На правах рукописи

УДК 517.968:519.6

Аюпова Елена Фаизовна

АППРОКСИМАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Специальность 01.01.01 — «Математический анализ»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань — 2000

Диссертация выполнена на кафедре теории функций и приближений Казанского государственного университета.

Научный руководитель: **доктор физико-математических наук, профессор Габдулхаев Б.Г.**

Официальные оппоненты: **доктор физико-математических наук, профессор Мухлисов Ф.Г.**
кандидат физико-математических наук, доцент Хайруллина А.М.

Ведущая организация: **Государственный университет Молдовы**

Защита состоится «29» декабря 2000 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета по математике К 053.29.05 в Казанском государственном университете по адресу:

420008, г.Казань, ул.Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета (г.Казань, ул.Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «25» ноября 2000 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, профессор *Шурыгин В.В.*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Реферируемая работа посвящена теоретико-функциональному обоснованию приближенных методов решения слабо сингулярных интегральных уравнений (с.с.и.у.) первого рода с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора.

Как известно, необходимость решения указанных уравнений возникает при решении многочисленных теоретических и прикладных задач математики, механики, физики, химии и техники. Из теории таких уравнений следует, что они относятся к классу некорректно поставленных задач и решаются точно лишь в весьма редких частных случаях, но даже в этих случаях для доведения результата до числа необходимо вычислять различные регулярные, сингулярные и слабо сингулярные интегралы со сложными плотностями. В связи с этим для теории, и в особенности для приложений, проблема разработки приближенных методов решения с.с.и.у. первого рода с соответствующим теоретическим обоснованием представляется важной актуальной задачей.

Подробный обзор полученных в этой области отечественными математиками и механиками, а также рядом зарубежных авторов результатов и обширную библиографию можно найти в специальных обзорных работах Б.Г.Габдулхаева (1980 г.), В.А.Золотаревского (1991 г.), В.В.Иванова (1965 г.), И.К.Лифанова и Е.Е.Тыртышникова (1990 г.), В.А.Цецохо (1983 г.), в монографиях С.М.Белоцерковского и И.К.Лифанова (1985 г.), Г.М.Вайникко, А.Педас и П.Уба (1984 г.), И.И.Воровича, В.М.Александрова и В.А.Бабешко (1974 г.), Б.Г.Габдулхаева (1980 г., 1994 г., 1995 г.), Т.Н.Галишниковой и А.С.Ильинского (1987 г.), В.И.Дмитриева и Е.В.Захарова (1987), В.В.Иванова (1968 г.), Д.Колтона и Р.Кресса (1987 г.), И.К.Лифанова (1995 г.), З.Т.Назарчука (1989 г.), В.В.Панасюка, М.П.Саврука и З.Т.Назарчука (1984 г.), а также в диссертациях Л.А.Апайчевой (1986 г.), Р.Т.Валеевой (1995 г.), С.Р.Еникеевой (1998 г.), С.В.Еременко (1990 г.), Л.Б.Ермолаевой (1987 г.), А.В.Ожеговой (1996 г.), Л.А.Сурай (1994 г.), А.М.Хайруллиной (1987 г.).

Систематическому и целенаправленному исследованию приближенных методов решения различных классов с.с.и.у. первого рода с теоретико-функциональным обоснованием посвящено большое число результатов группы казанских математиков. Тем не менее, в рассматриваемой области все еще остается большое число нерешенных задач.

Цель работы — теоретико-функциональное обоснование приближенных методов решения с.с.и.у. первого рода с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора и получение оценок скорости сходимости приближенных решений к точным. При этом под теоретическим обоснованием приближенных методов, следуя Л.В.Канторовичу, в работе понимается следующий круг вопросов:

1) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений;

2) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению и определение скорости сходимости;

3) установление эффективных оценок погрешности приближенного решения, учитывающих структурные свойства исходных данных.

Методика исследований. При выводе и обосновании результатов диссертации используются известные результаты из теории функций и приближений, из общей теории приближенных методов функционального анализа и теории интегральных уравнений; при этом мы полностью следуем методике исследования аппроксимативных методов решения с.с.и.у. первого рода, специально разработанной Б.Г.Габдулхаевым.

Научная новизна. Установлено теоретическое обоснование полиномиальных прямых, проекционных и аппроксимативно-итерационных методов решения одномерных и двумерных с.с.и.у. первого рода с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора в парах функциональных пространств $\left\{Z, W^1 Z\right\}$ и $\left\{L_2, W_2^1\right\}$.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть применены в теории функций и интегральных уравнений, в частности, при дальнейшем развитии аппроксимативных методов решения с.с.и.у. первого рода. Они также могут быть применены при решении конкретных прикладных задач физики, механики, химии и математической физики, математические модели которых приводят к указанным выше уравнениям.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на Итоговых научных конференциях Казанского государственного университета за 1997 — 1999 гг.; на Международной научной конференции «Алгебра и анализ», посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (г.Казань, КГУ, июнь 1997 г.); на Всероссийской научной конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова (г.Казань, КГУ, сентябрь 1999 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ (г.Казань, КГУ, октябрь 2000 г.); на научно-практических конференциях соискателей именной стипендии Главы администрации г.Казани по физико-математическим наукам (г.Казань, сентябрь 1999 г., апрель 2000 г.); а также представлялись на Международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения» (г.Одесса, ОГУ, сентябрь 2000 г.). Кроме того, результаты диссертации, по мере их получения, неоднократно докладывались и обсуждались на городском научном семинаре «Теория аппроксимации и ее приложения в вычислительных методах», работающем при кафедре теории функций и приближений Казанского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано десять работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация объёмом в 113 страниц состоит из введения, двух глав и библиографического списка использованной литературы из 112 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, дается обзор литературы по теме диссертации и излагается краткое содержание полученных автором результатов.

Первая глава (§§1.1 — 1.6) посвящена приближенным методам решения с.с.и.у. первого рода вида

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s); \qquad \textbf{(1)}$$

здесь $h(s,\sigma)$, $y(s)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции, $x(\sigma)$ — искомая функция, слабо сингулярный интеграл понимается как несобственный.

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер. В нем приведены некоторые необходимые для дальнейшего изложения результаты из теории функций и приближений и функционального анализа.

В §1.2 в рассмотрение вводятся пространства Зигмунда. Через Z^{α} $(0<\alpha\le 2)$ обозначается множество всех непрерывных 2π-периодических функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих условию Зигмунда: $Z(\varphi,\alpha)<\infty$, где

$$Z(\varphi,\alpha)=\sup_{h>0}\frac{\|\varphi(s+h)-2\varphi(s)+\varphi(s-h)\|_{\infty}}{h^{\alpha}},$$

а через $W^r Z^\alpha$ $(0<\alpha\le 2, r\ge 0$ целое) — множество непрерывных 2π-периодических функций, имеющих r – ю производную из Z^α $(0<\alpha\le 2)$.

Доказано, что эти пространства являются полными несепарабельными пространствами относительно норм

$$\|\varphi\|_{Z^\alpha} = \|\varphi\|_\infty + Z(\varphi,\alpha);$$

$$\|\varphi\|_{W^r Z^\alpha} = \sum_{k=0}^{r} \|\varphi^{(k)}\|_{Z^\alpha}.$$

В §1.3 установлены аппроксимативные свойства операторов Фурье и Лагранжа в пространствах Z^α и $W^r Z^\alpha$ $(0<\alpha\le 2, r\ge 0$ целое).

Как известно, основная трудность решения уравнения (1) связана в первую очередь с его некорректностью, а именно: слабо сингулярный интегральный оператор $S\colon X\to X$,

$$Sx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma, \quad x\in X,$$

является вполне непрерывным в известных функциональных пространствах X, что влечет за собой полную непрерывность оператора $A\colon X\to X$,

$$Ax \equiv Sx + Rx,\ Rx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma.$$

В §1.4 дано обоснование корректности указанного уравнения в паре пространств $\{Z, W^1 Z\}$.

В §1.5 (пп. 1.5.1 — 1.5.4) проводится теоретическое обоснование приближенных методов решения с.с.и.у. (1) в паре пространств $\{Z, W^1 Z\}$ с использованием полученных в предыдущем параграфе результатов по аппроксимации в этих пространствах.

Пункт 1.5.1 посвящен методу Галеркина. Доказана

Теорема 5.1. *Пусть ядро $h(s,\sigma)$ таково, что оператор $R: Z \to W^1 Z$ вполне непрерывен, а точное решение исходного с.с.и.у. $x^* \in Z^\alpha$ $(1 < \alpha \le 2)$. Тогда метод Галеркина сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\right).$$

В п.1.5.2 обоснован метод коллокаций (теорема 5.2).

В п.1.5.3 дано теоретическое обоснование метода вырожденных ядер (теорема 5.3). А также установлена скорость сходимости метода для конкретных аппроксимирующих ядер (следствия 1 — 3).

В пункте 1.5.4 установлена скорость сходимости метода механических квадратур, построенного с помощью квадратурной формулы прямоугольников по сетке из $N = \{2n+1, 2n\}$ узлов:

Теорема 5.4. *Пусть ядро $h(s,\sigma) \in W^{r+1} Z^\alpha$ по каждой переменной равномерно относительно другой и правая часть $y(s) \in W^{r+1} Z^\alpha$ $0 < \alpha \le 2$, $r \ge 0$. Тогда при всех $n \ge n_0$ приближенное уравнение метода механических квадратур имеет единственное решение $x_n^*(\sigma)$, которое сходится к точному решению $x^*(\sigma)$ с.с.и.у. (1) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Z = O\left\{\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right\}, \quad r + \alpha > 1.$$

В п.1.6.1 параграфа 1.6 проведено теоретическое обоснование вычислительной схемы метода механических квадратур в различных функциональных пространствах, которая без обоснования предложена в [78]. В случае нечетного числа узлов квадратурной формулы указанная схема исследована в монографии Б.Г.Габдулхаева.

В основу исследований положено доказательство сходимости метода в пространстве квадратично-суммируемых функций, а равномерная сходимость и сходимость в пространстве гельдеровых функций выводятся как следствие сходимости в среднем.

Следует отметить, что обоснование указанной схемы в случае четного числа узлов было проведено Р.С.Храпко. В основе его исследования лежит теория компактной аппроксимации Г.М.Вайникко. Мы предлагаем другой способ обоснования, который позволяет получить все результаты Р.С.Храпко как простое следствие при минимальных требованиях на исходные функции.

Пункт 1.6.2, состоящий из двух частей, посвящен итерационным методам решения уравнения (1). Здесь дано теоретическое обоснование двух итерационных схем, применение которых становится возможным в рамках корректной постановки задачи решения уравнения (1), что делает его приводящимся к уравнению второго рода.

Результаты, приведенные в §7 второй главы монографии Б.Г.Габдулхаева (1980 г.), позволяют сделать вывод о том, что рассмотренные выше прямые и итерационные методы решения уравнения (1) являются важнейшими. Однако, несмотря на ряд достоинств, эти методы, как известно, обладают определенными недостатками. Например, при применении прямых методов для получения результата с требуемой точностью очень часто приходится решать алгебраические системы довольно высоких порядков, причем на каждом последующем этапе результаты счета из предыдущего этапа, вообще говоря, не используются. К недостаткам итерационных методов можно отнести то, что они (особенно метод простой итерации) применимы, как правило, лишь к ограниченному классу задач. От этих недостатков свободны смешанные методы, основанные на аппроксимативных и итерационных подходах и обладающие положительными сторонами первоначальных методов. В пункте 1.6.3 рассмотрен один из них — квадратурно-итерационный метод решения уравнения (1). Автором получены общие теоремы для оценки погрешности k-го приближения некоторого квадратурно-итерационного метода, а также рассмотрены два случая, учитывающие конкретный вид исходного уравнения и особенности построения метода механических квадратур.

Пункт 1.6.4 посвящен исследованию еще одного аппроксимативно-итерационного метода. В пространстве 2π-периодических квадратично-суммируемых функций рассмотрен частный случай уравнения (1) в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \qquad \textbf{(2)}$$

где $h(\sigma)$ — известная непрерывная 2π-периодическая функция.

Указанное уравнение решается приближенно с помощью проекционно-итеративного метода, построенного на базе универсального итерационного метода. Остановимся на вычислительной схеме метода.

Приближенное решение рассматриваемого с.с.и.у. будем искать как тригонометрический полином степени n вида

$$x_n(\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma},$$

неизвестные коэффициенты которого будем определять как решение СЛАУ порядка N, эквивалентной следующему операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Sx_n + Rx_n = P_n y \qquad (x_n, P_n y \in X_n),$$

где $P_n : X \to X_n$ — некоторый проекционный оператор. Будем решать его с помощью универсального итерационного метода

$$x_n^{k+1} = x_n^k + \tau(P_n y - Ax_n^k) \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

где x_n^0 — произвольное начальное приближение из подпространства X_n. Параметр $\tau > 0$ выберем так, что скорость сходимости применяемого универсального итерационного метода максимально возможная.

Вторая глава (§§2.1 — 2.6) посвящена точным и приближенным методам решения двумерного с.с.и.у. первого рода с логарифмическими ядрами вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right|\ln\left|\sin\frac{\tau-t}{2}\right|x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,t,\sigma,\tau)\,x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau=y(s,t), \qquad (3)$$

здесь $h(s,t,\sigma,\tau)$, $y(s,t)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, $x(\sigma,t)$ — искомая функция, причем слабо сингулярные интегралы понимаются как несобственные.

Как и в одномерном случае, уравнение (3), как правило, является некорректным в обычном смысле. Однако специальная структура ядра позволяет ставить эту задачу корректно в паре функциональных пространств.

Следует отметить, что рассмотренные в первой главе пространства Зигмунда можно обобщить и на двумерный случай. Тогда задача решения уравнения (3) в паре таких пространств также была бы корректной. Однако ввиду громоздкости выкладок и получаемых оценок автор посчитал целесообразным остановиться на паре пространств квадратично суммируемых функций, которые являются гильбертовыми, что дает дополнительные преимущества.

Корректной постановке задачи посвящен §2.1, где в качестве пространства искомых элементов рассмотрено пространство $\widetilde{L}_2 \equiv L_2[0,2\pi]^2$ суммируемых с квадратом 2π-периодических функций от двух переменных с обычной нормой

$$\|x\|_{\widetilde{L}_2}=\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(\sigma,\tau)|^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x\in\widetilde{L}_2,$$

а в качестве пространства правых частей — пространство $\widetilde{W}_2^{12} \equiv W_2^{12}[0,2\pi]^2$ 2π-периодических функций от двух переменных, которые вместе со своими первыми y_1', y_2' и вторыми смешанными производными y_{12}'', y_{21}'' являются квадратично суммируемыми 2π-периодическими функциями от двух переменных. В пространстве $\widetilde{W}_2^{12}$ введена норма

$$\|y\|_{\widetilde{W}_2^{12}} = 4\left[\|y\|_{\widetilde{L}_2} + \|y_1'\|_{\widetilde{L}_2} + \|y_2'\|_{\widetilde{L}_2} + \|y_{12}''\|_{\widetilde{L}_2}\right], \quad y \in \widetilde{W}_2^{12}.$$

Кроме того, в этом параграфе приведена структура обратных к исходным операторов, сформулированы достаточные условия их существования, а также получены соответствующие оценки норм в зависимости от структурных свойств заданных функций.

В §2.2 установлена связь между интерполяционной и интегральной нормами тригонометрического полинома в двумерном случае, дана оценка нормы двумерного оператора Лагранжа.

В §2.3 обоснованы две итерационные схемы решения с.с.и.у. (3), применение которых становится возможным в рамках корректной постановки задачи его решения.

В §2.4 приведено теоретическое обоснование метода механических кубатур, вычислительная схема которого часто используется в ряде приложений. Доказана сходимость приближенного решения к точному и установлена оценка погрешности.

В §2.5 рассматривается кубатурно-итерационный метод решения уравнения (3). Получены общие теоремы оценки погрешности k-го приближения некоторого кубатурно-итерационного метода, а также рассмотрены три случая, учитывающие конкретный вид исходного уравнения и особенности построения метода механических кубатур.

Вычислительная схема общего проекционного метода, предложенная и обоснованная в §2.6, в зависимости от выбранного линейного проекционного оператора включает в себя все полиномиальные проекционные методы решения двумерного уравнения вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right|x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s-\sigma,t-\tau)\,x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau=y(s,t), \quad (4)$$

здесь как и выше $h(s,t)$, $y(s,t)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, $x(\sigma,t)$ — искомая функция, причем слабо сингулярный интеграл понимается как несобственный.

Отметим, что обоснование приближенных методов решения n-мерного $(n>2)$ с.с.и.у. не отличается принципиально от соответствующего обоснования в двумерном случае. Такой переход лишь усложняет вычисления. В связи с этим полученные во второй главе результаты могут быть обобщены на случай приближенного решения n-мерного ($n>2$) с.с.и.у. с логарифмическими ядрами.

Сформулируем основные результаты диссертации, выносящиеся на защиту:

1. Доказаны полнота и несепарабельность пространств Зигмунда Z^{α} и W^1Z^{α} $(0<\alpha\le 2)$. Установлены аппроксимативные свойства операторов Фурье и Лагранжа в этих пространствах.

2. Для одномерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода с логарифмическим ядром дано обоснование полиномиальных методов Галеркина, коллокаций, вырожденных ядер и механических квадратур в паре пространств Зигмунда $\{Z, W^1Z\}$.

3. Для одномерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода с логарифмическим ядром обоснованы квадратурные и аппроксимативно-итерационные методы решения в паре функциональных пространств $\{L_2, W_2^1\}$.

4. Для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода с логарифмическими ядрами предложены и обоснованы кубатурные и аппроксимативно-итерационные методы решения в паре функциональных пространств $\{L_2, W_2^1\}$. Для указанного уравнения с разностными ядрами сформулированы достаточные условия обратимости исходного оператора и обоснован общий проекционный метод решения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю профессору Билсуру Габдулхаевичу Габдулхаеву за постановку задач, постоянное внимание к работе и неоценимый опыт научного общения.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Мифтахова Е.Ф.* Некоторые квадратурные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений // Алгебра и анализ. Материалы научной школы-конференции, посвященной 100-летию Б.М.Гагаева. — Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1997. — С. 151.
2. *Мифтахова Е.Ф.* Решение слабо сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур / Казанский ун-т. — Казань, 1998. — 20 с. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 395-В98.
3. *Мифтахова Е.Ф.* Итерационные методы решения слабо сингулярного интегрального уравнения / Казанский ун-т. — Казань, 1998. — 18 с. — Деп. в ВИНИТИ 26.10.98, № 3087-В98.
4. *Мифтахова Е.Ф.* Аппроксимативные методы решения многомерного слабо сингулярного интегрального уравнения / Казанский ун-т. — Казань, 1999. — 24 с. — Деп. в ВИНИТИ 22.01.99, № 191-В99.
5. *Аюпова Е.Ф.* Квадратурно-итерационный метод решения слабо-сингулярного интегрального уравнения // Теория функций, ее

приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. Казань, 13-18 сентября 1999 г. — Казань: Казанское математическое общество, 1999. — С. 31 — 33.

6. *Аюпова (Мифтахова) Е.Ф.* Приближенное решение слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода // Материалы научно-практической конференции студентов и аспирантов. Казань, 16-17 сентября 1999 г. — Казань, 1999. — С. 43 — 45.

7. *Аюпова Е.Ф.* Об итерационных методах решения двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода // Материалы научно-практической конференции студентов и аспирантов. Казань, 27 - 28 апреля 2000 года. — Казань, 2000. — С. 43.

8. *Аюпова (Мифтахова) Е.Ф.* О решении одного двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода // Изв. вузов. Матем. — 2000. — №8. — С. 72-75.

9. *Аюпова (Мифтахова) Е.Ф.* Двумерное слабо сингулярное интегральное уравнение первого рода и общий проекционный метод решения // Дифференциальные и интегральные уравнения. Тезисы докладов Международной научной конференции, 12 - 14 сентября 2000 г.— Одесса: Изд-во «АстроПринт», 2000. — С.18 - 19.

10. *Аюпова Е.Ф.* Методы решения двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения первого рода // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики. — Казань: УНИПРЕСС, 2000. — С. 28 - 30.

2-00

Отпечатано в ООО «СИДДХИ-СЕКЬЮРИТИ».
Казань, ул.Журналистов, 1/16, офис 211. Тел. (8432) 76-74-59
Лицензия №0130 от 1.08.98 г.
Заказ №320. Тираж 80 экз.
Формат 60х84/1. Бумага офсетная. Печать – ризография.