

0-733987-1

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

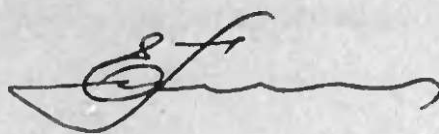
Полякова Катерина Валентиновна

**Параллельные перенесения
на поверхности проективного пространства**

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Казань - 2003

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и геометрии математического факультета Калининградского государственного университета

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент
Ю.И.Шевченко.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук,
профессор А.В.Столяров;
кандидат физико-математических наук, доцент
А.С.Подковырин.

Ведущая организация - Московский государственный университет.

Защита состоится «24» апреля 2003 г. в 11 час 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан « 20 » марта 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного
совета, кандидат физико-
математических наук

М.А. Малахальцев

М.А.Малахальцев

I. Общая характеристика диссертации

Работа посвящена изучению параллельных перенесений направлений и плоскостей в линейных и групповых связностях вдоль линий на поверхности проективного пространства, рассматриваемой в реперах 0-го, 1-го и 2-го порядков. Параллельные перенесения задаются как вполне, так и не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений с помощью ковариантных дифференциалов квазитензоров в случае групповых связностей и проективно-ковариантных дифференциалов в случае линейных связностей.

Актуальность темы обусловлена тем, что в настоящее время активно изучаются различные классы связностей, индуцированных на подмногообразиях, и исследуются их применения в теории дифференциальных уравнений.

Основы теории индуцированных связностей заложены в работах Леви-Чивита, Э. Картана, Е.Бортолотти, А.П. Нордена и Г.Ф. Лаптева. Большое внимание исследованию дифференциально-геометрических структур на подмногообразиях и, в частности, связностям уделяли А.П. Широков, Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.К. Рыбников, А.В. Чакмазян и другие. Ю.Г. Лумисте построил развитую теорию индуцированных связностей в погруженных проективных и аффинных расслоениях, в частности, он подробно исследовал связности на подмногообразиях однородных пространств. Используя метод Картана-Лаптева (метод продолжений и охватов, редукции расслоений реперов высшего порядка), Л.Е. Евтушик построил геометрическую теорию дифференциальных уравнений высших порядков.

А.К. Рыбников исследовал аффинные и проективные связности, индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного и проективного пространств. Он предложил геометрическую трактовку понятия связности на гладких многообразиях с помощью оснащающих подпространств в касательных пространствах. А.В. Чакмазян изучил нормальную центропроективную связность в геометрии нормализованных подмногообразий проективного пространства. А.В.Столяров построил общую двойственную теорию оснащенных многообразий, погруженных в пространство с фундаментально-групповой связностью, в работах его учеников подробно изучаются наиболее интересные примеры таких многообразий.

Отметим, что параллельное перенесение является наиболее наглядной геометрической интерпретацией понятия связности. Данный в работе подход для интерпретации связности, индуцированной на поверхности проективного пространства, с помощью параллельных перенесений в ряде случаев дает возможность изучить не вполне интегрируемые системы дифференциальных уравнений, задающих параллельные перенесения.

Целью работы является изучение связностей в расслоениях реперов поверхности проективного пространства, которое включает в себя:

- 1) построение фундаментально-групповой связности в главном расслоении, ассоциированном с поверхностью;
- 2) выяснение геометрической характеристики связности и ее подсвязностей с помощью параллельных перенесений оснащающих плоскостей и направлений;
- 3) нахождение геометрических условий совпадения компонент объектов связностей различных типов и выяснение значения кривизны такой связности;
- 4) нахождение геометрических интерпретаций групповых связностей и их подсвязностей, индуцированных оснащениями.

Методика исследования основана на методе продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева и применении разработанного им способа задания связности в главном расслоении.

Научная новизна полученных результатов. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Построен проективно-ковариантный дифференциал, позволяющий геометрически интерпретировать линейные связности, индуцированные на поверхности проективного пространства, с помощью абсолютно параллельных перенесений направлений.
2. Построены объекты касательной линейной протосвязности и центро-проективной протосвязности, найдены пучки групповых связностей и дана их геометрическая характеристика.
3. Построен тензор параллельности, компоненты которого выражаются через компоненты объекта кривизны и композиционно оснащающего квазитензора. Доказано, что при обращении в нуль тензора параллельности параллельное перенесение становится абсолютным.
4. Построены параллельные перенесения направлений, заданные вполне и не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений и определяемые с помощью ковариантных дифференциалов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении дифференциальной геометрии поверхностей проективного, конформного и аффинного пространств.

Выполненная работа может использоваться в научных исследованиях и при чтении специальных курсов в Калининградском госуниверситете.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: математический семинар Калининградского государственного университета (1994-2002); научные конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов Калининградского государственного университета (1996-1999); международный семинар им. Н.И.Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей" (Казань, 1997); международный конгресс математиков (Берлин, 1998); школа-конференция, посвященная 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 1999); международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Г.Ф. Лаптева "Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики" (МГУ, 1999); международная молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения» (Казань, 2001,2002); международный математический семинар к 140-летию со дня рождения Давида Гильберта из Кенигсберга и 25-летию математического факультета (Калининград, 2002).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 19 печатных работ, в том числе, 9 статей и 10 тезисов докладов, сделанных на конференциях.

Вклад автора в разработку проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные работы выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор и общая характеристика работы), трех глав и списка использованной литературы, включающего 58 наименований. Полный объем работы составляет 105 страниц машинописного текста.

II. Краткое содержание диссертации

Во введении приведен краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации.

В главе 1 поверхность проективного пространства P_n изучается в репере 0-го порядка и обозначается X_m^0 [5,9,10,13]. В §§1,2 находятся дифференциальные уравнения фундаментального объекта r -го порядка $\{\Lambda_i^a, \Lambda_{ij}^a, \dots, \Lambda_{i_1 \dots i_p}^a\}$ поверхности. Строится последовательность форм, получающихся при продолжении структурных уравнений базисных форм поверхности. Эти формы оказываются симметричными по нижним индексам. Таким образом, над поверхностью X_m^0 построено расслоение голономных линейных реперов произвольного порядка, типовым слоем которого является голономная дифференциальная группа Вагнера-Лаптева.

В главном расслоении центропроективных реперов 1-го порядка, ассоциированном с поверхностью, задается способом Лаптева центропроективная связность $\Gamma = \{\Gamma_{JI}^I, \Gamma_{II}^I\}$. Компоненты центропроективной кривизны $R = \{R_{Jij}^I, R_{Iij}^I\}$ удовлетворяют уравнениям

$$dR_{Jij}^I + R_{Jij}^K \omega_K^I - R_{Kij}^I \omega_I^K - R_{Jkj}^I (\omega_i^k + \Lambda_i^a \omega_a^k) - R_{Jik}^I (\omega_j^k + \Lambda_j^a \omega_a^k) = R_{Jijk}^I \omega^k,$$

$$dR_{Iij}^I - R_{Iij}^J \omega_J^I - R_{Ikj}^I (\omega_i^k + \Lambda_i^a \omega_a^k) - R_{Iik}^I (\omega_j^k + \Lambda_j^a \omega_a^k) + R_{Iij}^J \omega_J^I = R_{Iijk}^I \omega^k.$$

Центропроективная кривизна является псевдотензором, т.е. объектом, обращение которого в нуль инвариантно. Псевдотензором является также подобъект линейной кривизны R_{Jij}^I .

В §§4,5 производится оснащение Бортолотти, состоящее в присоединении к каждой точке поверхности гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , задаваемой квазитензором λ_i . Оно индуцирует центропроективные связности двух типов в ассоциированном расслоении. Доказаны теоремы (4.1; 5.1):

1) связности двух типов совпадают тогда и только тогда, когда неподвижна гиперплоскость Бортолотти;

2) необходимым и достаточным условием обращения кривизны центропроективной связности (1-го и 2-го типов) в нуль является неподвижность гиперплоскости Бортолотти.

В §6 при изучении параллельных перенесений гиперплоскости Бортолотти в двух связностях исследуются вырожденные параллельные перенесения 1-го типа (гиперплоскость неподвижна) и 2-го типа (гиперплоскость произвольно смещается во всем пространстве).

Строится проективно-ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора λ_1 , с помощью которого дается геометрическая интерпретация линейной связности Γ_{ji}^1 с помощью параллельного перенесения направления. Также изучены параллельные перенесения направления в центропроективной связности 1-го и 2-го типов с помощью ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_1$. С использованием внешнего дифференциала от ковариантного дифференциала строится псевдотензор, при обращении которого в нуль перенесение является абсолютным. В §§7,8 параллельные перенесения нормали 2-го рода Нордена описаны в линейной связности Γ_{ji}^1 .

В §§9,10 построены объект касательной линейной протосвязности Π_{jk}^1 и объект центропроективной протосвязности $\{\Pi_{jk}^1, \Pi_{ij}\}$, которые геометрически охарактеризованы параллельными перенесениями касательного направления, определенными с помощью проективно-ковариантного и ковариантного дифференциалов. Доказано, что кручение индуцированной касательной линейной протосвязности равно нулю.

В главе 2 поверхность проективного пространства P_n изучается в репере 1-го порядка и обозначается X_m^1 [1,2,6,7,11,12,14-19]. В §§1,2 над поверхностью строится расслоение голономных линейных реперов произ-

вольного порядка. С поверхностью ассоциируется главное расслоение 1-го порядка $G(X_m^1)$, в котором задается групповая связность $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}^i\}$, объект кривизны $R = \{R_{jkl}^i, R_{ijk}, R_{bij}^a, R_{ajk}^i, R_{aij}^i\}$ которой является тензором, содержащим, в частности, подтензор линейной кривизны R_{jkl}^i . Ассоциированное расслоение $G(X_m^1)$ содержит в частности подрасслоение линейных реперов с уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i \quad (\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j),$$

в котором связность задается с помощью форм $\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k$. Объект Γ_{jk}^i является объектом касательной линейной связности и удовлетворяет уравнениям $d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^l \omega_l^i - \Gamma_{lk}^i \omega_j^l - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l + \omega_{jk}^l = \Gamma_{jkl}^i \omega^l$. Тензор групповой кривизны R содержит подтензор касательной линейной кривизны.

В §4 производится композиционное оснащение, состоящее в задании плоскостей Картана C_{n-m-1} и нормалей 2-го рода Нордена N_{m-1} . Оно задается квазитензором $\lambda = \{\lambda_i, \lambda_a^i, \lambda_a\}$. Доказано, если плоскость Картана смещается в нормали 1-го рода Нордена, натянутой на точку касания и соответствующую плоскость Картана, то нормализация 1-го рода порождает оснащение Картана-Остиану, совпадающее с исходным оснащением Картана. В §5 получены и рассмотрены три типа охвата компонент объекта групповой связности. Приведен способ нахождения охватов и примеры его применения. В §6 исследуются тензоры деформации связностей всех трех типов. Доказано, что условиями совпадения разных типов связностей является неподвижность гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , натянутой на плоскость Картана C_{n-m-1} и нормаль 2-го рода N_{m-1} . Установлено, что при этом кривизна индуцированной связности равна нулю.

В §8 построен тензор параллельности $M = \{M_{ijk}, M_{ajk}^i, M_{aij}^i\}$, компоненты которого есть комбинации компонент объекта кривизны R с коэффици-

ентами - компонентами композиционно оснащающего квазитензора λ , при обращении которого в нуль параллельное перенесение становится абсолютным. Подтензор M_{ijk} , например, выражается следующим образом $M_{ijk} = R_{ijk} - \lambda_1 R_{ijk}^1$. В §9 определены параллельные перенесения плоскости Картана и нормали 2-го рода Нордена в связностях 1-го и 2-го типа.

В §§10,11 с помощью проективно-ковариантных дифференциалов $\bar{\nabla}\mu^i, \bar{\nabla}\mu^a$ квазитензоров μ^i, μ^a , задающих касательное и нормальное направления, получены геометрические характеристики касательной Γ_{jk}^i и нормальной Γ_{bi}^a линейных связностей, которые совпадают с перенесениями А.П.Нордена и А.В.Чакмазяна. С помощью ковариантных дифференциалов в §§13,14 изучены параллельное перенесение касательного направления в коэффинной связности и параллельные перенесения нормального направления, заданные вполне и не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений.

В главе 3 поверхность рассматривается в репере 2-го порядка и обозначается X_m^2 [3,4,8]. Найдены уравнения главного расслоения, ассоциированного с поверхностью, типовым слоем которого является подгруппа стационарности соприкасающейся плоскости. Показывается двойственный характер действия некоторых групп, являющихся типовыми слоями под-расслоений главного расслоения. В §2 в ассоциированном расслоении задается групповая связность $\Gamma = \{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{vi}^u, \Gamma_{ui}^a, \Gamma_{uj}^i, \Gamma_{ui} \}$, объект кривизны $R = \{ R_{jkl}^i, R_{ijk}, R_{bij}^a, R_{ajk}^i, R_{ajj}, R_{vij}^u, R_{uij}^a, R_{ujk}^i, R_{uij} \}$ которой является тензором, содержащим ряд подтензоров.

Произведено композиционное оснащение поверхности состоящее в присоединении к каждой точке поверхности нормали 2-го рода Нордена и двух плоскостей, которые в прямой сумме с касательной и соприкасаю-

щейся плоскостями дают соответственно соприкасающуюся плоскость и все пространство. Композиционное оснащение индуцирует групповые связности двух типов в ассоциированном расслоении. В §4 изучается тензор деформации связностей и даются геометрические условия совпадения связностей двух типов и некоторых их подсвязностей. Доказана теорема: если оснащающая плоскость, дополняющая соприкасающуюся плоскость до всего пространства, смещается в нормали 1-го рода, то композиционное оснащение порождает обобщенную нормализацию, состоящую в задании нормалей 1-го, 2-го и 3-го рода.

В §7 определены и изучены параллельные перенесения оснащающих плоскостей. В линейных связностях $\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{vi}^u$ охарактеризованы параллельные перенесения касательного и двух нормальных направлений (принадлежащего и не принадлежащего соприкасающейся плоскости) с помощью проективно-ковариантных дифференциалов.

III. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1) Построены параллельные перенесения плоскостей и направлений, заданные вполне и не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений.

2) Построены объекты и формы касательной линейной и центропроективной протосвязностей. Даны геометрические интерпретации протосвязностей посредством параллельных перенесений касательного направления, описанных с помощью проективно-ковариантного и ковариантного дифференциалов.

3) Доказано, что обращение в нуль тензора параллельности, компоненты которого есть линейные комбинации компонент объекта кривизны с коэффициентами - компонентами композиционно оснащающего квазитензора, является необходимым и достаточным условием того, что параллельное перенесение является абсолютным.

4) Найдены и геометрически охарактеризованы условия совпадения различных типов связностей.

IV. Работы автора, опубликованные по теме диссертации

1. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 1996. – Вып.27. – С.63-70.

2. *Полякова К.В.* О параллельных перенесениях направлений вдоль поверхности проективного пространства // XXVII науч. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов. Тез. докл. Ч.6. – Калининград, 1996. – С.13-14.

3. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения на многообразии соприкасающихся плоскостей поверхности // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 1997. – Вып.28. – С.59-64.

4. *Полякова К.В.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием пар касательной и соприкасающейся плоскостей поверхности // Тр. геом. семин. – Казань, 1997. – Вып.23. – С.99-112.

5. *Полякова К.В.* Вырожденные параллельные перенесения на поверхности как точечном многообразии // XXVIII науч. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов. Тез. докл. Ч.6. – Калининград, 1997. – С.7.

6. Полякова К.В. Параллельные перенесения, заданные не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 1998. – Вып.29. – С.48-53.

7. Полякова К.В. Не вполне интегрируемые параллельные перенесения на многообразии касательных плоскостей // XXIX науч. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов. Тез. докл. Ч.6. – Калининград, 1998. – С.7.

8. Polyakova K.V. Parallel displacements along manifold of osculating planes of a surface // International congress of mathematicians, Berlin, 1998. – Abstracts of short communications and poster sessions. – P.78-79.

9. Полякова К.В. О голономности поверхности проективного пространства // XXX науч. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов. Тез. докл. Ч.6. – Калининград, 1999. – С.7-8.

10. Полякова К.В. Вырожденные параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 1999. – Вып.29. – С.64-68.

11. Полякова К.В. Три типа связностей на поверхности проективного пространства // Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – Казань, 1999. – С.179-180.

12. Полякова К.В. Специальные оснащения Бортолотти и Картана на поверхности // Материалы международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г.Ф. Лаптева "Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики". – Тез. докл. М., 1999. – С.36-37.

13. Полякова К.В. Понятие протосвязности на поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. –Калининград, 2000. –Вып.31. –С.58-65.

14. Полякова К.В. Тензор параллельности // Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского. –Казань, 2000. –Т.5. –С.174.

15. Полякова К.В. Касательная линейная и коаффинная связности на поверхности проективного пространства // Проблемы мат. и физ. наук. –Калининград, 2000. –С.30-33.

16. Полякова К.В. Индуцированные центропроективная и линейная связности на поверхности // Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского. –Казань, 2001. –Т.12. –С.52-53.

17. Полякова К.В. Тензор параллельности и абсолютные параллельные перенесения // Диф. геом. многообр. фигур. –Калининград, 2001. –Вып.32. –С.80-83.

18. Полякова К.В. Псевдосвязность как специальная геометрическая связность // Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского. –Казань, 2002. –Т.18. –С.71-72.

19. Polyakova K.V. Pseudoconnection as special geometric connection // Докл. межд. мат. семин.: к 140-летию со дня рождения Давида Гильберта из Кенигсберга и 25-летию математического факультета. –Калининград, 2002. –С.138-144.