На правах рукописи

КУЧКАРОВА АЙГУЛЬ НАИЛЕВНА

Экстремальные и спектральные свойства решений задач Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения

01.01.02 – "Дифференциальные уравнения"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань – 2002

Работа выполнена на кафедре математического анализа Стерлитамакского государственного педагогического института

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Сабитов К.Б.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Хайруллин Р.С.

кандидат физико-математических наук, доцент Бурмистров Б.Н.

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 11 декабря 2002 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, ауд. 324

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 9 ноября 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.К.Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, в силу своей прикладной и теоретической значимости, является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Первыми исследованиями в этой области явились работы Ф. Трикоми, результаты которого обобщались в работах С. Геллерстедта. Они изучали краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа известные в литературе как "задача Трикоми" и "задача Геллерстедта".

В дальнейшем созданием теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C.S. Morawetz, P. Germain, R. Bader, P.O. Lax, R.P. Phillips, M. Schneider, Б.А. Бубнов, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.Н. Диденко, В.А. Елеев, В.И. Жегалов, А.Н. Зарубин, Т.Ш. Кальменов, Г.Д. Каратопраклиев, И.Л. Кароль, А.И. Кожанов, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, О.А. Ладыженская, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Пономарев, С.П. Пулькин, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С. Хайруллин, Хе Кан Чер, Л.И. Чибрикова, Б.Н. Бурмистров и др. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

Задачей Геллерстедта для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе, C.S. Morawetz, А.М. Нахушев, В.Ф. Волкодавов, С.С. Исамухаметов, Хе Кан Чер, Т.Ш. Кальменов, К.Б. Сабитов, М.М. Смирнов, В.И. Жегалов, Е.И. Моисеев, Н.Б. Плещинский,Т.Д. Джураев, М.С. Салахитдинов, М.Е. Лернер, А.М. Ежов, К.А. Губайдуллин и другие.

Цель работы. Целью работы является установление экстремальных и спектральных свойств решений уравнений смешанного типа и применение этих свойств при изучении задач Геллерстедта.

Методы исследования. При исследовании экстремальных свойств решений уравнений смешанного типа используются известные принципы экстремума для эллиптических, гиперболических и смешанных уравнений. Единственность решения краевых задач для уравнений смешанного типа доказывается на основе установленного принципа экстремума для уравнений смешанного типа и методом вспомогательных функций. Доказательство существования обобщенного решения задач Геллерстедта для общего линейного уравнения смешанного типа проводится с помощью альтернирующего метода типа Шварца. При доказательстве существования регулярного решения задачи Геллерстедта для модельных уравнений смешанного типа используется метод разделения переменных. Решения построены в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Научная новизна. 1. Установлены экстремальные свойства решений общих линейных уравнений смешанного типа с гладкой линией изменения типа в классе регулярных и обобщенных решений в областях эллиптичности, гиперболичности и и в целом смешанной области, и показаны их применения при исследовании задач Геллерстедта.

2. Доказано существование обобщенного решения задач Геллерстедта для общего линейного уравнения смешанного типа при произвольном подходе эллиптической части границы области к линии изменения типа, за исключением случая касания.

3. Найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи для оператора Лаврентьева–Бицадзе в случае, когда область эллиптичности является полукругом с центром в начале координат. Построенная система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в смешанной области.

4. Построено регулярное решение задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром методом спектрального анализа.

5. Построено решение задачи Геллерстедта для пространственного уравнения смешанного типа методом разделения переменных.

6. Найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи для уравнения смешанного типа со степенным вырождением и исследованы их свойства на

полноту.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты и методы исследования представляют теоретический интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа и при решении прикладных задач методом спектрального анализа.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа Стерлитамакского государственного педагогического института (научные руководители – профессора К.Б. Сабитов и Ф.Х. Мукминов, 1997 – 2002 гг.), на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (научный руководитель – профессор В.И. Жегалов, октябрь 2002 г.), а также на следующих конференциях.

1. Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции посвященная 90 – летию со дня рождения профессора Пулькина С.П. (г. Самара, 1997).

2. Всероссийская научная конференция "Физика конденсированного состояния" (г. Стерлитамак, 1997).

3. Международная научная конференция "Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы посвященная юбилею академика В.А. Ильина (г. Стерлитамак, 1998).

4. Всероссийская научно–практическая конференция "Проблемы физико–математического образования в педагогических вузах России на современном этапе" (г. Магнитогорск, 1999).

5. Международная научная конференция "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (г. Уфа, 2000).

6. Международная научная конференция "Проблемы современной математики" (г. Казань, 2001).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [5] – [21].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 15 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 102 страниц, включая список литературы, состоящий из 84 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **главе 1** установлен принцип экстремума для общего уравнения смешанного типа с гладкой линией изменения типа в классе его регулярных и обобщенных решений в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области при некоторых условиях на коэффициенты изучаемого уравнения. Приводятся применения экстремальных свойств при исследовании задач Геллерстедта.

В **§ 1.1** для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx}+u_{yy}+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u = F(x,y), \quad (1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $F(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции, в области D, ограниченной простой кривой Жордана Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(a_1,0)$ и $A_2(a_2,0)$, $a_1 < 0, a_2 > 0$, характеристиками A_1C_1, C_1E, EC_2, C_2A_2 уравнения (1) при $y < 0$, где $E(e,0)$, $a_1 < e < a_2$, $C_1((a_1+e)/2, y_{c_1})$, $y_{c_1} < 0$ и $C_2((a_2+e)/2, y_{c_2})$, $y_{c_2} < 0$, ставятся задачи Геллерстедта.

Задача G_1. *Найти функцию u(x,y), удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \quad (2)$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \quad (3)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma}, \quad (4)$$

$$u(x,y) = \psi_1(x,y), \quad (x,y) \in \overline{A_1C_1} \cup \overline{A_2C_2}, \quad (5)$$

где φ *и* ψ_1 *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(A_1) = \psi_1(A_1)$, *и* $\varphi(A_2) = \psi_1(A_2)$, $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0,\ x < e\}$ и $D_2 = D \cap \{y < 0,\ x > e\}$.

Задача G_2. *Найти функцию u(x,y), удовлетворяющую условиям (2)–(4) и*

$$u(x,y) = \psi_2(x,y), \quad (x,y) \in \overline{C_1E} \cup \overline{EC_2}, \quad (6)$$

где φ *и* ψ_2 *– заданные достаточно гладкие функции.*

В **§ 1.2** в эллиптической области доказаны утверждения о знаке производной по нормали в точке и вблизи точки изолированного максимума решения уравнения (1) на линии вырождения.

Лемма 1.2. *Пусть: 1) в области* D_0 *коэффициенты уравнения (1) ограничены и* $C(x,y) \leq 0$; *2)* $u(x,y) \in C(\overline{D_0}) \cap C^1(D_0 \cup A_1E \cup EA_2) \cap C^2(D_0)$, $Lu \equiv F \geq 0$ (≤ 0) *в* D_0; *3)* $\max\limits_{\overline{D_0}} u(x,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D_0}} u(x,y) = u(Q) < 0)$. *4) функция* $u(x,y)$ *имеет изолированный положительный максимум (отрицательный минимум)* $u(Q)$ *в точке* E; *5) в малой окрестности точки* E: *а) функция* $K(y)u_x^2+u_y^2$ *суммируема; б) производные* A_x *и* B_y *непрерывны вплоть до границы; в)* $2C - A_x - B_y \leq 0$, $B(x,0) \geq 0$. *Тогда в любой выколотой окрестности* $\dot{U} \subset \partial D_0$ *точки* E *найдется точка* $Q_1 = (x_1, 0) \in \dot{U}$ *такая, что*

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_1, y) < 0 \ (> 0).$$

В **§ 1.3** для уравнения (1) в областях гиперболичности при некоторых условиях показано, что максимум решения $u(x,y)$ по $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ достигается на отрезке параболического вырождения.

В **§ 1.4** установлены экстремальные свойства решений уравнения (1) в классе регулярных решений в смешанной области.

Определение 1.2. *Регулярным из класса* $R_1(D)$ *решением уравнения (1) назовем функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$;

2) $u(x,y) \in C^2(D_0)$ и $Lu(x,y) \equiv F(x,y)$ в D_0;

3) $u(x,y)$ *в областях* D_1 *и* D_2 *является решением уравнения (1) в характеристических координатах* (ξ, η);

4) производные u_η *и* u_ξ *в характеристических координатах* (ξ, η) *непрерывны в* $\overline{D}_1 \backslash \overline{A_1E}$ *и* $\overline{D}_2 \backslash \overline{A_2E}$ *соответственно.*

Определение 1.3. *Регулярным из класса $R_2(D)$ решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям 1)–3) определения 1.2 и, кроме того, производные u_ξ и u_η в характеристических координатах (ξ,η) непрерывны в $\overline{D}_1\backslash\overline{A_1E}$ и $\overline{D}_2\backslash\overline{A_2E}$ соответственно.*

При некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения (1) доказано следующее утверждение: *если $u(x,y)$ – регулярное из класса $R_1(D)$ $(R_2(D))$ решение уравнения (1), равное нулю на характеристиках A_1C_1 и A_2C_2 $(C_1E$ и $EC_2)$, то положительный $\max\limits_{\overline{D}} u$ (отрицательный $\min\limits_{\overline{D}} u$) достигается на кривой* Γ.

Из этого утверждения следует единственность решения задач G_1 и G_2 при произвольной эллиптической границе Γ, положительность решений уравнения (1) в области D, аналог неравенства Чаплыгина.

В **§ 1.5** доказан принцип экстремума для уравнения (1) в классе обобщенных решений.

Определение 1.4. *Обобщенным из класса $Q_1(D)$ $[Q_2(D)]$ решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x,y)$, если существует последовательность регулярных решений $\{u_p(x,y)\}$ уравнения (1) из $R_1(D)$ $[R_2(D)]$, равномерно сходящаяся к $u(x,y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.*

Утверждения о принципе экстремума, полученные в § 1.4, переносятся в класс обобщенных решений уравнения (1), из которых следует единственность обобщенного решения задач G_1 и G_2 без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

В **§ 1.6** приведены примеры модельных уравнений смешанного типа:

$$\operatorname{sgn} y\cdot|y|^n u_{xx}+u_{yy}+a_0|y|^{\frac{n-1}{2}}u_x=F(x,y),\ n>0,\ a_0=\text{const},$$

$$\operatorname{sgn} y\cdot u_{xx}+u_{yy}-\lambda u=F(x,y),\ \lambda=const,$$

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}-\lambda u=F(x,y),\ \lambda=const,$$

для которых показано применение теорем, установленных выше.

В **§ 1.7** рассматривается уравнение

$$Lu\equiv\operatorname{sgn} y\cdot|y|^n u_{xx}+u_{yy}+Au_x+Bu_y+Cu=0,\ n\geq 0 \qquad (7)$$

в области D. Пусть $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ из класса Ляпунова; s — длина дуги, отсчитываемой от точки A_2 против часовой стрелки; S — длина кривой Γ; Γ_0 — "нормальная" кривая, заданная уравнением

$$\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\frac{4}{(n+2)^2}y^{n+2}=\frac{(a_2-a_1)^2}{4},$$

и, кроме того, предположим, что для уравнения (7) выполнен принцип экстремума.

Определение 1.5. *Регулярное из класса $R_1(D)$ $[R_2(D)]$ решение уравнения (7), удовлетворяющее граничным условиям (4) и (5), [(4) и (6)] назовем регулярным решением задачи G_1 $[G_2]$.*

Определение 1.6. *Равномерный в $\overline{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи G_1 $[G_2]$ назовем обобщенным решением задачи G_1 $[G_2]$.*

Теорема 1.8. *Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A_1 и A_2 сколь угодно малыми дугами кривой Γ_0, существует регулярное в D решение задачи G_1 для уравнения (7). Тогда если функция $\varphi(s)\in C[0,S]$ и $\psi_1(x)$ достаточно гладкая (т.е. функция $\psi_1(x)$ такова, что при достаточно гладкой функции $\varphi(s)$ выполнено условие теоремы 1.8) на $[a_1,\frac{a_1+e}{2}]\cup[\frac{e+a_2}{2},a_2]$, $\psi_1(a_1)=\psi_1(a_2)=\varphi(0)=\varphi(S)=0$, то существует единственное обобщенное в D решение $u(x,y)$ задачи G_1 при произвольном подходе кривой Γ к оси $y=0$, за исключением случаев, когда в достаточно малых окрестностях концов кривой Γ производная dx/ds меняет знак и $dy/ds=0$.*

Отметим, что в случае задачи G_2 теорема 1.8 формулируется аналогично.

Доказательство этих утверждений проводится на основании принципа экстремума альтернирующим методом типа Шварца.

В **§ 1.8** для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области D доказан принцип экстремума. И на основании альтернирующего процесса типа Шварца доказано существование и единственность регулярных решений задач G_1 и G_2 при произвольном подходе кривой Γ из класса Ляпунова к оси $y=0$, за исключением случая, когда в достаточно малых окрестностях концов эллиптической границы производная dx/ds меняет знак и $dy/ds=0$.

В § **1.9** устанавливается единственность регулярного решения задачи G_1 для уравнения

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{8}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $\lambda(y)$ – заданные функции, в области D ($a_1 = 0, a_2 = 1$).

Теорема 1.10. *Пусть: 1) на кривой Г отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняет знак, а $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{min}, 0] \cap C^1[y_{min}, 0) \cap C[0, y_{max}] \cap C^1(0, y_{max}]$; 3) функция $\lambda(y) \in C[y_{min}, y_{max}]$ такова, что существует решение $\mu(y)$ уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \qquad y_{min} < y < y_{max},$$

из класса $C^1[y_{min}, y_{max}]$. Тогда, если существует регулярное в области D решение задачи G_1 для уравнения (8), то оно единственно, где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе области D, $n_1(s) = -dy/ds$, $n_2(s) = dx/ds$.

В **главе 2** рассмотрены спектральные свойства решения задачи Геллерстедта и приведены применения этих свойств при построении решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе.

В § **2.1** рассматривается уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{9}$$

где λ – комплексный параметр, в области D, ограниченной простой кривой Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1,0)$ и $A_2(1,0)$ и характеристиками $A_1C_1(x+y=-1)$, $C_1O(x-y=0)$, $OC_2(x+y=0)$, $C_2A_2(x-y=1)$ уравнения (9) при $y<0$, где $C_1(-1/2;-1/2)$, $O(0;0)$, $C_2(1/2;-1/2)$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения (9) поставим следующую спектральную задачу (Задача G_λ).

Задача G_λ. *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{10}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{11}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{12}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in C_1O \cup OC_2. \tag{13}$$

Предварительно для уравнения (9) в областях D_1 и D_2 строятся в явном виде решения задач Дарбу [1]. На основании этих решений задача G_λ сводится к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа в области D_0: *найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (10)–(12) и*

$$u_y(x,0) + u_x(x,0) = \lambda \int_x^0 \tau(t)\overline{J_1}[\sqrt{\lambda}(t-x)]dt, \quad -1 < x < 0,$$

$$u_y(x,0) - u_x(x,0) = \lambda \int_0^x \tau(t)\overline{J_1}[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt, \quad 0 < x < 1,$$

где $\overline{J}_1(z) = J_1(z)/z$, $J_1(z)$ — функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

В случае когда область эллиптичности является полукругом с центром в начале координат, методом разделения переменных найдены собственные значения λ_{nm} и соответствующие им собственные функции

$$u_{nm}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} c_{nm}J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)}\right](cos\mu_n\varphi + sin\mu_n\varphi), \ (r,\varphi) \in D_0, \\ (-1)^{n+1}c_{nm}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\right], \ (x,y) \in D_1, \\ c_{nm}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\right], \ (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{14}$$

где $\mu_n = n - 1/2$, $n \in$ N, $c_{nm} =$ const, λ_{nm} — m – й корень уравнения $J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0$.

Исследован вопрос о полноте в пространствах $L_2(D_0)$, $L_2(D_1)$, $L_2(D_2)$ и $L_2(D)$ системы собственных функций (14).

Теорема 2.3. *Система собственных функций (14) задачи G_λ полна в пространстве $L_2(D_0)$.*

Теорема 2.4. *Подсистема собственных функций (14) задачи G_λ при $n = 2, 3, \cdots$ полна в $L_2(D_2)$.*

Теорема 2.5. *Подсистема собственных функций (14) задачи G_λ при $n = 2, 3, \cdots$ полна в $L_2(D_1)$.*

Теорема 2.6. *Система собственных функций (14) задачи G_λ не полна в $L_2(D)$.*

В §§ **2.2 – 2.4** на основании работ [2,3] показаны применения системы собственных функций при построении решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе.

В § **2.2** построено решение задачи G_2 для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0, \qquad (15)$$

в области D, ограниченной частью окружности Γ ($x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$), а при $y < 0$ характеристиками — A_1C_1, C_1O, OC_2, C_2A_2 уравнения (15), где $A_1(-1,0)$, $A_2(1,0)$, $C_1(-1/2,-1/2)$, $C_2(1/2,-1/2)$.

Задача G_2. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:* (10),(11), (13) и

$$u(x,y)\Big|_{\Gamma} = v(r,\varphi)\Big|_{r=1} = f(\varphi),\ \varphi \in [0,\pi],$$

где f – заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 2.7. *Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0,\pi]$, $0 < \alpha \le 1$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то существует решение задачи G_2, которое имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n r^{n-\frac{1}{2}} \sin[(n-1/2)\varphi + \pi/4], & (r,\varphi) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n (y-x)^{n-\frac{1}{2}}, & (x,y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n (x+y)^{n-\frac{1}{2}}, & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

где f_n определяются по формулам [2]

$$f_n = \int\limits_0^\pi f(\varphi) h_n(\varphi) d\varphi, \qquad (16)$$

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos\varphi/2)^{-1}}{(\operatorname{tg}\varphi/2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} (\sin n\varphi) B_{n-k},$$

$$B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^{m} (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{n!},$$

при этом $u \in C^\infty(D_0 \cup A_1O \cup OA_2) \cap C^\infty(D_1 \cup A_1O) \cap C^\infty(D_2 \cup OA_2)$.

В § **2.3** построено решение задачи G_2 для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0,\ \lambda \in \mathrm{C},$$

в области D.

Теорема 2.8. *Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0,\pi]$, $0 < \alpha \le 1$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то существует решение задачи G_2 для любого $\lambda \ne \lambda_{n,m}$, и имеет вид (соответственно в областях D_0, D_1 D_2):*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \dfrac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}r]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]} \sin\left[\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right], \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \dfrac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \dfrac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}, \end{cases}$$

где f_n определяются по формуле (16), и при этом $u(x,y) \in C^\infty(D_0 \cup A_1O \cup OA_2) \cap C^\infty(D_1 \cup A_1O) \cap C^\infty(D_2 \cup OA_2)$.

В § **2.4** для уравнения

$$LV \equiv V_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot V_{yy} + V_{zz} = 0$$

в области $\Omega = D \times (0,\pi)$ изучена следующая

Задача G. *Найти функцию $V(x,y,z)$, удовлетворяющую условиям:*

$$V(x,y,z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2),$$

$$LV(x,y,z) \equiv 0,\ \ (x,y,z) \in \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$V(x,y,z)|_S = W(r,\varphi,z)|_{r=1} = f(\varphi,z),\ \varphi \in [0,\pi],\ z \in [0,\pi],$$

$$V(x,y,z)|_{y=x} = 0,\ x \in [-1/2,0],\ z \in [0,\pi],$$

$$V(x,y,z)|_{y=-x}=0,\ x\in[0,1/2],\ z\in[0,\pi],$$

$$V(x,y,z)|_{z=0}=V(x,y,z)|_{z=\pi}=0,$$

где f – заданная достаточно гладкая функция, $S=\{x^2+y^2=1, y\geq 0, z\in[0,\pi]\}$, $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{x<0,y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{x>0,y<0\}$.

Теорема 2.9. *Если функция $f(\varphi,z)$ по переменной φ удовлетворяет на отрезке $[0,\pi]$ условию Гельдера с показателем $\alpha\in(0,1]$, а по переменной z на отрезке $[0,\pi]$ условию Гельдера с показателем $\beta\in(0,1]$, $f(\varphi,0)=f(\varphi,\pi)=0$, $f(0,z)=f(\pi,z)=0$, то существует решение задачи G в области Ω и оно имеет вид (соответственно в областях Ω_0, Ω_1, Ω_2):*

$$V(x,y,z)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n,k=1}^{\infty} f_{nk}\sin nz\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]\frac{I_{k-\frac{1}{2}}(nr)}{I_{k-\frac{1}{2}}(n)},\\ \sum\limits_{n,k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}}f_{nk}\sin nz\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\frac{I_{k-\frac{1}{2}}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-\frac{1}{2}}[n]},\\ \sum\limits_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}f_{nk}\sin nz\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\frac{I_{k-\frac{1}{2}}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-\frac{1}{2}}[n]}.\end{cases}$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов

$$P_n(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}\sin[(k-1/2)\varphi+\pi/4],\ \varphi\in[0,\pi],$$

функция определяется формулой $P_n(\varphi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\varphi,z)\sin nz dz$, $I_\mu(\cdot)$ *— модифицированная функция Бесселя.*

В главе 3 исследована спектральная задача G_λ для уравнений смешанного типа со степенным вырождением. Найдены собственные значения и соответствующие собственные функции задачи G_λ. Построенная система собственных функций исследована на полноту.

В § **3.1** рассматривается задача G_λ для уравнения

$$Lu\equiv \operatorname{sgn} y\cdot|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m\lambda^2 u=0,\ \lambda\in C,\ m>0,\ (17)$$

в области D, аналогичной области из § 2.1, где A_1C_1, C_1O, OC_2 и C_2A_2 являются характеристиками уравнения (17).

На основании решения задач Дарбу [4] для уравнения (17) в области D_1 с граничными условиями: $u_y(x,0)=\nu(x)$, $x\in(-1,0)$, $u(x,y)|_{C_1O}=0$, $x\in[-1/2,0]$ и в области D_2 граничными условиями: $u_y(x,0)=\nu(x)$, $x\in(0,1)$, $u(x,y)|_{OC_2}=0$, $x\in[0,1/2]$, получены соотношения между функциями $u(x,0)$ и $u_y(x,0)$ на отрезках A_1O и OA_2 оси $y=0$:

$$u(x,0)=d\int\limits_0^x\frac{\overline{J}_{-\beta}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{2\beta}}u_y(x,0)dt,\ 0\leq x\leq 1, \qquad (18)$$

$$u(x,0)=d\int\limits_x^0\frac{\overline{J}_{-\beta}[\lambda(t-x)]}{(t-x)^{2\beta}}u_y(x,0)dt,\ -1\leq x\leq 0, \qquad (19)$$

где $d=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}\frac{(2-4\beta)^{2\beta}}{2}$, $\beta=\frac{m}{2(m+2)}$, $\overline{J}_{-\beta}(z)=\Gamma(1-\beta)(\frac{z}{2})^{\beta}J_{-\beta}(z)$, $J_{-\beta}(z)$ — функция Бесселя, позволяюшие свести задачу (10)–(13) к нелокальной спектральной задаче для уравнения (17) в области D_0 : *найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (10)–(12), (18) и (19).*

В области $D_0=\{(x,y)|x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}<1,\ y>0\}$ методом разделения переменных найдены собственные значения λ_{nk} и соответствующие им собственные функции задачи G_λ (соответственно в областях D_0, D_1, D_2):

$$u_{nk}(x,y)=$$

$$
= \begin{cases} c_{nk} r^{-\beta} J_{\gamma_n}(\lambda_{nk} r)\Big[\sin^{1-2\beta}\dfrac{\varphi}{2} F(\dfrac{1}{2}+\gamma_n, \dfrac{1}{2}-\gamma_n, \dfrac{3}{2}-\beta; \sin^2\dfrac{\varphi}{2})+ \\ +\dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(3/2-\beta)}{\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1+\gamma_n-\beta)} F(\beta+\gamma_n, \beta-\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\beta; \sin^2\dfrac{\varphi}{2})\Big], \\ c_{nk}\dfrac{\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(1/2+\gamma_n)}{\Gamma(1+2\gamma_n)\Gamma(1/2-\beta-\gamma_n)}\sigma^{-\beta} J_{\gamma_n}(\lambda_{nk}\sigma)\times \\ \times(1-\theta)^{-(\beta+\gamma_n)} F\left(\beta+\gamma_n, 1/2+\gamma_n, 1+2\gamma_n; \dfrac{1}{1-\theta}\right), \\ \dfrac{c_{nk}}{2\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(1/2+\gamma_n)}{\Gamma(1+2\gamma_n)\Gamma(1/2+\beta)}\sigma^{-\beta} J_{\gamma_n}(\lambda_{nk}\sigma)\times \\ \times\theta^{-(\beta+\gamma_n)} F(\beta+\gamma_n, 1/2+\gamma_n, 1+2\gamma_n; 1/\theta), \end{cases} \tag{20}
$$

где $\gamma_n = n - 1/2$, $n \in \mathrm{N}$, c_{nk} — действительные числа, λ_{nk} — k–й корень уравнения $J_{\gamma_n}(\lambda) = 0$.

В **§ 3.2** система собственных функций (20) исследована на полноту.

Теорема 3.1. *Система собственных функций (20) задачи G_λ полна в $L_2(D_0)$.*

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность научному руководителю профессору Сабитову Камилю Басировичу за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения.– 1990. – Т. 26, № 6. – С. 1023–1032.
2. *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения.– 1987. – Т. 23, № 1. – С. 177–179.
3. *Моисеев Е.И.* Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения.– 1990. – Т. 26, № 1.– С. 93–1003.
4. *Капилевич М.Б.* О функциях Грина-Римана для сингулярных задач Трикоми //Rev. Roumaine math pures et appl. – 1966. – № 3. – С. 317–324.

5. *Кучкарова (Байназарова) А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции: Тезисы докл. Междунар. науч. конф. – Самара, 1997. – С. 10–11.
6. *Кучкарова (Байназарова) А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения типа Чаплыгина // Физика конденсированного состояния: Труды Всеросс. науч. конф. – Стерлитамак, 1997. – Т. 1. Математические методы физики. – С. 10–13.
7. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* О единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения типа Чаплыгина // Материалы II Уральской региональной межвузовской научно-практической конференции. – Ч. 2. – Уфа, 1997. – С. 6.
8. *Кучкарова (Байназарова) А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа // Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы: Сборник науч. трудов Междунар. науч. конф. – Ч.1. – Стерлитамак, 1998. – С. 69–73.
9. *Кучкарова (Байназарова) А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Чаплыгина // Тезисы Третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ). – Ч. 4. – Новосибирск, 1998. – С. 7–8.
10. *Кучкарова (Байназарова) А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения типа Чаплыгина // Проблемы математического образования в педвузах на современном этапе: Тезисы докладов науч.–практ. конф. – Челябинск, 1998. – С. 5.
11. *Кучкарова А.Н.* Решение задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром методом разделения переменных // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике: Сборник науч. трудов. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал АН РБ, 1999. – С. 44–49.
12. *Кучкарова А.Н.* Единственность решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа // Проблемы физико – математического образования в педвузах России на современном этапе: Материалы Всеросс. науч.–практ. конф. – Ч. 2. – Магнитогорск, 1999. – С. 20–23.

13. *Кучкарова А.Н.* О спектральных свойствах задачи Геллерстедта для оператора Лаврентьева-Бицадзе // Понтрягинские доклады - X. Современные методы в теории краевых задач: Тезисы докладов конф. – Воронеж, 1999. – С. 149.
14. *Кучкарова А.Н.* Аналог задачи Геллерстедта для пространственного уравнения смешанного типа // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. III. Анализ и дифференциальные уравнения: Труды Междунар. науч. конф. – Уфа, 2000. – С. 121-125.
15. *Кучкарова А.Н.* Задача Геллерстедта для пространственного уравнения смешанного типа // Мат. моделир. в естеств. и гуманит. науках: Тезисы докладов Воронеж. зим. симп. – Воронеж, 2000. – С. 132.
16. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа // 4-й Сибирский конгресс по прикладнойииндустриальной математике (ИНПРИМ–98): посвященный памяти М.А. Лаврентьева (1900–1980): Тезисы докладов. – Ч.1. – Новосибирск, 2000. – С. 77.
17. *Кучкарова А.Н.* О существовании решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Тезисы докладов второй Междунар. конф. – Нальчик, 2001. – С. 109–111.
18. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральная задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Том 11. Проблемы современной математики: Материалы Междунар. науч. конф. – Казань: УНИПРЕСС, 2001. – С. 229–233.
19. *Кучкарова А.Н.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа // Ред. Сиб. мат. ж. СО РАН. Новосибирск, 2001, 21 С. Деп. в ВИНИТИ 29.08.2001. № 1915 – В 2001.
20. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сиб. мат. ж. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 1147–1161.
21. *Кучкарова А.Н.* О полноте системы собственных функций задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа // Дифференциальные ура .внения и их приложения: Труды Междунар. науч.

конф. – Самара: СамГАСА, 2002. – С. 208–211.

Работы [7], [16], [18], [20] выполнены в соавторстве с научным руководителем Сабитовым К.Б., которому принадлежит постановка задач.

Диссертация выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования Российской Федерации, код гранта 22, и Российского фонда фундаментальных исследований, код гранта 99-01-00934.