САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СОКОЛОВ Леонид Леонидович

Интегрируемость и стохастичность в задаче N тел

Специальность 01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2002

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный консультант доктор физико-математических наук, профессор К.В. Холшевников

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук	Батраков Юрий Васильевич
доктор физико-математических наук	Кутузов Сергей Алексеевич
доктор физико-математических наук	Шевченко Иван Иванович

Ведущая организация: Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга

Защита диссертации состоится 6 марта 2003 г. в 17-00 на заседании диссертационного совета Д.212.232.15 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, ауд. 2143 (математико-механический факультет).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ.

Автореферат разослан 20 декабря 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Орлов В.В.

1 Общая характеристика работы

Задача N тел, т.е. описание возможных движений N материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона, является одной из основных фундаментальных проблем небесной механики и динамики. Роль ее в развитии математики и естествознания невозможно переоценить. За триста лет в этой проблеме получено немало результатов первостепенной важности; еще больше идей и результатов в смежных областях науки обязаны своим происхождением небесномеханической задаче N тел. Сегодня она попрежнему далека от исчерпывающего решения, и причина этого — сложность проблемы. В разное время по-разному понимали, что значит "решить задачу N тел". В настоящей работе эта задача рассматривается как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений в астрономии и особенно в механике космического полета, где возникает много новых весьма сложных проблем конструирования и оптимизации траекторий задачи N тел.

Актуальность темы обусловлена как многочисленными приложениями задачи N тел в астрономии и механике космического полета, так и ролью этой задачи в математике. В течение трех столетий она была источником новых математических идей и методов, продолжая играть эту роль и сегодня. Одно из самых модных направлений исследований динамических систем различного происхождения, появившееся в последние десятилетия, связано с явлением, получившим название "детерминированный хаос". Впервые соответствующие эффекты были открыты А.Пуанкаре еще в конце XIX века в задаче трех тел (расщепление сепаратрис). Это открытие почти на век обогнало свое время. Сегодня же число симпозиумов, монографий и тем более статей, посвященных стохастическим свойствам движений в детерминированных системах, не поддается никакому учету.

Нахождение полного набора интегралов системы дифференциальных уравнений позволяет исследовать свойства решений с исчерпывающей полнотой. Поэтому интегрируемость — важнейшее свойство динамических систем. Сравнительно недавно получен целый ряд важных результатов в этом направлении [8]. Тем более интересно уточнить и дополнить классические результаты, касающиеся неинтегрируемости задачи N тел.

Одно из актуальных приложений задачи N тел в механике космического полета — конструирование траекторий космических аппаратов с гравитационными маневрами у планет и их спутников. Эта актуальность обусловлена с одной стороны перспективностью гравитационного маневрирования как средства передвижения в дальнем космосе, с другой — сложностью соответствующих семейств траекторий и трудностью задач их исследования.

Цели работы. Основные цели настоящей работы — развитие методов решения небесномеханической задачи N тел, получение качественных свойств и количественных характеристик некоторых типов траекторий, в том числе представляющих интерес для астрономии и механики космического полета.

Научная новизна работы. Настоящая диссертация посвящена разработке *новых* методов решения небесномеханической задачи N тел и получению на этой основе *новых* результатов, качественных свойств и количественных характеристик траекторий небесных тел. Так, *новыми* являются: установление региональной интегрируемости задачи N тел; возможность построения точного аналитического решения для некоторых траекторий обмена, распада и захвата в задаче трех тел; приближенное описание семейств траекторий со многими сближениями, позволяющее сравнительно простыми, а иногда элементарными средствами устанавливать свойства и характеристики сложно устроенных движений; метод учета возмущений для неустойчивых стохастических движений со сближениями и обоснование применимости приближенного решения задачи N тел в этих случаях.

Научная и практическая ценность работы. В настоящей работе достигнуто лучшее понимание классической проблемы интегрируемости динамических систем на примере системы N

материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона. Показано, что в некотором смысле задача N тел интегрируема, и это не противоречит общеизвестным результатам о неинтегрируемости этой задачи.

Разработаны методы, позволяющие исследовать сложные траектории с тесными сближениями в задаче N тел, а также строить такие траектории с требуемыми характеристиками. Полученные результаты могут иметь большую практическую ценность при конструировании траекторий космических аппаратов с гравитационными маневрами. Гравитационное маневрирование, при котором используется даровая гравитационная энергия планет, является одним из наиболее перспективных способов передвижения в дальнем космосе. Разработанные методы позволяют получить предварительные оценки характеристик рассматриваемых сложных траекторий элементарными средствами. Достигнуто лучшее понимание стохастических свойств движений в детерминированных динамических системах на примере задачи N тел. Семейства таких движений могут быть описаны с помощью случайных процессов. Особая ценность соответствующих методов и результатов в том, что индивидуальные стохастические траектории с заданными свойствами практически невозможно построить, используя лишь численное интегрирование уравнений движения даже с использованием суперкомпьютеров. Дается обоснование использования приближенных методов при построении сложных траекторий.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Метод получения точных решений задачи N тел для всех значений времени в случае больших энергий вне тесных сближений, оценки области применимости этого метода. Сходимость пикаровских итераций для всех значений времени. Интегрируемость задачи N тел в случае больших энергий вне тесных сближений.

2. Метод получения точных решений ограниченной задачи трех тел для всех значений времени в случае больших энергий с одним сближением.

3. Свойства и методы построения порождающих стохастиче-

ских движений в гравитационном поле Солнечной системы. В том числе: метод построения порождающих недетерминированных движений; априорные оценки возможностей гравитационных маневров; области достижимости порождающих стохастических траекторий; характеристики некоторых семейств порождающих траекторий.

4. Методы построения стохастических траекторий, соответствующих порождающим движениям, позволяющие обосновать применимость порождающих движений. Апробация этих методов на семействах стохастических решений ограниченной задачи трех тел.

Структура и объем диссертации.

Диссертация объемом 156 страниц состоит из семи глав, включая введение и заключение, и списка литературы, содержащего 120 наименований. Число рисунков — 14, таблиц — 20.

Апробация работы. Результаты работ по теме диссертации регулярно докладывались на Чтениях по космонавтике, посвященных памяти пионеров исследования космического пространства на секции небесной механики (Москва), на конференциях в Институте Теоретической Астрономии РАН и Институте Прикладной Астрономии РАН (Санкт-Петербург), на Симпозиумах по теоретической и небесной механике (Великие Луки), на семинарах кафедры небесной механики СПбГУ. Кроме того, доклады делались на двух международных конференциях в Петрозаводске (1993 г. и 1995 г.), Симпозиуме МАС N 172 в Париже (1995 г.), конференции в Архангельске (1995 г.), конференции в ГАИШ МГУ (1997 г.), совещании в Казани (1989 г.), совещании в Центре Управления Полетами (Калининград-Королев Московской области, 1989 г.), совещании в Киеве (1990 г.), семинаре кафедры теоретической механики МГУ (рук. В.В.Козлов), городском семинаре по механике космического полета (рук. В.А.Егоров, В.В.Белецкий, МГУ), международной конференции, посвященной памяти проф. К.Ф.Огородникова (Санкт-Петербург, 2000 г.), семинаре обсерватории университета Турку (Финляндия, 2001 г.).

2 Содержание работы

Общая структура диссертации

Первая глава — введение — содержит постановку задачи и ее обоснование (*актуальность, новизна, научное и практическое значение*), краткое изложение содержания, выносимые на защиту результаты, а также перечень основных публикаций и конференций, симпозиумов, семинаров, где докладывались результаты диссертации.

Вторая глава содержит обзор литературы по теме диссертации.

Третья глава посвящена интегрируемым случаям задачи N тел.

Четвертая глава содержит рассмотрение траекторий обмена, захвата и распада в ограниченной задаче трех тел. Для соответствующих траекторий получены описания столь же полные, как и в случаях интегрируемого движения.

Пятая глава посвящена стохастическим траекториям специальным образом ограниченной задачи N тел, приспособленной для описания траекторий космического аппарата с гравитационными маневрами. В этой главе разработаны методы приближенного построения траекторий, а также оценки их возможных характеристик.

Шестая глава содержит описание метода построения точных "стохастических" решений, соответствующих построенным в пятой главе приближенным траекториям. Приведены примеры, обсуждается степень близости точных и приближенных решений.

Седьмая глава — заключение. Обсуждаются результаты, выносимые на защиту, сформулированы нерешенные задачи и направления исследований, интересные по мнению автора.

Одним из основных способов решения задач динамики является интегрирование в смысле *нахождения полного набора интегралов уравнений движения*. В случае успеха этот способ обычно ведет к цели, т.е. дает практически полное количественное и качественное описание возможных движений с умеренной вычислительной трудоемкостью. Общеизвестно утверждение о неинтегрируемости задачи N тел. Оно, несомненно, справедливо. Тем более интересно, что, как оказалось, в некоторых *областях* фазового пространства точные решения задачи N тел на всей оси времени устроены сравнительно просто. В частности, для таких движений имеет место интегрируемость в классическом смысле слова. Соответствующие области фазового пространства имеют большой объем и просто устроены (точнее, можно выделить просто устроенные части этих областей). Например, справедливо следующее утверждение.

Пусть заданы массы, начальные координаты и скорости тел и прямолинейные равномерные движения, определяемые этими начальными координатами и скоростями, не содержат соударений. Умножим массы, координаты и скорости на масштабные скалярные множители M, R, V соответственно. Тогда, если величина M/RV^2 достаточно мала, полученная система интегрируема. Другими словами, система интегрируема либо при достаточно малых массах тел, либо при достаточно больших скоростях тел, либо при достаточно больших расстояниях между телами.

В классической работе [9], посвященной идейным основам КАМ-теории, А.Н.Колмогоров отмечал недостаточную исследованность "простых" случаев задачи N тел, когда эти тела разлетаются. В.М.Алексеев [2] сформулировал утверждение об интегрируемости задачи трех тел в гиперболических случаях. Наши результаты касаются только части гиперболических движений, зато число тел произвольно.

Разработанный в главе 3 инструментарий допускает обобщения на более сложные варианты задачи N тел. Одно из таких обобщений представлено в *главе 4*.

Траектории задачи N тел демонстрируют поразительное богатство свойств. Наряду со сравнительно просто устроенными семействами движений, соответствующими интегрируемым и примыкающим к ним случаям, существуют и весьма сложно устро-

енные множества траекторий. Для них часто используют термин "хаос"в разных вариантах. Не всегда авторы придают "хаотической"терминологии точный смысл. Мы стремились по возможности точно описать свойства сложных траекторий, для чего использовали в главах 5, 6 элементы формализма "квазислучайных движений", разработанного еще в 60-х годах В.М.Алексеевым [3]. В последнее время хаос — модная тема исследований в различных динамических системах. Поэтому рассмотрение сложно устроенных семейств траекторий задачи N тел представляется *актуальным* с теоретической точки зрения.

Мы стремились получить и исследовать точные решения различных вариантов задачи N тел. Иногда это удавалось в полной мере. Поясним используемый нами термин "точное решение". Прежде всего, предполагается наличие конструктивного алгоритма, позволяющего вычислять положения и скорости тел. При этом трудоемкость вычислений должна быть умеренной равномерно по времени на рассматриваемом интервале для всех достаточно высоких значений точности, которые могут представлять интерес. Естественно разделяются случаи, когда нас интересует лишь ограниченный интервал времени и когда — все его значения. Точное решение на ограниченном интервале времени обычно (но не всегда!) может быть получено с помощью численного интегрирования уравнений движения. Более интересно, однако, непродолжаемое точное решение — для всех значений времени. В этом случае одно численное интегрирование вопроса не решает. Далее, понятие "точное решение"подразумевает средства (алгоритмы) для качественного описания всего исследуемого множества движений, также с умеренной трудоемкостью.

Близкое к полному описание траекторий и их свойств оказывается возможным только после разделения задачи N тел на части, выделения из всего множества движений семейств однотипных движений при "индивидуальном подходе"к каждому семейству. Похожая ситуация имеет место в звездной динамике, она обсуждается в докторской диссертации В.А.Антонова [4]. В настоящей работе рассмотрены лишь некоторые типы движений, составляющие малую часть всего их многообразия в задаче N тел. Рассмотренные типы представляют в определенном смысле противоположные случаи — простые, интегрируемые движения и сложные, стохастические, причем стохастичность проявляется явно и сравнительно быстро. Интересно, что во всех рассмотренных случаях (а также и в других, не вошедших в настоящую диссертацию [28], [10]) методику решения задачи удается свести к одной схеме, традиционной для классической небесной механики:

1. Построение порождающих (промежуточных) движений.

2. Исследование свойств порождающих движений.

3. Построение траекторий (точных решений), соответствующих порождающим движениям, в рамках теории возмущений.

4. Обоснование применимости порождающих движений (переносимость свойств порождающих движений на точные решения, в т.ч. на бесконечном интервале времени, оценка точности порождающих решений и т.д.).

Реализация этой схемы для траекторий разных типов происходит по-разному. Различны роль каждого пункта схемы, возникающие задачи, их сложность и важность, результаты, которых удается достигнуть. На первый взгляд может показаться удивительным, что порождающие решения играют такую существенную роль. Как известно, это понятие широко использовалось в докомпьютерную эпоху в самых разных модификациях для получения приближенных аналитических решений уравнений возмущенного движения. Сегодня такие уравнения, как правило, решаются численно без проблем. Роль порождающих движений несколько меняется. Во-первых, они по-прежнему играют роль аппроксимации траекторий исследуемой динамической системы, позволяя решать многие вопросы, где не требуется высокая точность, с малой вычислительной трудоемкостью. В частности, речь может идти о качественном описании траекторий. Во-вторых, в теоретических исследованиях, связанных с поведением решений на всей оси времени, численное интегрирование не эффективно. Применяемые

итеративные методы требуют адекватных начальных приближений. В третьих, при исследовании индивидуальных стохастических траекторий численными методами возникают трудности их идентификации, связанные с сильной неустойчивостью движения. Здесь также помогают порождающие движения. Наконец, изобилие стохастических траекторий и многообразие их свойств настоятельно требует использования аппроксимации для получения обозримой общей картины возможных движений.

Глава 1 — введение — содержит постановку задачи, ее обоснование, а также результаты, выносимые на защиту, публикации, апробацию и т.д.

Глава 2 посвящена истории вопроса. В ней приведен обзор литературы, никоим образом не претендующий на полноту хотя бы по причине необъятности темы. История задачи N тел обсуждается как с чисто математической, так и с астрономической, и прикладной (механика космического полета) точек зрения. На примере этой задачи хорошо видно, что исследование фундаментальных проблем, даже не имеющих на первый взгляд каких–либо приложений, в конце концов приносит неожиданные результаты, актуальность и практическое значение которых невозможно переоценить. Так, задача N тел с времен Ньютона играет заметную роль в развитии чистой и прикладной математики, которые в свою очередь в значительной мере определяют лицо современной технологической цивилизации. Выход человечества в космос в середине XX века стимулировал развитие небесной механики, поставив целый ряд принципиально новых задач. В частности, речь идет о конструировании и оптимизации траекторий космических аппаратов. Исследование возможных характеристик сложных траекторий с тесными сближениями стало актуальной задачей, поскольку тесные сближения позволяют использовать даровую гравитационную энергию планет. Семейства таких траекторий обладают свойствами случайных процессов и к ним применимы модные термины типа “детерминированный хаос”. Обычно исследуют не индивидуальные хаотические движения, а некоторые общие свойства их совокупностей. В нашем случае важны именно индивидуальные движения. Да и вряд ли уместно говорить, что космический аппарат движется по хаотической траектории, хотя в известном смысле это утверждение совершенно справедливо. Для описания индивидуальных сложных движений рассматриваемого типа в дальнейшем в диссертации используется подход, разработанный В.М.Алексеевым [3]. Им введено понятие квазислучайных движений и разработан соответствующий математический аппарат (кстати, на материале задачи трех тел). Коротко говоря, квазислучайность семейства движений означает, что каждое такое движение соответствует реализации некоего случайного процесса. Отсюда — богатство множества квазислучайных движений и невозможность однозначного определения движения в будущем, если известно движение в прошлом. В главе 2 кратко излагаются основные положения и результаты теории, разработанной В.М.Алексеевым.

Глава 3 содержит доказательство региональной интегрируемости задачи N тел. Ключевым моментом в этом доказательстве является возможность построения точных решений на всей оси времени с использованием итеративных алгоритмов пикаровского типа. В настоящей работе мы часто для краткости системы, для которых такое построение возможно, называем интегрируемыми. Сходимость итераций обусловлена достаточно быстрым убыванием возмущающих сил в окрестности порождающего движения. В качестве порождающих движений рассмотрены прямолинейные равномерные (возможно в комбинации с кеплеровыми). Рассуждения аналогичны классическому доказательству существования и единственности решений дифференциальных уравнений [11], где сжатие в соответствующем функциональном пространстве и сходимость итераций обусловлены малостью интервала времени. Мы используем другие малые величины, а интервал времени может быть и бесконечным при условии, что соответствующие интегралы сходятся и достаточно малы.

В параграфе 3.1 исследуется случай одиночных тел с большими относительными скоростями без тесных сближений. В параграфе 3.2 рассмотрена ограниченная гиперболическая задача трех тел Солнце–планета–звезда. Наконец, параграф 3.3 посвящен системе, состоящей из тесных двойных подсистем с большими относительными скоростями, причем расстояние между центрами масс подсистем всегда много больше расстояния между двойными. В п. 3.4 обсуждаются вопросы собственно интегрируемости систем рассматриваемого вида, то есть возможность построения полного набора не зависящих явно от времени интегралов — функций, постоянных на траекториях. При условии сходимости пикаровских итераций на всей оси времени такая возможность устанавливается сравнительно простыми рассуждениями. Тем самым использование термина “интегрируемая” для систем, у которых пикаровские итерации сходятся на всей оси времени, является обоснованным. В п. 3.5 обсуждаются результаты п. 3.2 применительно к Солнечной системе и ее соседям. Характеристики ближайших звезд взяты из работы [31]. Показано, что условия интегрируемости выполняются для всех известных в настоящее время звезд и планет. Можно сделать некоторые общие выводы о достаточных условиях устойчивости планетных систем относительно ближайших звезд. Кроме того, несложно получить аналитические оценки возмущений орбит планет ближайшими звездами. Стоит отметить любопытный факт: время устойчивости Солнечной системы по отношению к соседним звездам по порядку величины совпадает со временем ее устойчивости, обусловленным “хаотичностью” в движениях планет [29]; оно примерно соответствует времени существования Солнечной системы (10^{10} лет). Для сравнения напомним, что обоснование применимости фундаментальных результатов КАМ-теории к конкретным астрономическим системам сталкивается, как известно, с серьезными трудностями. Аналогична ситуация и с использованием фундаментальных результатов Сундмана. Полученные в диссертации оценки областей интегрируемости задачи N тел хотя и грубы, но тем не менее позволяют применять выводы об интегрируемости к астрономическим системам.

Глава 4 посвящена обобщению инструментария главы 3 на более сложные варианты задачи N тел. В ней рассматривается ограниченная задача трех тел с большими скоростями, причем сближения тел допускаются. В случае одного тройного сближения обобщение метода построения точных решений может быть получено, если разбить всю ось времени на три отрезка. На каждом из отрезков точное решение получается с помощью пикаровских итераций. "Сшивка"этих точных решений позволяет получить обмен (а также захват и распад, рассматриваемые в главе 4 менее подробно) в ограниченной задаче трех тел. В результате мы получаем столь же полное описание траекторий, как и в интегрируемом случае, для существенно более сложных вариантов задачи трех тел. В п. 4.1 рассматриваются порождающие решения. Попрежнему они составлены из кеплеровых орбит и прямолинейных равномерных движений. В отличие от главы 3 эти порождающие решения заданы не сразу для всех значений времени, а на соответствующих отрезках. В случае обмена в ограниченной плоской задаче трех тел траектории можно качественно описать следующим образом. Два тела одинаковой для простоты массы (звезды) движутся по гиперболическим орбитам относительно центра масс. Третье тело "нулевой" массы (планета) вначале движется по эллиптической орбите относительно одной звезды, в конце — около другой. Предполагаем, что эксцентриситет орбит звезд близок к единице, а большая полуось орбит звезд значительно меньше большой полуоси орбиты планеты. В перицентре гиперболической орбиты имеет место тесное сближение звезд. До и после этого сближения обе звезды движутся почти по прямой с большими скоростями, в момент сближения происходит как бы упругое соударение и звезды меняются местами. Если в этот момент планета находится достаточно далеко от центра масс и прямой, возле которой движутся звезды, по сравнению с расстоянием между звездами в перицентре гиперболы, планета может "не заметить" замены звезды. В результате произойдет обмен. Порождающая

траектория для планеты состоит из трех частей: эллиптическое движение относительно одной звезды, прямолинейное равномерное движение в течение малого интервала времени в окрестности "соударения" звезд, эллиптическое движение относительно другой звезды. Аналогично можно качественно описать захват и распад в плоской ограниченной задаче трех тел. Пусть в результате тесного сближения на гиперболических орбитах двух звезд одинаковых масс происходит поворот их асимптотических скоростей примерно на 90 градусов. Модули асимптотических скоростей звезд велики. Другими словами, эксцентриситет гипербол близок к $\sqrt{2}$, большая полуось мала. Вначале планета "нулевой" массы находится на эллиптической орбите относительно одной из звезд, большая полуось этой орбиты много больше перицентрического расстояния гипербол. После "соударения" звезд они быстро удаляются от прямой, вдоль которой двигались до взаимодействия. Планета же, если она находилась в момент "соударения" в окрестности этой прямой позади своей звезды, продолжит движение около прямой. Иначе говоря, произойдет распад. Для получения захвата, очевидно, достаточно поменять направление времени и направления скоростей в начальный момент. Порождающее движение планеты состоит из трех частей, как и в описанном выше случае обмена. В п. 4.2 исследуется сходимость итераций к точному решению на всей оси времени, обосновывается утверждение о существовании траекторий обмена. Доказательство сходимости на первом и последнем интервале времени повторяет рассуждения главы 3, доказательство сходимости на среднем интервале времени повторяет рассуждения классической теоремы существования и единственности дифференциальных уравнений.

Любопытно вспомнить, что в середине XX века сама возможность существования траекторий обмена, захвата и распада в задаче трех тел была предметом жарких дискуссий, которые оказали большое стимулирующее влияние на развитие математики и астрономии [26], [27], [25], [24], [1]. В рассматриваемом случае положительной полной энергии существование их "очевидно". Интересно, что возможно исчерпывающее описание траекторий, как и в случае интегрируемой системы.

Глава 5 посвящена рассмотрению порождающих стохастических движений. Параграф 5.1 содержит описание рассматриваемой динамической системы, метода точечных гравитационных сфер (далее — ТГС), используемого для приближенного описания гравитационных маневров. Метод ТГС в различных модификациях широко используется для приближенного описания траекторий со сближениями, описание и обсуждение приведено, например, в [6]. В диссертации изложена оригинальная модификация метода, позволяющая сравнительно просто получать многие нетривиальные результаты. Траектория точки нулевой массы (например, космического аппарата) аппроксимируется последовательностью кеплеровых гелиоцентрических орбит соударения с планетами. При соударении происходит мгновенное преобразование скорости — поворот вектора планетоцентрической скорости на угол между асимптотами планетоцентрической гиперболы. Модуль планетоцентрической скорости остается при этом постоянным. Угол поворота зависит от прицельного расстояния и в рамках рассматриваемой аппроксимации не определен, может быть произвольным в разумных пределах. Это обстоятельство отражает стохастические свойства траекторий с тесными сближениями. Ограничение на величину угла поворота планетоцентрической скорости связано с естественным требованием — перицентрическое расстояние должно превосходить радиус планеты. Рассматривая планетоцентрическое гиперболическое движение, после несложных выкладок можно получить максимальный угол в виде элементарной функции модуля планетоцентрической скорости и одного параметра, характеризующего планету и ее орбиту. Таким образом, взаимодействие с планетой имеет место лишь в одной точке соударения, а описание сложных траекторий сводится к последовательности известных кеплеровых движений. Существенно, что эта последовательность недетерминированная. В отличие от обычно используемых в небесной механике интегрируемых порождающих движений, здесь порождающее движение — стохастическое. В п. 5.2. обсуждается возможное преобразование кеплеровой орбиты при одном маневре. Используются известные свойства кеплерова движения, в частности, интегралы энергии и площадей. Приводятся иллюстрации. Так, оценка возможного влияния гравитационного маневра у Марса на энергетические затраты при полете к Юпитеру получается элементарно. Она с разумной точностью совпадает с результатами работы [5], где эта задача решалась с использованием гораздо более подробных моделей (и, естественно, со сравнительно высокой вычислительной трудоемкостью). Используемый нами метод ТГС дает экономию характеристической скорости $0.8 \div 0.9$ км/с в самом благоприятном случае, в [5] для этой величины приведен диапазон $100 \div 670$ м/с в зависимости от расположения планет. В п. 5.3 приведен пример решения одной астрономической задачи с помощью формализма ТГС. Речь идет о максимальной скорости межзвездной частицы (кометы), которая может быть захвачена на эллиптическую гелиоцентрическую орбиту после тесного сближения с планетой. Разработанный инструментарий позволил элементарными средствами получить исчерпывающее решение задачи, обсуждаемой в литературе и решаемой по частям сравнительно трудоемкими методами. Приведены максимальные значения скорости частицы “на бесконечности”, совместимые с захватом ее каждой планетой. В п. 5.4 приводятся методы построения орбит соударения, из которых составляются порождающие стохастические движения. Эти методы опираются на классический инструментарий задачи двух тел [23], однако отличаются от обычно применяемых, использующих уравнение Эйлера–Ламберта. При построении используется специфика порождающих движений, связанная с инвариантностью модуля планетоцентрической скорости при взаимодействии с планетой. Следующий п. 5.5 посвящен непосредственно алгоритмам построения порождающих стохастических движений, основным свойством которых является недетерминированность. Семейства порождающих движений представлены ориентируемыми графами — деревьями. В п. 5.6 в качестве примера более подробно рассмотрены некоторые семейства стохастических порождающих движений в ограниченной круговой задаче трех тел. Для их описания удобно использовать формализм “маршрутных схем”, введенных В.М.Алексеевым [3]. Приведены примеры маршрутных схем для различных планет. Допустимые переходы описаны с помощью матриц смежности. Следующие параграфы 5.7 и 5.8 посвящены областям достижимости рассматриваемых порождающих движений. Вопрос стоит следующим образом. Пусть космический аппарат находится на некоторой исходной эллиптической гелиоцентрической орбите. Какие гелиоцентрические кеплеровы орбиты достижимы в результате серии пассивных гравитационных маневров у планет? Другими словами, можно ли с исходной орбиты достичь некоторой орбиты цели “без затраты топлива”? Задача рассматривается в рамках модели ТГС. Общий итог можно кратко сформулировать так: *с помощью последовательности пассивных гравитационных маневров возможен переход между произвольными кеплеровыми эллиптическими орбитами из обширного множества орбит. Именно, пусть заданы две эллиптические орбиты, каждая из которых пересекает эллиптическую орбиту хотя бы одной планеты, а планетоцентрические скорости на заданных орбитах в моменты пересечения с орбитами планет ограничены сверху и снизу. Тогда существует последовательность эллиптических орбит (также пересекающих орбиты каких-либо планет) такая, что первая и последняя орбиты совпадают с заданными, а переходы между последовательными орбитами могут быть совершены с помощью пассивных гравитационных маневров.* Ограничения сверху на планетоцентрические скорости нужны для того, чтобы избежать гиперболических орбит в процессе перехода. Ограничения снизу на эти скорости формально (в рамках модели ТГС) не нужны, однако при малых значениях планетоцентрической скорости точность ТГС—аппроксимации низка. В п. 5.9 приведены некоторые априорные оценки (полученные до построения семейств порождающих траекторий) и результаты, характеризующие потребное время и число маневров в разных ситуациях. Например, при стартовой скорости, лишь незначительно превышающей гомановскую для достижения Венеры (около 3 км/с) после трех маневров (у Венеры, Земли и Венеры или у Венеры, Земли и Земли, или у Венеры, Земли и Марса) достижим Юпитер, а после маневра у Юпитера достижима любая планета, включая малые, а также объекты пояса Койпера и ближайшие окрестности Солнца. Существенно, что разработанный инструментарий позволяет получать эти нетривиальные результаты вполне элементарными методами. Таким образом, можно как-то ориентироваться в сложно устроенном густом “лесе”, состоящем из деревьев (графов порождающих движений). Примеры порождающих движений приведены в п. 5.10. Эти примеры построены с помощью программного комплекса “Странник”, в основе которого — алгоритмы и методы, описанные в пп. 5.4, 5.5. Проиллюстрированы широкие возможности, которые предоставляют гравитационные маневры. В частности, мы искали быстрые экономичные перелеты к Юпитеру и другим планетам-гигантам, однако конкретные оптимизационные задачи не решались. Типичное время достижения Юпитера — $6 \div 10$ лет.

Следует отметить, что аналогичные подходы к проектированию траекторий с гравитационными маневрами широко применяются при проектировании экспедиций космических аппаратов, см. [30], [35]. Работы этого направления отличает конкретность в постановке задачи. Мы стремились описать общие свойства движений такого типа, не привязываясь к определенным датам, целям экспедиции и т.п. Множества стохастических траекторий отличаются своим богатством (термин, примененный В.М.Алексеевым [3]), а использование их для перемещения в Солнечной системе имеет огромные перспективы.

Глава 6 посвящена теории возмущений для стохастических траекторий и обоснованию применимости для них полученных в главе 5 результатов, относящихся к порождающим решениям. Описание алгоритма построения точных решений, соответствующих выбранным порождающим движениям, с использованием численного интегрирования уравнений движения, приводится в п. 6.1. Траектории возмущенного движения составляются из отрезков, полученных с использованием численного интегрирования неупрощенных уравнений. Эти отрезки "сшиваются" на (неточечных) гравитационных сферах планет, причем прицельные расстояния последовательно уточняются. Алгоритм позволяет с помощью итераций построить точное решение исходных дифференциальных уравнений движения, близкое к произвольно выбранной "стохастической" порождающей траектории. Сходимость итераций к точному решению как правило имеет место (по крайней мере на ограниченном интервале времени) и обусловлена сжатием в соответствующем функциональном пространстве. Другими словами, причина сходимости в сильной неустойчивости движения при сближении с планетой: малое изменение прицельного расстояния при первом сближении дает большое его изменение при следующем. Результаты вычисления стохастических траекторий в плоской ограниченной круговой задаче трех тел, иллюстрирующие "практическую" сходимость итераций на ограниченном интервале времени, приведены в п. 6.2. В последнем п. 6.3 обсуждается возможность построения точных решений, вечно близких к выбранным стохастическим порождающим решениям. Такая возможность означает квазислучайность движений по Алексееву. Объясняется хорошая сходимость итераций, наблюдаемая в плоской круговой ограниченной задаче трех тел. Она обусловлена наличием интеграла Якоби в этой задаче.

Основные идеи и результаты настоящей диссертации изложены в работах [13], [16], [17], [18], [19]. Кроме того, результаты опубликованы в [12], [14], [15], [20], [7], [32], [21], [22], [33], [34].

В работах, выполненных в соавторстве с К.В.Холшевниковым и посвященных интегрируемости задачи N тел, автору принадлежит идея применения пикаровских итераций для построения точного решения задачи N тел на всей оси времени, использования этого решения для доказательства интегрируемости, а также обоснование сходимости итераций в этой задаче в случае больших энергий. К.В. Холшевникову принадлежит обобщение метода построения точного решения с использованием метода Пикара на общий случай систем с быстрыми и медленными переменными и математическое обоснование в этом случае, а также математическое доказательство существования интегралов дифференциальных уравнений в случаях сходимости пикаровских итераций к точному решению для всех значений времени. В работах, выполненных в соавторстве с В.Б.Титовым и А.В.Елькиным и посвященных построению стохастических решений задачи N тел, автору принадлежат основные идеи и методы решения задач. В.Б.Титов и А.В.Елькин составляли компьютерные программы по алгоритмам, разработанным автором. Отладка программ и вычисления производились совместно.

Список литературы

[1] Алексеев В.М. Обмен и захват в задаче трех тел. 1956. Доклады Академии Наук СССР, т. 108, N4, с. 599-602.

[2] Алексеев В.М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. 1981. Успехи математических наук, т. 36, N 4, с. 161-176.

[3] Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. 2001. Ижевск. 156 с.

[4] Антонов В.А. Соотношение упорядоченности и беспорядка в движении тела в гравитирующей системе. 1983. Докторская диссертация. Ленинград, СПбГУ, 161 с.

[5] К.Г.Георгиев, О.В.Папков. Траектории полета к Юпитеру с использованием гравитационного поля Марса. 1978. Космические исследования, т. XVI, N 1, с. 38-43.

[6] Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. 1980. М., Наука, 544 с.

[7] Елькин А.В., Соколов Л.Л. Построение и характеристики траекторий с гравитационными маневрами. 1995. Труды XIX Научных чтений по космонавтике. Прикладная небесная механика и управление движением. Москва, ИИЕТ РАН, с. 10.

[8] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. 1983. Успехи математических наук, т. 38, N 1, с. 3-67.

[9] Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. 1961. Серия "Современные проблемы математики". Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г. (обзорные доклады). Гос.изд-во физ.-мат. литературы, М., с. 187-208.

[10] Кузнецов Э.Д., Соколов Л.Л. Нелинейная эволюция орбиты спутника-баллона. 2001. Космические исследования, том 39, N 6, с. 648-656.

[11] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1970. М., Наука, 280 с.

[12] Соколов Л.Л. О некоторых решениях гиперболической ограниченной задачи трех тел (предельный случай больших эксцентриситетов). 1986. Труды Томского гоуниверситета. Астрономия и геодезия, вып. 14, с. 93-102.

[13] Соколов Л.Л., Холшевников К.В. Об интегрируемости задачи N тел. 1986. Письма в "Астрономический журнал", т. 12, N 7, с. 557-561.

[14] Соколов Л.Л., Холшевников К.В. О точном решении задачи N тел в области больших энергий. 1987. Труды Астрономической обсерватории Ленинградского университета, т. 41, вып. 63, с. 175-193.

[15] Соколов Л.Л. О построении аналитических решений задачи N тел. 1990. Аналитическая небесная механика, под ред. К.В.Холшевникова. Изд. Казанского университета, с. 11-17.

[16] Соколов Л.Л., Титов В.Б., Холшевников К.В. О свойствах некоторых движений космического аппарата вблизи Юпитера. 1990. Вестник Ленинградского Университета, серия 1, вып. 3, с. 107-112.

[17] Соколов Л.Л., Титов В.Б. Траектории КА с гравитационными маневрами. 1991. Вестник Ленинградского Университета, серия 1, вып. 3, с. 111-114.

[18] Соколов Л.Л. Решения задачи трех тел и случайные процессы. 1991. Вестник Ленинградского Университета, серия 1, вып. 4, с. 30-38.

[19] Соколов Л.Л., Холшевников К.В. Региональная интегрируемость задачи N тел. 1992. Дифференциальные уравнения, т. 28, N 3, с. 437-441.

[20] Соколов Л.Л., Титов В.Б. Построение неустойчивых траекторий в ограниченной N-планетной задаче. 1994. Международная конференция "Современные проблемы теоретической астрономии". Тезисы докладов. Т. 2. Санкт-Петербург, ИТА РАН, с. 71-72.

[21] Соколов Л.Л. О решении неинтегрируемых задач динамики. 1997. Proceedings of the International Conference "Structure and Evolution of Stellar Systems", Petrozavodsk, Karelia, Russia, 13-17 August 1995. St.Petersburg, 1997, p. 16-22.

[22] Соколов Л.Л. Орбиты соударения и квазислучайные движения. 2000. Материалы конференции "Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века", Санкт-Петербург, ИПА РАН, с. 225-226.

[23] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. 1968. М., Наука, 800 с.

[24] Хильми Г.Ф. О возможности захвата в задаче трех тел. 1948. Доклады Академии Наук СССР, т. LXII, N 1, с. 39-42.

[25] Шмидт О.Ю. О возможности захвата в небесной механике. 1947. Доклады Академии Наук СССР, 582, с. 213-216.

[26] Bekker L. On capture orbits. 1920. Monthly Notices Royal Astron. Soc., v. 809, p. 590-597.

[27] Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps. 1932. Bull. Astr., t. 8, p. 403-436.

[28] Krivov A.V., Sokolov L.L., Getino J. Orbital instability zones of space balloon. 1997. In: Dynamics and Astrometry of Natural and Artifical Celestial Bodies. Ed. by I.M. Wytrzyszczak, J.H. Lieske, R.A. Feldman. Kluwer Academic Publishers. P. 361-366.

[29] Laskar J. Large-scale chaos and marginal stability in the Solar system. 1996. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 64, N 2, p. 115-162.

[30] Longuski J.M., Williams S.N. Automated design of gravity-assist trajectories to Mars and the outer planets. 1991. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 52, p. 207-220.

[31] Mullary A.A., Orlov V.V. Encounters of the Sun with nearby stars in the past and future. 1996. Earth, Moon and Planets, 72, p. 19-23.

[32] Sokolov L.L. Families of Integrable and Stochastic Trajectories in the N-Body Problem. 1995. Astronomy and Astrophysics Transactions, v. 7, N 4, p. 275-276.

[33] Sokolov L.L. On Conditions of the N-Body Problem Integrability. 2001. Proceedings of the International Conference

"Stellar Dynamics: from Classic to Modern", held in Saint Petersburg, August 21-27, 2000, ed. L.P.Ossipkov, I.I.Nikiforov, p. 243-247.

[34] Sokolov L.L. On the Comet Capture Conditions. 2001. Proceedings of the International Conference "Stellar Dynamics: from Classic to Modern", held in Saint Petersburg, August 21-27, 2000, ed. L.P.Ossipkov, I.I.Nikiforov, p. 255-259.

[35] Sukhanov A.A. Trajectory design for the mission "Hannes". 1996. Acta Astronautica, v. 39, N 1-4, p. 25-34.