16], А.Е.Либер[17] и др. С.Е.Степанов[18] в пространстве аффинной связности $L_n$ $(n \geq 2)$ изучает геометрию оснащений поверхности (гиперповерхности), ассоциированных с чебышевской сетью. Г.Н.Линькова[19] рассматривает сети на гиперповерхностях эквиаффинного пространства, Т.А.Шульман[20] в пространстве $P_4$ исследует геометрию гиперповерхности, несущей сеть.

В диссертационной работе с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф.Лаптевым[21], путем преобразования так называемых базовых аффинных или проективных связностей, индуцируемых оснащением (в смысле А.П.Нордена, Э.Картана[22], Э.Бортолотти[23]) регулярной гиперповерхности (как голономной, так и неголономной) в $P_n$, в разных дифференциальных окрестностях (до четвер-

---

[10] *Малаховский В.С.* К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Изв. вузов. Матем. – 1972. - № 9. - С. 54-65.

*Домбровский Р.Ф.* К геометрии касательно оснащенных поверхностей в $P_n$ // Тр. геометр. семинара. – Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1974. – Т.6. – С. 171-188.

[11] *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976. - 432с.

[12] *Чахтаури А.И.* Приложения внутренних геометрий плоских сетей в теорию поверхностей // Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрССР. – 1954. – 20. – С. 89-130.

[13] *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. – М.: Физматгиз, 1963. – 540с.

*Шуликовский В.И.* Проективная теория сетей. – Изд. Казанск. ун-та, 1964. – 78с.

[14] *Базылев В.Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Изв. вузов. Матем. - 1966. - № 2. - С. 9-19.

*Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В*. Сети на многообразиях // Пробл. геометрии / Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. - 1981. - Т.12. - С. 97-125.

[15] *Акивис М.А.* Дифференциальная геометрия тканей // Пробл. геометрии / Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. - 1983. - Т.15. – С. 187-213.

[16] *Остиану Н.М.* Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть // Изв. вузов. Матем. - 1970. - № 7. - С. 72-82.

[17] *Либер Л.Е.* К теории сетей в многомерном пространстве // Сб. научн. тр. « Дифференциальная геометрия » / Саратовск. ун-т. – 1974. - Вып. 1. - С. 72-84.

[18] *Степанов С.Е.* Геометрия декартовых пространств. – М. – 1978. - № 3414-78 Деп. – 8 с.

[19] *Линькова Г.Н.* О сетях на гиперповерхностях эквиаффинного пространства // Геометрия. – Л. – 1975. – Вып. 4. – С. 107-119.

[20] *Шульман Т.А.* Об инвариантных сетях на гиперповерхности в четырехмерном проективном пространстве // Изв. вузов. Матем. – 1964. - № 5. – С. 137-142.

[21] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. - 1953. - Т.2. - С. 275-382.

*Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда. - 1964. - Т.2. - С. 226-233.

[22] *Cartan E.* Les espaces á connexion projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу / МГУ. - 1937. - Вып. 4. - С. 147-159.

[23] *Bortolotti E.* Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria metrika differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1933.-V.3.- P.81-89.

того порядка включительно) получен и изучается ряд двойственных в смысле А.В.Столярова[24] пространств (кроме базовых) аффинной или проективной связности; найдены также приложения полученных двойственных аффинных связностей к изучению геометрии тканей (сетей) на данном подмногообразии.

Актуальность этих исследований обусловлена тем, что изучение геометрии распределений (неголономных подмногообразий) является следствием решения проблемы Пфаффа[25]; (задачи об интегрировании некоторой системы Пфаффа), в свою очередь эквивалентной[26] задаче об интегрировании любой конечной системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Цель работы. Предметом исследования настоящей работы являются линейные (аффинные и проективные) связности, индуцируемые в расслоениях на оснащенном подмногообразии $n$-мерного проективного пространства $P_n$, а также приложения этих связностей к изучению геометрии тканей (сетей) на нем; в качестве подмногообразия берется регулярное распределение гиперплоскостных элементов $\Re$, то есть неголономная гиперповерхность ( гл. II ), а также регулярная гиперповерхность $V_{n-1}$( гл. III ). Задача сводится к изучению двойственной геометрии указанных подмногообразий, оснащенных в том или ином смысле, посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцированных полями фундаментальных и оснащающих объектов их.

Целью диссертационного исследования является решение следующих ключевых задач:

1) развить теорию двойственных линейных связностей (аффинных, проективных), индуцируемых при классических оснащениях регулярной гиперповерхности – как неголономной (то есть распределения гиперплоскостных элементов $\Re$), так и голономной $V_{n-1}$, - погруженной в проективное пространство $P_n$;

2) найти приложения полученных двойственных аффинных связностей к исследованию геометрии тканей (сетей) на изучаемом подмногообразии, а именно, на распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ и на гиперповерхности $V_{n-1}$.

Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований: метод продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева[27] и метод внешних дифференци-

[24] *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. – Чебоксары, 1994. - 290с.
[25] *Pfaff J.* – Berl. Abh. - 1814. – S.76-135.
[26] *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения // Изд-во МГУ, 1962. - 237с.
*Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.: Гостехиздат, 1947. - 354с.
[27] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. - 1953. - Т.2. - С. 275-382.

альных форм Э.Картана[25,28]. Применение этих инвариантных методов позволило получить дифференциально-геометрические факты, связанные с дифференциальными окрестностями высоких (до четвертого) порядков.

Все рассмотрения в диссертации носят локальный характер. Функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые многообразия достаточно гладкие).

В работе все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения – в репере нулевого и первого порядков; благодаря этому результаты формулируются в инвариантной форме. Следует также заметить, что результаты по линейным связностям получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф.Лаптевым.

Научная новизна. Результаты, полученные в работе, являются новыми; основные положения их заключаются в следующем:

1) изучается геометрия двойственных аффинных связностей, индуцируемых на нормализованном распределении гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $P_n$, которые ранее на данном подмногообразии не рассматривались; найдены приложения их к исследованию двойственной геометрии $(n$-1)-тканей (в основном, сопряженных) на распределении $\mathfrak{R}$ (гл. II);

2) доказано, что на оснащенной в смысле Э.Картана (Э.Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ в разных дифференциальных окрестностях индуцируются пять пространств проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ $(\overset{\underline{q}}{P}_{n-1,n-1})$, $q=\overline{1,5}$ (гл. III);

3) показано, что на оснащенной в смысле Нордена-Картана (Нордена-Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ пространство аффинной связности $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ $(\overset{\underline{q}}{A}_{n-1,n-1})$ при каждом фиксированном $q=\overline{1,5}$ является сужением соответствующего пространства проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ $(\overset{\underline{q}}{P}_{n-1,n-1})$ (гл. III);

4) исследуется внутренняя геометрия двойственных аффинных связностей $\overset{a}{\nabla}, \overset{\underline{a}}{\nabla}$, $a=\overline{1,6}$, индуцируемых на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$, а также приложения их к изучению двойственной геометрии сетей $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$.

В работе приведены доказательства всех выводов, сформулированных в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при

---

[28] *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. - М.- Л. - ГИТТЛ.- 1948. – 432с.

исследовании подмногообразий, погруженных в пространства более общей (или подчиненной) структуры, при изучении пространств с линейной (аффинной, проективной) связностью, индуцированных оснащением изучаемых подмногообразий.

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а именно, спецкурсов:

1) по теории двойственных линейных связностей на оснащенных подмногообразиях классических пространств с фундаментальными группами или пространств с линейной связностью;

2) по теории распределений гиперплоскостных элементов и гиперповерхностей.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на научных конференциях студентов, аспирантов и докторантов Чувашского государственного педагогического университета (Чебоксары, 1999$\div$2001гг.), на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей по геометрии (Чувашский госпедуниверситет, Чебоксары, 2000 г.); на IX Международной конференции «Математика. Образование. Экономика. Экология» (Чебоксары, ЧГУ, 2001г.), Международной научной молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2001г.); на заседаниях научно-исследовательских семинаров при кафедре геометрии Нижегородского госуниверситета (2001г.), Казанского госуниверситета (2001г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двенадцати печатных работах [1]$\div$[12].

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные работы по теме диссертации выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (общая характеристика работы), трех глав и списка использованной литературы, включающего 91 наименование. Полный объем работы составляет 156 страниц машинописного текста.

## II. Краткое содержание диссертации

В **первой главе** содержится материал, носящий, в основном, реферативный характер и необходимый для изложения результатов диссертации.

В **§ 1** вводится понятие распределения гиперплоскостных элементов $\Re$, погруженного в проективное пространство $P_n$ (п.1), строятся поля фундаментальных (п.2) и некоторых охваченных (п.3) геометрических объектов на регулярном подмногообразии $\Re$.

§ 2 посвящен краткому обзору двойственной теории регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\Re$, найдены соотношения, связывающие компоненты полей фундаментальных и охваченных геометрических объектов двойственного образа $\overline{\Re}$ в $\overline{P}_n$ с соответствующими компонентами полей геометрических объектов прообраза $\Re$.

В § 3 первой главы рассматриваются некоторые классические оснащения регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$: приводятся (п.1) примеры внутренним образом определяемых двойственных нормализаций подмногообразия $\Re$ (нормализация Михэйлеску, Фубини, Вильчинского), рассматриваются оснащения в смысле Э.Картана (п.2) и в смысле Э.Бортолотти (п.3) распределения $\Re$, рассматриваются (п.4) вопросы касательного оснащения подмногообразия $\Re$, определяемого ($n$-1)-тканью $\Sigma_{n-1}$ (как правило, сопряженной).

§ 4 первой главы посвящен обзору двойственной теории оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$.

Приведено (п.1) дифференциальное уравнение гиперповерхности $V_{n-1}$ в репере первого порядка, построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов подмногообразия $V_{n-1} \subset P_n$ до четвертого порядка включительно.

П.2 посвящен краткому обзору двойственной теории регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$: инволютивное преобразование структурных форм, двойственный образ $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{P}_n$ и т.д.

В П.3 параграфа 4 рассматриваются некоторые инвариантные оснащения регулярной гиперповерхности: двойственное оснащение в смысле А.П.Нордена, оснащения в смысле Э.Картана и Э.Бортолотти, касательное оснащение, определяемое сопряженной сетью $\Sigma_{n-1} \subset P_n$.

**Вторая глава** диссертации посвящена изучению двойственных аффинных связностей, индуцируемых на нормализованном регулярном распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$.

В § 1 изучаются аффинные связности, индуцируемые в касательном расслоении на оснащенном в смысле А.П.Нордена (нормализованном) голономном распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$; при этом результаты по линейным связностям этого и последующих параграфов глав II, III получены с существенным использованием фундаментальной теоремы в теории связностей, известной в научной литературе под названием *теоремы Картана-Лаптева*[27]:

система пфаффовых форм $\theta^a$ устанавливает фундаментально-групповую связность в расслоенном многообразии с базовыми формами $\omega^J$ и со структурной группой $G$, определенной инвариантными формами

$\theta^a$, тогда и только тогда, когда формы $\theta^a$ связаны структурными уравнениями

$$D\theta^a = \frac{1}{2} C^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c + \frac{1}{2} R^a_{LK} \omega^L \wedge \omega^K,$$
$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K, \ C^a_{bc} = const.$$

Основным результатом параграфа является теорема II.2: на нормализованном регулярном голономном распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$ в касательном расслоении кроме базовой аффинной связности $\nabla$ индуцируется еще двадцать четыре, вообще говоря, различные аффинные связности $\overset{ab}{\nabla}$, $a = \overline{1,6}$, $b = \overline{1,4}$, определяемые системами слоевых форм $\{\overset{ab}{\theta}{}^i_j\}$. При этом пространства аффинной связности $\overset{3b}{A}_{n,n-1}$ и $\overset{4b}{A}_{n,n-1}$ при одинаковых значениях индекса $b = \overline{1,4}$ обладают общими геодезическими линиями, то есть являются проективными (теорема II.3).

Приведены строения тензоров кручения и кривизны соответствующих пространств аффинной связности $\overset{ab}{A}_{n,n-1}$.

Найдены инвариантные условия вырождения связностей $\overset{ab}{\nabla}$, $a = \overline{1,5}$, $b = \overline{1,4}$ в аффинную связность $\nabla$ (теоремы II.4$\div$II.8):

1) аффинные связности $\nabla$ и $\overset{1b}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей первого рода $\nu^i_n$ есть поле нормалей Михэйлеску $M^i_n$;

2) для того чтобы аффинная связность $\overset{2b}{\nabla}$ при некотором фиксированном $b = \overline{1,4}$ вырождалась в связность $\nabla$, необходимо и достаточно, чтобы нормализация подмногообразия $\Re$ была взаимной;

3) аффинные связности $\nabla$ и $\overset{3b}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда поле соприкасающихся гиперквадрик имеет с распределением $\Re$ соприкосновение третьего порядка;

4) для того чтобы связность $\overset{4b}{\nabla}$ при любом фиксированном $b = \overline{1,4}$ вырождалась в аффинную связность $\nabla$, необходимо и достаточно, чтобы подмногообразие $\Re$ было нормализовано взаимно и имело соприкосновение третьего порядка с полем соприкасающихся гиперквадрик;

5) аффинные связности $\nabla$ и $\overset{5b}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда исходное подмногообразие $\Re$ - коинцидентное.

В **§ 2** исследуются двойственные аффинные связности, индуцируемые на нормализованном голономном распределении $\Re$ в $P_n$.

Центральным результатом параграфа является теорема II.10: нормализация регулярного голономного распределения гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$ кроме базовой аффинной связности $\overline{\nabla}$ , двойственной связности $\nabla$, индуцирует на подмногообразии $\Re$ еще двадцать четыре аффинные связности $\overset{ab}{\overline{\nabla}}$, $a=\overline{1,6}$, $b=\overline{1,4}$, двойственные соответственно связностям $\overset{ab}{\nabla}$ и определяемые системами форм $\{\overset{ab}{\overline{\theta}}{}^{i}_{j}\}$.

Приведены строения тензоров кручения и кривизны всех пространств аффинной связности $\overset{ab}{\overline{A}}_{n,n-1}$.

Справедливы утверждения, двойственные теоремам II.3$\div$II.8; они сформулированы в теоремах II.11$\div$II.13.

В **<u>§ 3</u>** рассматриваются сопряженные пары двойственных аффинных связностей на голономном распределении $\Re$ в $P_n$. Доказана теорема II.14: каждая пара двойственных аффинных связностей $(\nabla, \overline{\nabla})$, $(\overset{\tilde{a}b}{\nabla}, \overset{\tilde{a}b}{\overline{\nabla}})$, $\tilde{a}=1, 2, 3, 5, 6$, $b=\overline{1,4}$, индуцируемая на нормализованном регулярном голономном распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$, сопряжена относительно поля тензора $\Lambda^n_{ij}$ вдоль произвольной кривой, принадлежащей данному подмногообразию $\Re$.

В **<u>§ 4</u>** второй главы рассматриваются вопросы приложения двойственных аффинных связностей $\overset{ab}{\nabla}$ и $\overset{ab}{\overline{\nabla}}$, $a=\overline{1,6}$, $b=\overline{1,4}$, индуцируемых нормализацией голономного распределения $\Re$ в $P_n$, к изучению внутренней геометрии ($n$-1)-тканей $\Sigma_{n-1}$ на подмногообразии $\Re$.

В <u>п.1</u> изучаются сопряженные геодезические ($n$-1)-ткани $\Sigma_{n-1}$ на нормализованном распределении $\Re$ в $P_n$. Найдены аналитические условия, при которых сопряженная ткань $\Sigma_{n-1}$ на нормализованном распределении $\Re$ является соответственно геодезической первого, второго, третьего или четвертого рода. Справедливы предложения (теоремы II.15, II.16 ):

1) если нормализованное голономное распределение гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$ несет сопряженную геодезическую ($n$-1)-ткань $\Sigma_{n-1}$ второго или третьего рода (аналогично, первого или четвертого рода), то она является тканью с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями);

2) если нормализованное голономное распределение $\Re$ в $P_n$ несет сопряженную геодезическую ($n$-1)-ткань:

*а*) первого рода, или
*б*) второго рода, или
*в*) третьего рода, или
*г*) четвертого рода,

то соответственно справедливо:

*а*) поле нормалей первого рода $\nu_n^i$ совпадает с полем её гармонических плоскостей $q_n^i$, а поле нормалей второго рода $\nu_i^0$ – любое;

*б*) поле нормалей второго рода $\nu_i^0$ совпадает с полем её гармонических плоскостей $q_i^0$, а поле нормалей первого рода $\nu_n^i$ - произвольное;

*в*) поле нормалей первого рода $\nu_n^i$ взаимно полю её гармонических плоскостей $q_i^0$, а при этом поле нормалей второго рода $\nu_i^0$ – любое;

*г*) поле нормалей второго рода $\nu_i^0$ взаимно полю её гармонических плоскостей $q_n^i$, а поле нормалей первого рода $\nu_n^i$ – произвольное.

В п.2 изучается геометрия сопряженных чебышевских ($n$-1)-тканей $\Sigma_{n-1}$ на нормализованном голономном распределении $\mathfrak{R}$; найдены аналитические условия, при выполнении которых сопряженная ткань $\Sigma_{n-1}$ на нормализованном подмногообразии $\mathfrak{R}$ является чебышевской от первого до шестого рода.

Доказана теорема II.17: на взаимно нормализованном голономном распределении $\mathfrak{R}$ в $P_n$ сопряженная чебышевская ($n$-1)-ткань $\Sigma_{n-1}$ пятого (шестого) рода является сопряженной чебышевской тканью второго (первого) рода; справедливо и обратное.

Установлена связь между чебышевскими и геодезическими тканями на распределении $\mathfrak{R}$ (теорема II.18 ): если при некоторой нормализации голономное распределение $\mathfrak{R}$ в $P_n$ несет:

*а*) сопряженную чебышевскую ткань $\Sigma_{n-1}$ первого (второго) рода, то она является сопряженной геодезической ($n$-1)-тканью второго (первого) рода; такая ткань относится к классу тканей с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями), и поле нормалей второго (первого) рода совпадает с полем ее гармонических плоскостей $q_i^0$ ( $q_n^i$ );

*б*) сопряженную чебышевскую ($n$-1)-ткань $\Sigma_{n-1}$ третьего (четвертого) рода, то она является геодезической тканью четвертого (третьего) рода; такая ткань относится к классу тканей с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями (псевдофокусами), и поле нормалей второго (первого) рода $\nu_i^0$ ($\nu_n^i$) взаимно полю ее гармонических плоскостей $q_n^i$ ( $q_i^0$).

*Определение.* Распределение гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $P_n$, несущее сопряженную ($n$-1)-ткань $\Sigma_{n-1}$, для которой касательные к любой ее линии при смещении вдоль любой другой линии ткани образуют двумерную развертывающуюся поверхность, называется гиперсопряженной системой $\mathfrak{R}$[29].

Доказана теорема II.19: голономное распределение гиперплоскостных

---

[29] *Смирнов Р.В.* Преобразования Лапласа *p*-сопряженных систем // Докл. АН СССР. – 1950. – Т.71. - № 3. – С. 437-439.

элементов $\Re$, погруженное в проективное пространство $P_n$ $(n \geq 3)$ и несущее при некоторой нормализации сопряженную чебышевскую ткань $\Sigma_{n-1}$ хотя бы одного из 6 родов, является гиперсопряженной системой.

В **третьей главе** диссертации изучается внутренняя геометрия двойственных проективных и аффинных связностей, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1}$ в пространстве $P_n$.

В **<u>§ 1</u>** рассматриваются двойственные проективные связности, индуцируемые на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ при ее классических оснащениях (оснащении в смысле Э.Картана, Э.Бортолотти, сильном оснащении).

Основным результатом п.1 является теорема III.1: оснащение в смысле Э.Картана регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ индуцирует на ней пять пространств проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$, $q = \overline{1,5}$ с формами связности $\{\overset{q}{\omega}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}\}$; при этом пространства $\overset{4}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{5}{P}_{n-1,n-1}$ - вообще говоря, с кручением (одинаковым), остальные три - без кручения. Приведены строения компонент тензоров кривизны-кручения $\overset{q}{R}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}st}$ индуцированных пространств $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$.

Центральным результатом <u>п.2</u> является теорема III.3: на оснащенной в смысле Э.Бортолотти регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ индуцируется пять пространств проективной связности $\overset{q}{\bar{P}}_{n-1,n-1}$, $q = \overline{1,5}$ с формами связности $\{\overset{q}{\bar{\omega}}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}\}$; при этом пространства $\overset{4}{\bar{P}}_{n-1,n-1}$, $\overset{5}{\bar{P}}_{n-1,n-1}$ - с кручением (одинаковым); остальные три – без кручения. Найдены строения компонент тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств $\overset{q}{\bar{P}}_{n-1,n-1}$.

Справедливы предложения (следствия III.1, III.2):

1) на сильно оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ внутренним образом индуцируется пять пар двойственных пространств проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{q}{\bar{P}}_{n-1,n-1}$, $q = \overline{1,5}$.

2) если при некотором сильном оснащении регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ хотя бы по одному пространству из каждой тройки $\{\overset{q}{P}_{n-1,n-1}\}$ и $\{\overset{q}{\bar{P}}_{n-1,n-1}\}$, $q = \overline{1,3}$, индуцируемой на данном многообразии, вырождается в проективное пространство, то нормализация подмногообразия $V_{n-1}$ является сопряженной и гармоничной.

В **<u>§ 2</u>** исследуются двойственные аффинные связности, индуцируемые на нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$.

Основной результат параграфа сформулирован в теореме III.6: на общей нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1}$ в касательном расслоении индуцируется шесть пар двойственных аффинных связностей $(\overset{a}{\nabla}, \overset{a}{\overline{\nabla}})$, $a=\overline{1,6}$, определяемых системами форм $(\overset{a}{\theta}{}^i_j, \overset{a}{\overline{\theta}}{}^i_j)$. При этом пространства аффинной связности $\overset{2}{A}_{n-1,n-1}$, $\overset{3}{A}_{n-1,n-1}$ $(\overset{2}{\overline{A}}_{n-1,n-1}, \overset{3}{\overline{A}}_{n-1,n-1})$ и $\overset{1}{A}_{n-1,n-1}$, $\overset{6}{A}_{n-1,n-1}$ $(\overset{1}{\overline{A}}_{n-1,n-1}, \overset{6}{\overline{A}}_{n-1,n-1})$ обладают общими геодезическими линиями, то есть являются проективными (теорема III.7).

Найдены инвариантные аналитические условия эквиаффинности связностей $\overset{\breve{a}}{\nabla}(\overset{\breve{a}}{\overline{\nabla}})$, $\breve{a}=\overline{1,3}$ без кручения (теоремы III.8, III.9):

1) аффинные связности $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla} (\overset{1}{\overline{\nabla}}, \overset{2}{\overline{\nabla}})$ могут быть эквиаффинными лишь одновременно; условием эквиаффинности связностей $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ является обращение в нуль кососимметричного тензора $N^0_{st}(\nu) \overset{def}{=} n\nu^0_{[st]} + \nu^k_{n[s}\Lambda^n_{t]k}$; связности $\overset{1}{\overline{\nabla}}, \overset{2}{\overline{\nabla}}$ эквиаффинны тогда и только тогда, когда тензор $N^0_{st} + (n+1)T^0_{[st]}$ обращается в нуль;

2) аффинная связность $\overset{3}{\nabla}$ эквиаффинна тогда и только тогда, когда тензор $N^0_{st} - nT^0_{[st]}$ обращается в нуль; условием эквиаффинности двойственной ей связности $\overset{3}{\overline{\nabla}}$ является обращение в нуль тензора $N^0_{st} + (2n+1)T^0_{[st]}$.

В **<u>§ 3</u>** установлена связь между двойственными проективными и аффинными связностями, индуцируемыми на оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ (теоремы III.10, III.11): на оснащенной в смысле Нордена-Картана (Нордена-Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ пространство аффинной связности $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ $(\overset{q}{\overline{A}}_{n-1,n-1})$ при каждом фиксированном $q=\overline{1,5}$ является сужением соответствующего пространства проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ $(\overset{q}{\overline{P}}_{n-1,n-1})$, причем справедливо:

1) соответствующие пространства $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ $(\overset{q}{\overline{P}}_{n-1,n-1})$ и $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ $(\overset{q}{\overline{A}}_{n-1,n-1})$, $q=\overline{1,5}$ имеют равные тензоры кручения: $\overset{q}{R}{}^i_{0st} = \overset{q}{r}{}^i_{0st}$ $(\overset{q}{\overline{R}}{}^i_{0st} = \overset{q}{\overline{r}}{}^i_{0st})$;

2) при любом фиксированном $q$ пространство $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ ($\overset{\underline{q}}{P}_{n-1,n-1}$), индуцируемое при различном выборе поля оснащающей точки $K_n(A_0)$ (гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$), имеет одно и то же сужение $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ ($\overset{\underline{q}}{A}_{n-1,n-1}$).

**<u>§ 4</u>** третьей главы посвящен изучению средней геометрии сопряженных аффинных связностей ($\overset{a}{\nabla},\overset{\underline{a}}{\nabla}$), ($\overset{\breve{a}_1}{\nabla}$, $\overset{\breve{a}_2}{\nabla}$), $a=\overline{1,6}$, $\breve{a}_1,\breve{a}_2=\overline{1,3}$, $\breve{a}_1\neq\breve{a}_2$, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_n$.

В **<u>§ 5</u>** гл.III рассматриваются некоторые вопросы приложения двойственных аффинных связностей $\overset{a}{\nabla}$ и $\overset{\underline{a}}{\nabla}$, $a=\overline{1,6}$, индуцируемых на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_n$, к изучению внутренней геометрии сетей $\Sigma_{n-1}$ на данном подмногообразии $V_{n-1}$.

Центральные результаты <u>п.1,</u> в котором на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_n$ изучаются сопряженные геодезические сети четырех родов, изложены в теоремах III.19, III.20; они являются аналогами теорем III.15, III.16.

В <u>п.2,</u> посвященном чебышевским сетям на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_n$, найдены аналитические условия, при выполнении которых сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}\subset V_{n-1}$ является чебышевской от первого до шестого рода; доказаны теоремы III.21, III.22, которые являются аналогами теорем II.17, II.18.

Показано (теорема III.23), что нормализованная регулярная гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_n$ $(n\geq 3)$, несущая сопряженную относительно поля тензора $\Lambda_{ik}^{n}$ чебышевскую сеть $\Sigma_{n-1}$ хотя бы одного из шести родов, является гиперсопряженной системой.

## III. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Доказано, что на нормализованном регулярном голономном распределении гиперплоскостных элементов $\Re$ в $P_n$ в касательном расслоении кроме базовой аффинной связности $\nabla$ ($\overline{\nabla}$, двойственной связности $\nabla$) индуцируется еще двадцать четыре, вообще говоря, различные аффинные связности $\overset{ab}{\nabla}$($\overset{\underline{ab}}{\nabla}$, двойственные соответственно связностям $\overset{ab}{\nabla}$), $a=\overline{1,6}$, $b=\overline{1,4}$, определяемые системами слоевых форм $\{\overset{ab}{\theta}{}^i_j\}$ (соответственно

$\{\overset{ab}{\overline{\theta}}{}^{i}_{j}\}$).

2. Установлено, что оснащение в смысле Э.Картана (Э.Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ индуцирует на ней пять пространств проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$($\overset{q}{\overline{P}}_{n-1,n-1}$), $q=\overline{1,5}$ с формами связности $\{\overset{q}{\omega}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}\}$ (соответственно $\{\overset{q}{\overline{\omega}}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}\}$); при этом пространства $\overset{4}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{5}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{4}{\overline{P}}_{n-1,n-1}$, $\overset{5}{\overline{P}}_{n-1,n-1}$ - вообще говоря, с кручением, остальные - без кручения.

3. Доказано, что на общей нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1}$ в касательном расслоении индуцируется шесть пар двойственных аффинных связностей $(\overset{a}{\nabla}, \overset{a}{\overline{\nabla}})$, $a=\overline{1,6}$, определяемых системами форм $(\overset{a}{\theta}{}^{i}_{j}, \overset{a}{\overline{\theta}}{}^{i}_{j})$.

4. Установлена взаимосвязь между индуцируемыми на оснащенной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ проективными и аффинными связностями, а именно:

на оснащенной в смысле Нордена-Картана (Нордена-Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ пространство аффинной связности $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ ($\overset{q}{\overline{A}}_{n-1,n-1}$) при фиксированном $q=\overline{1,5}$ является сужением соответствующего пространства проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$ ($\overset{q}{\overline{P}}_{n-1,n-1}$).

5. Найдены приложения аффинных связностей, индуцируемых на нормализованной гиперповерхности - как неголономной $\Re$, так и голономной $V_{n-1}$, - к изучению двойственной геометрии сопряженных ($n$-1)-тканей (сетей) на данном подмногообразии $\Re(V_{n-1})$, а именно геодезические ткани (сети) первого-четвертого родов и чебышевские ткани (сети) первого-шестого родов.

## IV. Работы автора, опубликованные по теме диссертации


1. *Долгов С.В.* Двойственные аффинные связности на нормализованной гиперповерхности // Сб. науч. тр. докторантов, науч. работников и аспирантов. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я.Яковлева, 1999. – Вып. 6. – С. 169-176.
2. *Долгов С.В.* Сопряженные и средние аффинные связности на регулярной гиперповерхности // Сб. науч. тр. докторантов, науч. работников, аспи-

рантов и студентов. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я.Яковлева, 2000. – Вып. 7. – С. 30-35.

3. *Долгов С.В.* Сужения пространств проективной связности на оснащенной гиперповерхности // Сб. науч. тр. докторантов, науч. работников, аспирантов и студентов. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я.Яковлева, 2000. – Вып. 8. – С. 16-22.
4. *Долгов С.В.* О двойственно-сопряженных аффинных связностях на регулярной гиперповерхности // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. науки. – Чебоксары. - 2000. - № 1. – С. 35-40.
5. *Долгов С.В.* Двойственная внутренняя геометрия нормализованной гиперповерхности // ВИНИТИ РАН. – 2000. - № 3041-В00 Деп. –22с.
6. *Долгов С.В.* Двойственные пространства проективной связности на оснащенной гиперповерхности // ВИНИТИ РАН. – 2001. - № 764-В2001 Деп. – 21с.
7. *Долгов С.В.* О двойственно-сопряженных аффинных связностях на голономном распределении гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Сб. науч. тр. докторантов, науч. работников, аспирантов и студентов. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я.Яковлева, 2001. – Вып. 9. –Т.1. - С. 78-84.
8. *Долгов С.В.* Пространства аффинной связности на распределении гиперплоскостных элементов // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. Науки. – Чебоксары. - 2001. - № 2. – С. 36-44.
9. *Долгов С.В.* Двойственные проективные связности на сильно оснащенной гиперповерхности // Тезисы докл. 9-й Междунар. конф. «Математика. Образование. Экономика. Экология». – Чебоксары: ЧГУ, 2001. – С. 41.
10. *Долгов С.В.* Двойственные аффинные связности на регулярном распределении гиперплоскостных элементов // ВИНИТИ РАН. – 2001. - № 1643-В2001 Деп. – 26с.
11. *Долгов С.В.* ($n$-1)-ткани на голономном распределении гиперплоскостных элементов // ВИНИТИ РАН. – 2001. - № 2006 -В2001 Деп. – 20с.
12. *Долгов С.В.* Геодезические и чебышевские сети на нормализованной гиперповерхности проективного пространства // Материалы межд. науч. молодежной школы-конференции. Казань: Изд-во ДАС, 2001. – С.84-85.

---

Подписано к печати «___»____________ 2002 г. Формат бумаги 60x84/16.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №_________. Бесплатно.

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного университета.
428015, Чувашская Республика, Чебоксары, Московский просп., 15

---