КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Абруков Денис Александрович

Внутренняя геометрия поверхностей и распределений проективно-метрического пространства

01.01.04 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2002

Работа выполнена в Чувашском государственном педагогическом университете имени И.Я. Яковлева

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор Столяров А.В.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Аминова А.В.
кандидат физико-математических наук, доцент Тимофеев Г.Н.

Ведущая организация:

Калининградский государственный университет

Защита состоится 29 октября 2002 г. в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18, конференц-зал научной библиотеки КГУ.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «18» 10 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат
физико-математических
наук, доцент

М.А. Малахальцев

I. Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. Теория различных дифференцируемых подмногообразий (в том числе и оснащенных) в однородных и обобщённых пространствах составляет одно из основных направлений исследований современной дифференциальной геометрии. Обзор большого числа работ по геометрии многомерной поверхности как в пространствах с фундаментальными группами, так и в обобщённых пространства приведен в работах Г.Ф. Лаптева[1)] и Ю.Г. Лумисте[2)].

Г.Ф. Лаптев[3), 4)] при помощи разработанного им метода продолжений и охватов в инвариантной аналитической форме построил дифференциальную геометрию гиперповерхности в проективном пространстве P_n и пространстве проективной связности $P_{n,n}$. Н.М. Остиану[5)] изучала геометрию m-мерной поверхности n-мерного проективного пространства P_n. Существенные результаты по проективно-дифференциальной геометрии многомерной поверхности принадлежат А.П. Нордену[6)] и его школе и получены методом нормализации. М.А. Акивис[7)] методом Г.Ф. Лаптева осуществил инвариантное построение геометрии поверхностей конформного пространства.

В 60-х-70-х годах прошлого века обобщённая теория распределений m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности $P_{n,n}$ (в частности, в проективном пространстве P_n) получила значительное развитие в инвариантной аналитической форме в работах Г.Ф. Лаптева[8)], Н.М. Остиану[9)], Ю.Г. Лумисте[10)] и др.

---

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Геометрия (1963) / Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. – 1965. – С. 5-64.

2. *Лумисте Ю.Г.* Дифференциальная геометрия подмногообразий // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. –Т. 13. – ВИНИТИ АН СССР – М., 1977. – С. 273-380.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погружённых многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. об-ва, 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

4. *Лаптев Г.Ф.* Гиперповерхность в пространстве проективной связности // ДАН СССР. – 1958. – Т. 121. – № 1. – С. 41-44.

5. *Остиану Н.М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. Геом. семинара / Ин-т. научн. информ. АН СССР. – 1966. – Т. 1. – С. 239-263.

6. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

7. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – №1. – С. 53-72.

8. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семинара / Ин-т. научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т.3. – С. 49-94.

9. *Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. Геом. семинара / Ин-т. научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 95-114.

10. *Лумисте Ю.Г.* Распределения на однородных пространствах // Проблемы геометрии / Итоги науки техники ВИНИТИ АН СССР. – 1977. – Т. 8. – С. 5-24.

В работах А.В. Столярова[11] и Ю.И. Попова[12] изучаются соответственно двух- и трехсоставные распределения проективного пространства P_n. Распределениями гиперплоскостных элементов ($m=n-1$), погружёнными в проективное пространство P_n и пространство проективной связности $P_{n,n}$ занимались Н.М. Остиану[13], А.В. Столяров[14] и др.

Представляет интерес теория подмногообразий, погружённых в пространства, фундаментальная группа которых есть подгруппа проективной (евклидовой, аффинной) группы, преобразования которой оставляют неподвижным некоторое подмногообразие (абсолют), вложенное в данное пространство. Проблемой изучения пространств с абсолютом (а также подмногообразий, погруженных в эти пространства) в разное время занимались такие исследователи как А.П. Норден[15], А.Э. Хатипов[16], А.П. Широков[17] и другие отечественные и зарубежные геометры.

В настоящем диссертационном исследовании предметом изучения являются подмногообразия, погружённые в n-мерное проективно-метрическое пространство K_n[6]; под пространством K_n понимается n-мерное проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют); фундаментальной группой пространства K_n является подгруппа группы проективных преобразований пространства P_n, а именно, стационарная подгруппа абсолюта Q_{n-1}. Задача изучения геометрии подмногообразий проективно-метрического пространства K_n, а именно, m-мерной поверхности $V_m \subset K_n$ была поставлена А.П. Норденом[6]. Внутренняя геометрия нормализованного в смысле А.П. Нордена пространства K_n исследуется А.В. Столяровым[18].

---

11. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / Итоги науки техники ВИНИТИ АН СССР. – 1975. – Т. 7. – С. 117-151.

12. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. – С.-Петребург: С.-Петребургский ун-т, 1992. – 172 с.

13. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. Геом. семинара / Ин-т. научн. инф. АН СССР. – 1973. – Т. 4. – С. 71-120.

14. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащённых многообразий: Монография. – Чебоксары, 1994. – 290 с.

15. *Норден А.П.* О полярной нормализации в пространстве с вырожденным абсолютом // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу / МГУ. М., 1952. – Вып. 9. – С. 198-212

16. *Хатипов А.Э.* Теория поверхностей в пространстве с абсолютом, распавшимся на пару комплексно-сопряжённых плоскостей // Тр. Узбек. ун-та. – 1955. – 59. – С. 105-132.

17. *Широков А.П.* Геометрия обобщённых биаксиальных пространств // Уч. зап. Казанского гос. ун-та, 1954. – Т. 114. – кн. 2. – С. 123-166.

18. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства // Диф. геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградский ун-т, 2001. – Вып. 32. – С. 94-101.

В настоящей работе изучаются как голономные (поверхности V_m), так и неголономные (распределения m-мерных линейных элементов) подмногообразия пространства K_n. Эти исследования являются актуальными, представляют большой научный интерес, ибо:

1) геометрия поверхности V_m в K_n изучена далеко не полно;

2) геометрия распределений m-мерных линейных элементов в K_n (даже в случае $m=n$-1) до настоящего времени не изучалась;

3) изучение геометрии указанных подмногообразий (как голономных, так и неголономных) в диссертации осуществляется, как правило, с привлечением теории двойственности, что до настоящего времени исследователями не проводилось.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является изучение геометрии многомерных поверхностей и распределений, погружённых в проективно-метрическое пространство K_n; решаются следующие ключевые задачи:

1) изучить внутреннюю геометрию поверхности V_m ($m<n$-1), не принадлежащей абсолюту Q_{n-1} пространства K_n; найти порядок её полного внутреннего фундаментального объекта (глава I);

2) внутренним инвариантным образом изучить двойственную геометрию поверхности V_m ($m<n$-1), принадлежащей абсолюту Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n (глава I);

3) построить основы двойственной геометрии как неголономной (распределение гиперплоскостных элементов), так и голономной гиперповерхности, погруженной в проективно-метрическое пространство K_n (главы II и III);

Методика исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод внешних дифференциальных форм Э. Картана[19] и метод продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева[3]. Использование указанных методов позволило:

1) исследование геометрии подмногообразий пространства K_n провести инвариантным образом путём построения и изучения полей геометрических объектов, охваченных полями фундаментальных объектов;

2) изучить дифференциально-геометрические факты подмногообразий, связанные с дифференциальными окрестностями по возможности высоких (до четвертого) порядков.

Геометрия аффинных связностей, индуцируемых нормализацией различных подмногообразий проективно-метрического пространства K_n, исследуется с привлечением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф. Лаптевым. Все рассмотрения в диссертации приводятся с локальной точки зрения; функции предполагаются достаточное число раз дифференцируе-

---

19. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

мыми, то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие. Все результаты получены в минимально специализированных системах отнесения.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Их научная новизна обусловлена тем, что:

• внутренняя геометрия подмногообразий проективно-метрического пространства K_n, а также их двойственная геометрия ранее почти не изучались;

• изучение дифференциальной геометрии подмногообразий пространства K_n происходит инвариантными аналитическими методами посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцируемых полями фундаментальных объектов данного подмногообразия.

Теоретическая и практическая значимость. Исследование имеет теоретическое значение. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении различных подмногообразий, погружённых в проективно-метрическое пространство K_n. Основными направлениями подобных исследований являются:

• изучение внутренней геометрии гиперполос, гиперполосного распределения и распределения m-мерных линейных элементов пространства K_n;

• исследование пространств с линейной связностью, индуцируемых внутренними инвариантными оснащениями данных подмногообразий.

Теория, разработанная в диссертации, может служить в качестве материала специальных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а именно:

а) по теории подмногообразий в пространствах с фундаментальными группами;

б) по теории двойственных линейных связностей на оснащённых подмногообразиях пространств с фундаментальными группами.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на научных конференциях студентов, аспирантов и докторантов Чувашского государственного педагогического университета (Чебоксары, 2000-2002 г. г.), на итоговых научных конференциях преподавателей ЧГПУ (Чебоксары, 2001-2002 г. г.), на заседаниях молодых исследователей по геометрии (ЧГПУ, Чебоксары, 2001-2002 г. г.), на IX Международной конференции «Математика. Образование. Экономика. Экология» (Чебоксары, 2001 г.), на Международной молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2001), на X Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (Ростов-на-Дону, 2002), на заседаниях научно-исследовательского геометрического семинара Казанского госуниверситета (2002 г.).

Публикации. Основные научные результаты, включённые в диссертацию, опубликованы в десяти печатных работах [1]-[10] автора.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные работы по теме диссертации выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (общая характеристика работы), краткого изложения её содержания, трех глав и списка использованной литературы, включающего 120 наименований. Полный объем работы составляет 130 страниц машинописного текста.

II. Краткое содержание диссертации

Глава I диссертации посвящена изучению внутренней геометрии поверхности V_m ($m<n$-1) проективно-метрического пространства K_n.

В § 1 приводится материал, носящий реферативный характер; он необходим в дальнейшем изложении.

Центральным результатом § 2 является теорема I.1: распределение m-мерных линейных элементов $\Im$ ($m<n$-1), центр которого не принадлежит абсолюту Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n, в дифференциальной окрестности первого порядка порождает инвариантно присоединённое к нему гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H, для которого данное распределение $\Im$ является базисным; найдено условие регулярности распределения H.

В § 3, п. 1 с использованием подобъектов $\{\Lambda^{\alpha}_{ij}\}$, $\{\Lambda^{\alpha}_{ij},\Lambda^{\alpha}_{ijk}\}$,... ...,$\{\Lambda^{\alpha}_{ij},\Lambda^{\alpha}_{ijk_1},...,\Lambda^{\alpha}_{ijk_1...k_s}\}$ соответственно фундаментальных объектов $\{\Lambda^{\alpha}_{iK}\}$, $\{\Lambda^{\alpha}_{iK},\Lambda^{\alpha}_{iKL}\}$,...,$\{\Lambda^{\alpha}_{iK},\Lambda^{\alpha}_{iKL_1},...,\Lambda^{\alpha}_{iKL_1...L_s}\}$ распределения $\Im$ в K_n доказана теорема I.2, которая является аналогом теоремы I.1 применительно к поверхности V_m ($m<n$-1), не принадлежащей абсолюту Q_{n-1} пространства K_n: поверхность $V_m \subset K_n$ ($m<n$-1), не принадлежащая абсолюту Q_{n-1}, в дифференциальной окрестности второго порядка внутренним образом порождает инвариантно присоединённую к ней гиперполосу H_m, для которой данная поверхность является базисной; найдено условие регулярности гиперполосы H_m.

Теорема I.2 позволяет свести изучение геометрии поверхности $V_m \subset K_n$ ($m<n$-1), не принадлежащей абсолюту Q_{n-1}, к изучению геометрии ассоциированной с ней гиперполосы H_m; последний факт заметно упрощает задачу изучения внутренней геометрии подмногообразия V_m. Сказанное подтверждается результатами, полученными в § 3, п. 2, 3, а именно, доказаны следующие центральные теоремы I.3 (п. 2), I.4 (п. 2), I.7 (п. 3) соответственно:

1) внутренним образом определённая инвариантная нормализация гиперполосы H_m, а значит, и внутренняя инвариантная нормализация её базисной поверхности $V_m \subset K_n$ ($m<n$-1), не принадлежащей абсолюту Q_{n-1}, возможна лишь в третьей дифференциальной окрестности текущей точки B_0 поверхности V_m и определяется полями квазитензоров $\{P^i_n, P_i\}$ третьего порядка;

2) внутреннее инвариантное оснащение в смысле Э. Картана гиперполосы

H_m в K_n, а значит, и её базисной поверхности $V_m \subset K_n$ (m<n-1), не принадлежащей абсолюту Q_{n-1}, возможно лишь в четвертой дифференциальной окрестности текущей точки B_0 поверхности V_m и определяется полями квазитензоров соответственно второго и четвертого порядков $\{a_n^u\}$, $\{-a_u\}$ и полем геометрического объекта четвертого порядка $\{P_n^i, P_n, a_n^u\}$;

3) порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности V_m, не принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства K_n (m<n-1), равен пяти, то есть при задании этого объекта поверхность V_m определяется с точностью до преобразования фундаментальной группы пространства K_n.

Последний результат (теорема I.7) является фундаментальным в теории поверхности $V_m \subset K_n$ (m<n-1), ибо он представляет собой аналог теоремы Петерсона-Кодацци для поверхности V_2 трехмерного евклидова пространства E_3.

В § 4 исследуется геометрия *m*-мерной поверхности, принадлежащей абсолюту Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n.

Центральным результатом § 4, п. 1 является теорема I.8: *m*-мерная поверхность V_m, текущая точка которой принадлежит абсолюту Q_{n-1} пространства K_n(m<n-1), порождает инвариантно присоединённую к ней гиперполосу H_m, для которой данная поверхность V_m будет базисной и касательная гиперплоскость $T_{n-1}(A_0)$ к абсолюту в текущей точке $A_0 \in V_m$ является главной касательной гиперплоскостью гиперполосы H_m; в случае невырожденности абсолюта гиперполоса H_m является регулярной.

Таким образом, изучение геометрии поверхности, принадлежащей невырожденному абсолюту Q_{n-1} пространства K_n, сводится к изучению геометрии регулярной квадратичной гиперполосы H_m, ассоциированной с этой поверхностью; эта гиперполоса в дальнейшем обозначается $H_m(Q_{n-1})$.

Доказано (теорема I.9), что в случае невырожденности абсолюта Q_{n-1} пространства K_n квадратичная гиперполоса $H_m(Q_{n-1})$ является конической[20] тогда и только тогда, когда она плоская[20]. Ниже предполагается, что гиперполоса $H_m(Q_{n-1})$ не является конической (а, следовательно, плоской).

Два пространства с линейной связностью называются *двойственными*[14], если структурные формы этих пространств преобразуются друг в друга по инволютивному закону.

Основным результатом § 4, п. 2 является теорема I.10: *m*-мерная поверхность V_m, лежащая на абсолюте Q_{n-1} пространства K_n, индуцирует:

---

20. *Василян М.А.* Проективная теория многомерных гиперполос // Изв. АН Арм. ССР. Матем. – 1971. – Т. 6. – №6. – С. 477-481.

1) тангенциальное проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n(V_m)$ с абсолютом $\overline{Q}_{n-1}$ – тангенциальной гиперквадрикой, двойственное пространству $K_n(V_m)$; образующими элементами этой гиперквадрики являются касательные гиперплоскости ξ абсолюта Q_{n-1} пространства K_n.

2) во второй дифференциальной окрестности подмногообразие $\overline{H}_m(\overline{Q}_{n-1})$, двойственное гиперполосе $H_m(Q_{n-1})$.

В § 4, п. 3 найдены внутренние инвариантные оснащения в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$. Приводятся примеры построения в третьей дифференциальной окрестности внутренних инвариантных двойственных и полярных[6)] (относительно абсолюта Q_{n-1}) нормализаций регулярной квадратичной гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$, а, следовательно, её базисной поверхности V_m.

В § 4, п. 4 показано, что нормализация в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$ в K_n индуцирует две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения; приведены геометрические характеристики аналитических условий параллельного перенесения допустимых направлений в связностях $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ вдоль кривой l, принадлежащей базисной поверхности V_m гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$.

Изучается внутренняя геометрия двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$. Доказана справедливость утверждений (теоремы I.11-I.14):

1) Связность $\overset{1}{\nabla}$ ($\overset{2}{\nabla}$), индуцируемая некоторой нормализацией регулярной квадратичной гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$, будет вейлевой с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда данная нормализация полярна (относительно абсолюта Q_{n-1}).

2) Внутренняя геометрия любой из двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых полярной нормализацией (ν_n^i, ν_i^0) гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$ пространства K_n ($m<n$-1), является римановой тогда и только тогда, когда нормализация *вполне гармонична*[6)] подмногообразию H_m.

3) Полярная нормализация (ν_n^i, ν_i^0) гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$ пространства K_n вполне гармонична подмногообразию H_m тогда и только тогда, когда поле нормалей первого (второго) рода *сопряжено*[6)], то есть $\nu^k_{n[i}g_{j]k}=0$ (*гармонич-*

но[6], то есть $\overset{0}{\nu}_{[ij]}=0$) гиперполосе H_m.

4) Двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$ проективно-метрического пространства K_n, совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперполосы $H_m(Q_{n-1})$ полярна относительно абсолюта Q_{n-1}; при этом связность $\overset{0}{\nabla} \equiv \overset{1}{\nabla} \equiv \overset{2}{\nabla}$ риманова с полем метрического тензора g_{ij}.

В § 4, п. 5 найдена связь между геометриями поверхности $V_m \subset Q_{n-1}$ пространства K_n и m-мерной поверхности конформного пространства C_{n-1}. Справедлива теорема I.15: геометрия m-мерной поверхности V_m, принадлежащей абсолюту Q_{n-1} овального типа n-мерного пространства K_n ($m<n-1$), изоморфна геометрии m-мерной поверхности V_m собственно конформного пространства C_{n-1}; при этом метрическим тензором g_{ab}, $a,b=\overline{1,n-1}$ пространства C_{n-1} является тензор $g_{ab}=(g_{ij},\ g_{iu}=0,\ g_{uv})$.

В **главе II** диссертации изучается двойственная геометрия распределения первого рода $\mathfrak{R}$ гиперплоскостных элементов, центр которого – точка A – не принадлежит абсолюту Q_{n-1} пространства K_n.

Центральным результатом § 1, п. 2 является теорема II.1: регулярное распределение гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$, погружённое в пространство K_n, индуцирует:

1) в третьей дифференциальной окрестности тангенциальное проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$ с абсолютом $\overline{Q}_{n-1}$ – тангенциальной гиперквадрикой, двойственное K_n.

2) в первой дифференциальной окрестности – многообразие $\overline{\mathfrak{R}}$, двойственное исходному распределению $\mathfrak{R}$.

Следует заметить, что тангенциальный абсолют $\overline{Q}_{n-1}$, вообще говоря, не совпадает с тангенциальным абсолютом $\overline{\overline{Q}}_{n-1}$, образующими элементами которого являются касательные гиперплоскости к абсолюту $Q_{n-1} \subset K_n$.

В § 2, п. 1 в третьей дифференциальной окрестности текущего элемента распределения получены определяемые внутренним инвариантным образом поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{n-1} и $\overline{Q}^2_{n-1}$ распределения $\mathfrak{R}$ в K_n и двойственного подмногообразия $\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{K}_n$ соответственно.

В случае голономного распределения $\mathfrak{R}$ обращение в нуль тензора Дарбу D^n_{ijk} есть условие касания третьего порядка соприкасающихся гиперквадрик поля $Q^2_{n-1}(\overline{Q}^2_{n-1})$ с распределением $\mathfrak{R}$ (подмногообразием $\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{K}_n$).

В § 2, п. 2 приведены примеры построения двойственных внутренним образом определяемых инвариантных оснащений в смысле А.П. Нордена регулярного распределения $\mathfrak{R}$ в K_n.

В § 2, п. 3 показано, что нормализация в смысле А.П. Нордена регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в K_n индуцирует две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения. Доказано, что двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ *обобщённо сопряжены*[6)] относительно поля тензора Λ_{ij}^n вдоль любой кривой *l*, принадлежащей распределению $\mathfrak{R}$ в K_n. В случае голономности распределения $\mathfrak{R}$ найдено условие совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ (теорема II.2): на нормализованном голономном распределении гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в K_n двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация подмногообразия $\mathfrak{R}$ есть нормализация Михэйлеску и соприкасающиеся гиперквадрики Q_{n-1}^2 с распределением $\mathfrak{R}$ имеют касание третьего порядка.

В § 3 найдена квадратичная форма, определяющая метрику тангенциального проективно-метрического пространства $\overline{K}_n$. Данная метрика является невырожденной тогда и только тогда, когда абсолют $\overline{Q}_{n-1}$ пространства $\overline{K}_n$ невырожден: $\overline{a} = \left|\overline{a}_{IK}\right| \neq 0$.

В § 4 исследуется внутренняя геометрия нормализованного тангенциального проективно-метрического пространства $\overline{K}_n$. Суть нормализации пространства $\overline{K}_n$ состоит в задании некоторого однозначного, непрерывного и дифференцируемого соответствия «гиперплоскость ξ_0 → связка гиперплоскостей с центром в точке S_0», $S_0 \notin \xi_0$. Нормализация пространства $\overline{K}_n$ будет *полярной* относительно тангенциального абсолюта $\overline{Q}_{n-1}$, если центр S_0 нормализующей связки гиперплоскостей является полюсом нормализуемой гиперплоскости ξ_0 относительно абсолюта $\overline{Q}_{n-1}$.

Доказано, что нормализация пространства $\overline{K}_n$ индуцирует пространство аффинной связности $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ без кручения. Имеют место следующие предложения (теоремы II.3-II.5):

1) внутренняя геометрия симметрического пространства аффинной связности $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$, индуцируемого полярной нормализацией тангенциального проективно-метрического пространства $\overline{K}_n$, является метрической с полем метрического тензора $\overline{a}_{IK}$ и эквиаффинной;

2) для того, чтобы связность пространства $\overset{0}{A}_{n,n}$, индуцируемого некоторой нормализацией тангенциального проективно-метрического пространства $\overline{K}_n$ с невырожденной метрикой, являлась вейлевой, необходимо и достаточно, чтобы данная нормализация была полярной;

3) пространство аффинной связности, индуцируемое полярной нормализацией тангенциального пространства $\overline{K}_n$ с невырожденной метрикой, является римановым $\overline{V}_n\,(c)$ постоянной кривизны $K=-1/c$; при этом если пространство $\overline{V}_n\,(c)$ является собственно римановым, то при $K>0$ абсолют пространства $\overline{K}_n$ есть тангенциальная гиперквадрика овального типа, а при $K<0$ – тангенциальная мнимая гиперквадрика.

Справедлива теорема II.6: регулярное распределение гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$, погружённое в пространство K_n, при полярной нормализации точечного и тангенциального пространств K_n и $\overline{K}_n$ соответственно в случае невырожденности их абсолютов Q_{n-1} и $\overline{Q}_{n-1}$ индуцирует два римановых пространства $V_n\,(c)$ и $\overline{V}_n\,(c)$ одинаковой постоянной кривизны $K=-\frac{1}{c}$, причем эти пространства являются изоморфными относительно инволютивного преобразования структурных форм пространств K_n и $\overline{K}_n$.

В **главе III** работы изучается геометрия регулярной гиперповерхности V_{n-1}, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1} пространства K_n.

В § 1 доказана теорема III.1: регулярная гиперповерхность V_{n-1} в проективно-метрическом пространстве K_n индуцирует:

а) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\overline{P}_n(V_{n-1})$, двойственное пространству K_n;

б) во второй дифференциальной окрестности – многообразие $\overline{V}_{n-1}$, двойственное исходной гиперповерхности V_{n-1}.

В § 2 изучается гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$, полярная по отношению к исходной гиперповерхности V_{n-1} пространства K_n.

В § 2, п. 1 показано, что регулярная гиперповерхность V_{n-1} в K_n внутренним образом индуцирует регулярную гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$, *полярную* данной V_{n-1} относительно абсолюта Q_{n-1} с невырожденным тензором a_{ij}; при этом касательной гиперплоскостью $\widetilde{T}_{n-1}$ (T_{n-1}) в текущей точке $B_n\in\widetilde{V}_{n-1}$ ($A_0\in V_{n-1}$) будет поляра точки A_0 (B_n).

Доказана теорема III.3: регулярная гиперповерхность V_{n-1} в K_n вырождается в гиперквадрику Q^2_{n-1} тогда и только тогда, когда полярная ей (относительно абсолюта Q_{n-1}) гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$ вырождается в гиперквадрику $\widetilde{Q}^2_{n-1}$.

В § 2, п. 2 доказана теорема III.4: полярная гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$, погружённая в пространство K_n, индуцирует:

а) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\widetilde{\widetilde{P}}_n(\widetilde{V}_{n-1})$, двойственное $K_n(\widetilde{V}_{n-1})$;

б) во второй дифференциальной окрестности – подмногообразие $\widetilde{\widetilde{V}}_{n-1}$, двойственное исходному $\widetilde{V}_{n-1}$.

В § 3 в четвертой дифференциальной окрестности текущей точки гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$ $(\widetilde{V}_{n-1} \subset K_n)$ построено поле канонического пучка нормалей первого рода $\nu^i_n(\tau)$ $(\nu^i_0(\tau))$, а также поле однопараметрического пучка нормалей второго рода $\nu_i(\tau)$ $(\nu^n_i(\tau))$ с $(n-3)$-мерной вершиной в касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$ $(\widetilde{T}_{n-1}(B_n))$; полученные пучки определяются полями нормалей Фубини и директрис Вильчинского гиперповерхности V_{n-1} $(\widetilde{V}_{n-1})$. Гиперповерхность, в каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ $(B_n \in \widetilde{V}_{n-1})$ которой канонический пучок нормалей первого рода $\nu^i_n(\tau)$ $(\nu^i_0(\tau))$ вырождается в одну нормаль, по аналогии с поверхностью $V_2 \subset P_3$ назовём *коинцидентной*[21].

Центральным результатом § 3 является теорема III.6: нормализация в смысле А.П. Нордена одной из регулярных гиперповерхностей V_{n-1} или $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n равносильна нормализации другой; при этом нормаль первого (второго) рода $\nu^i_n(\nu_i)$ гиперповерхности V_{n-1} полярна (относительно абсолюта Q_{n-1}) нормали второго (первого) рода $\nu^n_i(\nu^i_0)$ гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$, причем оснащающие объекты $(\nu^i_0,\ \nu^n_i)$ и связаны соотношениями

$$\nu^i_0 = -a^{ik}\left(g_{k0} + c\nu_k\right), \qquad \nu^n_i = -\frac{1}{A_{nn}}\left(a_{ik}\nu^k_n + a_{in}\right). \tag{*}$$

Определение. Нормализации полярных гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n полями объектов $(\nu^i_n,\ \nu_i)$ и $(\nu^i_0,\ \nu^n_i)$ соответственно, связанных между собой соотношениями (*), назовем *полярными* по отношению друг к другу.

Доказаны следующие основные утверждения, касающиеся канонических пучков нормалей первого и второго родов гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n:

1) В каждой точке $A_0 \in V_{n-1} \subset K_n$ $(B_n \in \widetilde{V}_{n-1} \subset K_n)$ пучок нормалей первого рода $\nu^i_n(\tau)$ $(\nu^i_0(\tau))$ гиперповерхности $V_{n-1}(\widetilde{V}_{n-1})$ вырождается в одну нормаль тогда и только тогда, когда в этой точке пучок нормалей второго рода $\nu_i(\tau)$ $(\nu^n_i(\tau))$ вырождается в одну нормаль (теоремы III.5, III.10).

21. *Mihăilescu T.* Geometrie differentiala projectiva. – Bucureşti Acad. RPR. – 1958. – 494 p.

2) В точке $A_0 \in V_{n-1} \subset K_n$ пучок нормалей первого рода $\nu^i_n(\tau)$ (второго рода $\nu_i(\tau)$) вырождается в одну нормаль тогда и только тогда, когда в соответствующей точке $B_n \in \widetilde{V}_{n-1}$ полярный пучок нормалей второго рода $\nu^n_i(\tau)$ (первого рода $\nu^i_0(\tau)$) полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1} \subset K_n$ вырождается в одну нормаль; следовательно, полярные гиперповерхности V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n могут быть коинцидентными лишь одновременно (теорема III.11).

В § 4 изучается внутренняя геометрия двойственных аффинных связностей, индуцируемых полярными нормализациями гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ пространства K_n.

Нормализация в смысле А.П. Нордена регулярной гиперповерхности V_{n-1} ($\widetilde{V}_{n-1}$) в K_n индуцирует две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$) без кручения. Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$) сопряжены относительно поля тензора Λ^n_{ij} (V^n_{ij}). Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ ($\overset{0}{\widetilde{\nabla}}$), средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$), является вейлевой с полем невырожденного метрического тензора $\Lambda^n_{ij}(V^n_{ij})$. Заметим, что $V^n_{ij} = \dfrac{1}{cA_{nn}} \Lambda^{lt}_n a_{il} a_{jt}$.

Найдены аналитические условия эквиаффинности связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$), а также условие римановости средней связности $\overset{0}{\nabla}$($\overset{0}{\widetilde{\nabla}}$); в частности, геометрии двойственных пространств аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$), индуцируемых нормализацией Фубини гиперповерхности V_{n-1} ($\widetilde{V}_{n-1}$) в K_n, являются эквиаффинными, а их средняя связность – риманова.

Справедливо следующее условие совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$) (теоремы III.12, III.13): двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ ($\overset{1}{\widetilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\widetilde{\nabla}}$), индуцируемые на нормализованной гиперповерхности V_{n-1} ($\widetilde{V}_{n-1}$) проективно-метрического пространства K_n, совпадают тогда и только тогда, когда рассматриваемая гиперповерхность есть гиперквадрика и её нормализация является автополярной; при этом связность $\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{2}{\nabla} \equiv \overset{0}{\nabla}$ ($\overset{0}{\widetilde{\nabla}} \equiv \overset{1}{\widetilde{\nabla}} \equiv \overset{2}{\widetilde{\nabla}}$) риманова с метрическим тензором $\Lambda^n_{ij}(V^n_{ij})$.

III. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1) Доказано, что распределение m-мерных линейных элементов пространства K_n ($m<n$-1) порождает присоединённое к нему внутренним инвариантным образом гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов.

2) Доказано, что порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности V_m, $m<n$-1, не принадлежащей абсолюту Q_{n-1} пространства K_n, равен пяти; при задании этого объекта поверхность V_m определяется с точностью до преобразования фундаментальной группы пространства K_n (заметим, что для общей m-мерной поверхности V_m, $m<n$-1 проективного пространства P_n вопрос о порядке полного внутреннего фундаментального объекта, вообще говоря, остается открытым).

3) Показано, что с m-мерной поверхностью V_m, $m<n$-1, принадлежащей абсолюту Q_{n-1} пространства K_n, внутренним инвариантным образом ассоциируется квадратичная гиперполоса $H_m(Q_{n-1})$, что позволило построить двойственную геометрию данной поверхности.

4) Доказано, что регулярное распределение гиперплоскостных элементов $\Re$ (неголономная гиперповерхность) с центром, не принадлежащим абсолюту Q_{n-1} пространства K_n, внутренним инвариантным образом в третьей дифференциальной окрестности элемента подмногообразия $\Re$ индуцирует тангенциальное проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$ с абсолютом $\overline{Q}_{n-1}$ – тангенциальной гиперквадрикой; изучаются некоторые вопросы метрики тангенциального пространства $\overline{K}_n$ и внутренней геометрии нормализованного пространства $\overline{K}_n$. В разных дифференциальных окрестностях получен ряд результатов, определяющих двойственную геометрию нормализованного подмногообразия $\Re$.

5) Изучается двойственная геометрия гиперповерхности V_{n-1}, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1} пространства K_n: построена полярная (относительно абсолюта Q_{n-1}) гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$, найдены двойственные образы $\overline{V}_{n-1}$ и $\overline{\overline{V}}_{n-1}$ гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ соответственно, рассмотрены примеры построения внутренним образом двойственных и полярных нормализаций гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$, найдена связь между ними; исследуется внутренняя геометрия двойственных аффинных связностей, индуцируемых этими нормализациями.

IV. Работы автора, опубликованные по теме диссертации

1. *Абруков Д.А.* Распределения гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве // ВИНИТИ РАН. – 2001. – 21 с. – № 872-В2001 Деп.

2. *Абруков Д.А.* Геометрия гиперповерхности проективно-метрического пространства // ВИНИТИ РАН. – 2001. – 34 с. – № 2420-В2001 Деп.

3. *Абруков Д.А.* Распределения гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве // Тезисы докл. IX международной конференции «Математика. Образование. Экономика. Экология», Чебоксары. – 2001. – С. 29.

4. *Абруков Д.А.* О взаимном распределении гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве // Сб. науч. тр. студентов, аспирантов и докторантов. – Чебоксары: ЧГПУ, 2001. – В. 9. – С. 9-15.

5. *Абруков Д.А.* Внутренняя геометрия тангенциального проективно-метрического пространства // Вестник ЧГПУ. Физико-математические науки. – Чебоксары: ЧГПУ, 2001. – № 2(21). – С. 9-15.

6. *Абруков Д.А.* Гиперповерхность в проективно-метрическом пространстве // Материалы межд. науч. молодежной школы-конференции. Казань: Изд-во ДАС, 2001. – С. 73.

7. *Абруков Д.А.* Взаимная гиперповерхность проективно-метрического пространства // Сб. науч. тр. студентов, аспирантов и докторантов. – Чебоксары: ЧГПУ, 2001. – В. 10. – С. 173-179.

8. *Абруков Д.А.* Геометрия поверхности, принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства // ВИНИТИ РАН. – 2002. – 24 с. – № 493-В2002 Деп.

9. *Абруков Д.А.* О геометрии поверхности, не принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства // ВИНИТИ РАН. – 2002. – 14 с. – № 1009-В2002 Деп.

10. *Абруков Д.А.* *m*-мерная поверхность, принадлежащая абсолюту проективно-метрического пространства // Тезисы докл. X международной конференции «Математика. Экономика. Образование», Ростов-на-Дону. – 2002. – С. 54.

Подписано в печать 15.10.02 Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ № _________. Бесплатно

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева
428000, Чебоксары, К. Маркса, 38