КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Костин Андрей Викторович

ГЕОМЕТРИЯ ОРИСФЕР ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2002

Работа выполнена на кафедре геометрии Казанского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор А.П.Широков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор И.Х.Сабитов, кандидат физико-математических наук, доцент С.П. Гаврилов.

Ведущая организация: Ростовский государственный университет.

Защита состоится «29» ноября 2002 г. в 16 часов на заседании специализированного Совета по математике Д 212.081.10. Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17 НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета (г. Казань, ул. Университетская, 18).

Автореферат разослан «22» октября 2002 г.

Ученый секретарь специализированного Совета,

доцент ________________ /М.А. Малахальцев/.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Актуальность изучения пространств постоянной кривизны объясняется тем, что они имеют приложения и в математике, и в теоретический физике. Как и любая другая область математики, они всегда будут служить источником различных задач. Возможность построения в многообразиях орициклов плоскости Лобачевского и орисфер пространства Лобачевского аналогов преобразований Лагерра предполагает изучение взаимосвязей этих преобразований с преобразованиями Лагерра в евклидовом пространстве, а также параллельное изучение геометрий семейств орисфер пространства Лобачевского и семейств плоскостей евклидова пространства и интерпретации объектов одного пространства в другом. При рассмотрении преобразований Лагерра на псевдоевклидовой плоскости оказалось, что траектории трех различных однопараметрических подгрупп группы Лагерра представляют собой три псевдоевклидовых аналога трактрисы. При вращении этих кривых вокруг их баз в псевдоевклидовом пространстве получаются поверхности, на которых реализуется геометрия либо собственной, либо идеальной области пространства Лобачевского. Поэтому интересной представляется задача получения единообразного описания поверхностей вращения постоянной кривизны в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах.

Геометрии m-орисфер в неевклидовых пространствах посвящена работа М.И.Горбуновой [1] (см. также [2]). Движения в псевдоевклидовых пространствах изучались, в частности, в различных статьях В.Г. Коппа, из которых в данной работе использованы [3] и [4]. Теория нормализации А.П. Нордена изложена в [5]. Необходимые

---

1. Горбунова М.И. Геометрия m-орисфер в неевклидовых пространствах // Ученые записки Коломенского педагогического ин-та. Т.8, 1964. С. 53-74.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. – М.: Наука, 1969. 574 с.
3. Копп В.Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца // Ученые записки Казан. ун-та. Т. 123, кн. 1. Казань, - 1963. С. 59-77.
4. Копп В.Г. Линейные комплексы и их пучки в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. // Ученые записки Елабужского пед-го ин-та. Т.3. – 1958. С. 35-82.
5. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

сведения из теории касательных расслоений можно найти в [6]. Геометрия Лагерра подробно изложена И.М. Ягломом в [7]. Теории дробно-линейных преобразований посвящено много работ Б.А.Розельфельда, З.А.Скопеца, И.М.Яглома. Аналоги преобразований Лагерра, действующие в многообразии прямых плоскости Лобачевского рассмотрены в совместной работе [8] двух последних авторов. А.П. Широков предложил рассматривать аналоги преобразований Лагерра, действующие в многообразиях орициклов плоскости Лобачевского и орисфер пространства Лобачевского. Аналоги преобразований Лагерра в многообразии орициклов плоскости Лобачевского изучены М.А.Микенбергом [9]. Аналоги преобразований Лагерра в идеальной области пространства Лобачевского введены в работе К.П.Шустовой [10]. Связь геометрии касательных расслоений комплексной проективной прямой с геометрией Лобачевского изучалась в работе Н.Н.Переломовой [11]. Классические результаты по геометрии Лобачевского приведены в сборнике [12]. Вопросам вложения поверхностей с определенной метрикой в трехмерное псевдоевклидово

---

6. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. Т.9. – 246 с.
7. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. // Математическое просвещение № 6. – 1961. С. 61-106.
8. Скопец З.А., Яглом И.М. Преобразования Лагерра плоскости Лобачевского и дробно-линейные преобразования двойного переменного
9. Микенберг М.А. Геометрия Лагерра и ее аналог. – Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1994. – 159 с.
10. Шустова К.П. Взаимосвязь между преобразованиями Лагерра в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и их аналогами в идеальной области трехмерного пространства Лобачевского / Казан. ун-т. – Казань, 1993. – Деп. в ВИНИТИ. 15.12.93, № 3077 – В 93. – 19 с.
11. Переломова Н.Н. Касательные расслоения комплексной проективной прямой и геометрия Лобачевского. – Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1989. – 97 с.
12. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. –М.: ГТТЛ, 1956.–528 с.

пространство посвящена работа Д.Д.Соколова [13]. В последние годы появились интересные работы по вложению метрик в псевдоевклидово пространство. Интерпретации пространств постоянной кривизны изложены в книгах Б.А.Розенфельда, Ф.Клейна, Э.Картана, П.А.Широкова [14] и многих других авторов. Свойства псевдоевклидовой инверсии изложены в [15].

Цель работы. Установить взаимосвязи между геометриями семейств_ орисфер собственной и идеальной областей пространства Лобачевского с одной стороны и геометриями семейств ориентированных плоскостей евклидова и псевдоевклидова пространств с другой. Изучить аналоги преобразований Лагерра, действующие в многообразии орисфер пространства Лобачевского. Дать истолкование однопараметрических подгрупп группы Лагерра на псевдоевклидовой плоскости и изучить поверхности вращения соответствующих траекторий в псевдоевклидовом пространстве.

Методы исследования. Используются методы классической дифференциальной геометрии, теории расслоенных пространств, метод нормализации Нордена, методы теории гладких многообразий и групп Ли, методы теории накрытий.

Научная новизна и основные задачи, решенные в диссертации и выносимые на защиту.

1. Построено отображение, сопоставляющее ориентированной гиперплоскости евклидова пространства гипероорисферу пространства Лобачевского и установлены взаимосвязи между геометриями семейств ориентированных гиперплоскостей евклидова пространства, огибающих ориентированные гиперсферы (циклы), и геометриями семейств гипероорисфер пространства Лобачевского, огибающих элементарные поверхности постоянной кривизны этого пространства.

2. Построено отображение, сопоставляющее ориентированной евклидовой гиперплоскости псевдоевклидова пространства ${}^{1}E_{n+1}$ гипероорисферу идеальной области ${}^{1}\Lambda_{n+1}$ пространства Лобачев-

---

13. Соколов Д.Д. О регулярности выпуклых поверхностей с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. – 1977. Т.8. – С. 257-276.
14. Широков П.А. Избранные работы по геометрии. – Казань: Из-во Казан. ун-та. – 1966. 433 с.
15. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука. 1966.

ского. Установлены взаимосвязи между геометриями семейств ориентированных гиперплоскостей псевдоевклидова пространства ${}^1E_{n+1}$ и геометриями семейств гиперорисфер идеальной области ${}^1\Lambda_{n+1}$ пространства Лобачевского.

3. Дано истолкование аналогов преобразований Лагерра исходя из свойств пространства Лобачевского. Выделена подгруппа, изоморфная группе движений пространства Лобачевского.

4. Введены аналоги трактрисы на псевдоевклидовой плоскости и изучены поверхности вращения этих кривых в псевдоевклидовом пространстве. В работе трактрисы возникли как траектории однопараметрических подгрупп группы Лагерра на псевдоевклидовой плоскости. Изучены поверхности вращения постоянной кривизны в псевдоевклидовом пространстве и установлены их связи со стандартными плоскостями S_2, Λ_2, ${}^1\Lambda_2$.

Научное и прикладное значение. Полученные результаты могут быть использованы в научных исследованиях по неевклидовой геометрии, а также при чтении спецкурсов в тех высших учебных заведениях, где проводятся исследования по дифференциальной и неевклидовой геометрии, изучаются основания геометрии.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на итоговых научных конференциях ЕГПИ; на международной школе – семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, сентябрь 1998 г., сентябрь 2002 г.); на международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ (Казань, октябрь 2000 г.), на семинаре кафедры геометрии КГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, из которых 2 в соавторстве. В диссертацию включены лишь результаты автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Весь материал разбит на 8 параграфов. Общий объем работы – 115 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы, указана цель работы и изложены основные результаты диссертации.

В первой главе строится диффеоморфизм многообразий ориентированных гиперплоскостей евклидова и псевдоевклидова пространств и многообразий гиперорисфер соответственно собственной и идеальной областей пространства Лобачевского, точнее двух его экземпляров с общим абсолютом. Изучаются взаимосвязи между огибающими семейств гипερорисфер и гиперплоскостей. Посредством изотропной проекции многообразия огибающих наделяются псевдоевклидовой метрикой, изучаются взаимосвязи между метриками подмногообразий.

В § 1 гиперорисфере

$$(\vec{\eta}-\vec{\rho})^2+(\theta-\frac{\omega}{2})^2=(\frac{\omega}{2})^2$$

собственной области пространства Лобачевского Λ_{n+1}, задаваемой своим уравнением в модели Пуанкаре с абсолютом $\theta=0$ сопоставляется ориентированная гиперплоскость

$$2\sum_{i=1}^{n}\xi^i x^i+(\vec{\rho}^{\,2}-1)x^{n+1}-\omega=0$$

пространства E_{n+1}, рассматриваются огибающие семейств гиперорисфер и гиперплоскостей. Выделяются случаи, когда огибающие (циклы) являются гиперплоскостями пространства Лобачевского, точками пространства Λ_{n+1}, гиперорисферами, гиперсферами, эквидистантами гиперплоскостей. Характеристика соответствующих им огибающих семейств гиперплоскостей дается с учетом свойств пространств E_{n+1} и ${}^1E_{n-2}$. С использованием изотропной проекции дается истолкование касания циклов. Рассматриваются преобразования «переориентации» циклов. Дается конформная интерпретация соотношений двойственности, задаваемых абсолютным поляритетом в проективной модели расширенного пространства Лобачевского. Находится вид линейного элемента индуцированной метрики в подмногообразиях огибающих семейств гиперорисфер. В частности, доказывается, что в многообразии точек, рассматриваемых в качестве огибающих семейств гиперорисфер, снова индуцируется метрика собственной области пространства Лобачевского. В многообразии гиперплоскостей пространства Λ_{n+1} индуцируется метрика идеальной области пространства Лобачевского. В многообразии гиперорисфер, рассматриваемых в качестве огибающих семейств гиперорисфер, индуцируется вырожденная метрика

$$ds^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d\eta^i)^2}{(\eta^{n+1})^2}.$$

В двух последних случаях индуцированная метрика совпадает с угловой метрикой в этих многообразиях.

В § 2 конформная модель идеальной области ${}^1\Lambda_{n+1}$ пространства Лобачевского получена методом автополярной нормализации гиперквадрики в проективном пространстве P_{n+2}. Далее решаются задачи, аналогичные задачам § 1, для семейств гиперорисфер идеальной области ${}^1\Lambda_{n+1}$ пространства Лобачевского и семейств ориентированных гиперплоскостей пространства ${}^1E_{n+1}$. В частности, показывается, что при переориентации цикла в ${}^1E_{n+1}$ соответствующий ему цикл в пространстве ${}^1\Lambda_{n+1}$, которое рассматривается в модели Пуанкаре в псевдоевклидовом пространстве, подвергается инверсии в псевдоевклидовой гиперсфере и наоборот.

В § 3 рассматривается модель пространства Лобачевского в семействе сфер евклидова пространства. Для наглядности рассуждения ведутся в малой размерности. Дается геометрическая характеристика семейств окружностей, соответствующих простейшим кривым, в частности, орициклам плоскости Лобачевского.

Во второй главе рассматриваются преобразования Лагерра и их аналоги в пространстве Лобачевского. В § 4 строится базис операторов группы Лагерра G_{10} в E_3. Преобразования группы истолковываются как движения пространства ${}^1E_4$. Устанавливаются связи этих преобразований с преобразованиями на комплексной проективной прямой. А именно, шесть операторов группы Лагерра являются лифтами в касательное расслоение преобразований комплексной проективной прямой.

В § 5 дается истолкование преобразований группы G_{10} исходя из свойств пространства Лобачевского Λ_3. Рассматривается действие преобразований как на орисферы, так и на огибающие семейств орисфер. Элементарными средствами доказывается, что эти преобразования обладают свойством «орициклической эквилонгальности». Аналогичные рассуждения можно провести и для идеальной области пространства Лобачевского. Выделяется подгруппа G_6 группы G_{10}, изоморфная группе движений пространства Λ_3. Дается истолкование псевдоевклидовых трансляций в пространстве Лобачевского.

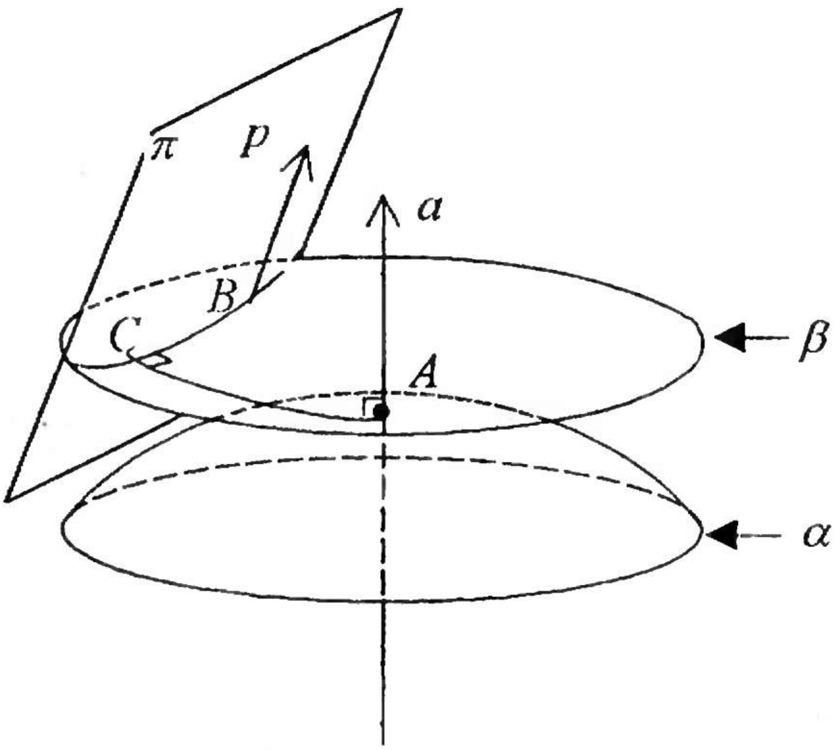
Приведем пример исследования оператора u, порождающего пространственноподобные трансляции в псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_4$. Соответствующее ему в пространстве Лобачевского преобразование на орисферы действует так. Орисфера $\alpha(\zeta,\omega)$, где $\zeta \in C$, $\omega \in R$ - координаты северного полюса евклидовой сферы, служащей орисферой пространства Лобачевского в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве - переходит в концентрическую орисферу

$$\tilde{\alpha}(\zeta,\tilde{\omega} = (\zeta+\bar{\zeta})t+\omega).$$

Без использования координат можно предложить следующий алгоритм для определения конечного преобразования, порожденного инфинитезимальным преобразованием u_5:

1) фиксируем плоскость π и в ней направленную прямую p;
2) выбираем ось a орисферы α, параллельную в указанном направлении прямой p. $a \cap \alpha =$т. A.
3) через т. A проводим орисферу β с той же осью. $\beta \cap \pi$ по орициклу BC;
4) из т. A на орисфере β проводим орицикл AC перпендикулярно орициклу BC (во внутренней геометрии орисферы β это евклидов перпендикуляр к прямой BC). Длину дуги орицикла до точки пересечения обозначим $\overset{\frown}{AC} = \tau$.

Учитывая это, получим истолкование оператора u_5: орисфера α под действием конечного преобразования, соответствующего параметру t, переходит в концентрическую орисферу $\tilde{\alpha}$, такую, что длина отрезка их общей оси равна $\ln(1+2\tau\cdot t)$.



В § 6 дается геометрическая характеристика некоторых операторов группы Лагерра плоскости ${}^1E_2$, частично изученной в [16]. Устанавливаются связи этих преобразований с геометрией Лобачевского. Под действием трех однопараметрических подгрупп прямая псевдоевклидовой плоскости «скользит» по трем различным псевдоевклидовым аналогам трактрисы.

В третьей главе изучаются поверхности вращения постоянной кривизны в псевдоевклидовом пространстве.

В § 7 рассматриваются поверхности вращения одной из трактрис, найденных в § 6:

$$\begin{cases} x = \lambda(\ln th\dfrac{u}{2} + chu) \\ y = \lambda shu. \end{cases}$$

Для поверхности, полученной эллиптическим вращением трактрисы, строится ее накрытие идеальной областью ${}^1\Lambda_2$ плоскости Лобачевского с удаленным особым орициклом – изотропной прямой. Каждая точка при эллиптическом вращении трактрисы движется по орициклу идеальной области, при гиперболическом – по орициклу собственной

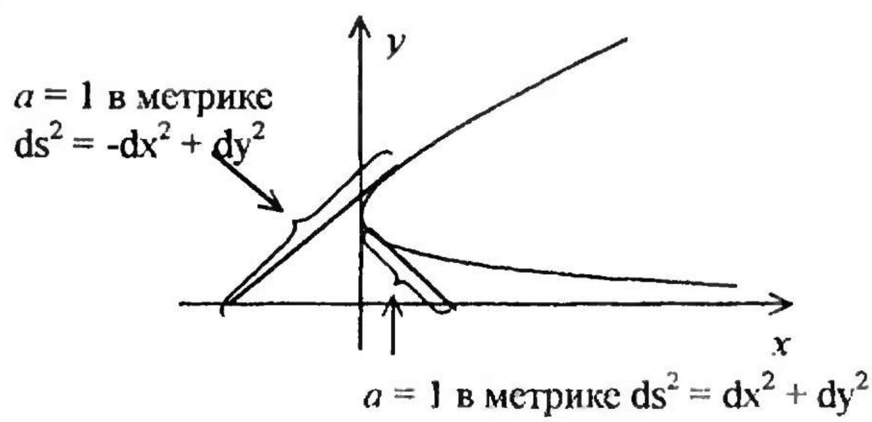
16. Шустова К.П. О преобразованиях Лагерра в псевдоевклидовой плоскости / Казан. ун-т. – Казань, 1993. – Деп. в ВИНИТИ 21.04.93, № 1039-В 93. – 14 с.

области плоскости Лобачевского. Фактически одна из этих псевдосфер получена П.А. Широковым в работе «Интерпретация и метрика квадратичных геометрий». Только автор не обратил внимания на свойства самого меридиана и не исследовал глобально связи поверхности с идеальной областью плоскости Лобачевского.

В § 8 рассматривается более общая задача. Рассматриваются меридианы поверхностей вращения постоянной кривизны в евклидовом пространстве. Радиус вращения заменяется на мнимый и рассматриваются эллиптические и гиперболические вращения полученных кривых в псевдоевклидовом пространстве. Показывается, что в интегрируемых случаях меридианы являются трактрисами или окружностями (которые тоже можно истолковать как трактрисы, только с изотропной базой). Изучаются поверхности вращения в ${}^1E_3$. Строится, в частности, продолжение евклидовой «воронки» Бельтрами-Миндинга (см. [17]). Меридиан

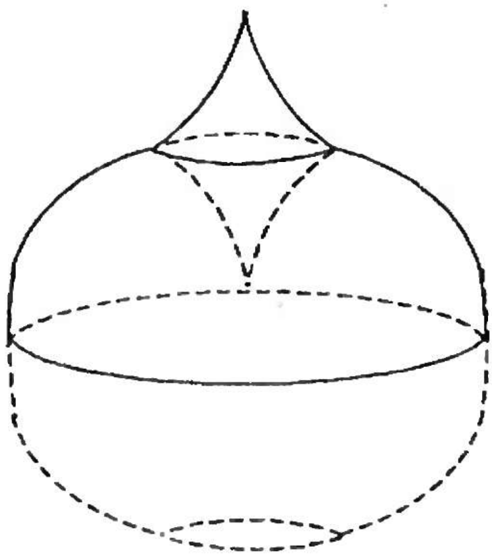
$$\begin{cases} x = sh\,t - arctg(sh\,t), \\ y = ch\,t. \end{cases}$$

псевдоевклидова продолжения «воронки» Бельтрами-Миндинга является одним из псевдоевклидовых аналогов трактрисы: отрезок касательной от точки касания до базы имеет постоянную вещественную длину (для данной кривой равную единице), расстояния между точками базы мнимы. К месту склейки обе кривые подходят тангенциально.



17. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ, - 1980. – 439 с.

При гиперболическом вращении данной трактрисы вокруг базы возникает поверхность, изометричная части идеальной области, заключенной между ее орициклом и абсолютом. Строится также псевдоевклидово продолжение евклидовой поверхности вращения постоянной положительной кривизны; после разреза по меридиану фрагмент поверхности в псевдоевклидовом пространстве отображается на «расширенный» круговой сектор эллиптической плоскости, охватывающий угол $2\pi b$, где $b > 1$.



В итоге локально получается четыре типа поверхностей: гиперболическая, псевдогиперболическая, эллиптическая, псевдоэллиптическая. Глобальная структура их различна. С помощью теории накрытий и двух метрик пространств E_3 и ${}^1E_3$ устанавливаются взаимосвязи изучаемых поверхностей с поверхностями вращения постоянной кривизны в E_3 и со стандартными эллиптической, гиперболической плоскостями, а также с идеальной областью плоскости Лобачевского.

Публикации автора по теме диссертации

1. Костин А.В. О метрике в многообразии огибающих семейств орисфер // Тезисы докладов Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 1996. С.19.
2. Костин А.В. К геометрии орисфер собственной и идеальной областей пространства Лобачевского // Тезисы докладов Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 1998. С.40-42.
3. Костин А.В., Костина Н.Н. О модели пространства Лобачевского в семействе сфер евклидова пространства // Тезисы докладов Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 1998. С.42-43.
4. Костин А.В. О конформной модели пространства ${}^1\Lambda_n$ и геометрии гиперплоскостей ${}^1E_n$ // Молодежный вестник. Межвузовский сборник научных трудов. В. 2. Набережночелнинский пед. ин-т., Наб. Челны, 1999. С. 132-136.
5. Костин А.В. К геометрии гиперорисфер // Тр. Матем. центра. им. Н.И. Лобачевского. Т. 5. Казань, 2000. С. 120-121.
6. Костин А.В. Преобразования аналога группы Лагерра в пространстве Лобачевского // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания. Межвуз. сб. научных трудов. – Пенза, 2001. С. 37-42.
7. Костин А.В. Замечание о преобразованиях Лагерра на псевдоевклидовой плоскости // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского, Т. 11. Казань, 2001. С. 157-160.
8. Костин А.В. Поверхности вращения постоянной кривизны в псевдоевклидовом пространстве // Движения в обобщённых пространствах. Межвуз. сб. научных трудов. Пензенский гос. пед. ун-т. – 2002. С. 111-126.
9. Костин А.В. Семейства орисфер собственной и идеальной областей пространства Лобачевского // Елабужский гос. пед ин-т. – Елабуга, 2002. – Деп. в ВИНИТИ 11.04.02, №673-В2002 – 42 с. ил.
10. Костин А. В. О преобразованиях Лагерра и поверхностях постоянной кривизны в псевдоевклидовом пространстве // Тр. участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 2002. с. 35-37.

11. Костин А. В., Костина Н. Н. Об истолковании преобразований в идеальной области пространства Лобачевского // Тр. участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 2002. с. 37-38.