На правах рукописи

Коробков Михаил Вячеславович

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЖЕСТКОСТИ В АНАЛИЗЕ И ГЕОМЕТРИИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор **Копылов Анатолий Павлович**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Пономарёв Станислав Петрович**,

доктор физико-математических наук, профессор **Сабитов Иджад Хакович**,

доктор физико-математических наук, профессор **Семёнов Владимир Иосифович**

Ведущая организация:

Волгоградский государственный университет

Защита состоится 16 октября 2008 г. в 15 ч. на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 3 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Гутман А. Е.

Общая характеристика работы

Цель работы. Целью работы является получение теорем жесткости для C^1-гладких решений $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференциальных соотношений вида

$$Dv \in K \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

где K — подмножество пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ вещественных $m\times n$-матриц, а символом Dv обозначена матрица дифференциала отображения v. Также диссертация направлена на получение критерия однозначной определенности областей в евклидовых пространствах метрикой на границе, индуцированной внутренней метрикой области.

Постановка задач и актуальность темы диссертации.

Анализ требований гладкости в классических теоремах нередко служит плодотворным источником идей для современной математики, порождая подчас магистральные направления ее развития. Приведем два ярких примера. Согласно классической теореме Лиувилля, если $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ является конформным отображением класса C^3 области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то f представляет собой сужение на Ω некоторого мёбиусова преобразования. Стремление максимально ослабить требования гладкости в этой теореме привело Ю. Г. Решетняка к следующему замечательному результату (см. [21], [23]): *всякое отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, принадлежащее соболевскому классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющее дифференциальному соотношению*

$$Df(x) \in \mathbb{R}_+SO(n) \quad \textit{для почти всех (п.в.) } x \in \Omega, \tag{2}$$

является либо постоянным отображением, либо сужением на Ω некоторого мёбиусова отображения. Здесь символом $Df(x)$ обозначается обобщенный дифференциал, а символом $SO(n)$, как и принято, обозначается множество ортогональных матриц с определителем 1, соответственно символом $\mathbb{R}_+SO(n)$ обозначено множество матриц вида λA, где $\lambda \geqslant 0$, $A \in SO(n)$.

Отметим, что условия гладкости в теореме Решетняка были еще более ослаблены Т. Иванцом и Г. Мартином в статье [28], где они для случая четных размерностей $n = 2l$ доказали справедливость процитированного результата в предположении $f \in W^1_{l,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Ю. Г. Решетняк получил также глубокие результаты об устойчивости в теореме Лиувилля, более точно, об устойчивости класса конформных (мёбиусовых) отображений в классе отображений с ограниченным искажением [23]. Класс этих отображений, являющихся неоднолистным аналогом квазиконформных отображений, также был введен Ю. Г. Решетняком, который установил и их основные нетривиальные свойства, такие как открытость, изолированность и т. д., см. [21]. Отображения с ограниченным искажением быстро стали чрезвычайно популярным объектом исследования не только отечественных, но и зарубежных математиков (назвавших такие отображения квазирегулярными, см., например, монографию [41]). В свою очередь, методы теории отображений с ограниченным искажением нашли многочисленные приложения в геометрической теории функций, теории нелинейных уравнений с частными производными, механике сплошной среды и пр. (см., например, монографию [29]). В связи с вопросами устойчивости особо следует отметить многочисленные работы А. П. Копылова (см., например, [13], [14]), который впервые предложил общую концепцию в изучении феномена устойчивости классов отображений, позволившую исследовать на устойчивость, помимо конформных, другие интересные для анализа и приложений классы отображений (таких, как многомерные голоморфные отображения, решения эллиптических систем д. у. с частными производными и др.). А. П. Копыловым предложена также концепция устойчивости для классов липшицевых отображений (отправной точкой которой послужили работы Ф. Джона [30]–[32] по устойчивости изометрий), этой теме посвящен ряд работ его учеников (см., например, [9], [10]).

Тематика, о которой шла речь, имеет важные приложения не только в анализе, но и в геометрии. Так, квазиконформные отображения имеют глубокую связь с построенными Ю. Г. Решетняком изотермическими системами координат в двумерных пространствах Александрова ограниченной кривизны [22]. Из более современных работ, связывающих квазиконформный анализ и геометрию, отметим статью [26], посвященную квазиконформным структурам на многообразиях.

Вторым примером, когда изучение требований гладкости в классической теореме жесткости порождает целые направления в геометрии и в анализе, является следующая теорема: *Если $f : S_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ есть C^2-гладкое изометрическое погружение n-мерной сферы S_n, то множество $f(S_n)$ конгруэнтно S_n.* Поскольку в определении изометрического погружения участвуют лишь первые производные, естественно было предположить, что процитированная теорема останется верной и для C^1-гладких отображений. Однако эта долго стоявшая гипотеза была опровергнута Дж. Нэшом [39] и Н. Кейпером [36], которые доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует C^1-гладкое изометрическое вложение сферы S_n в шар радиуса ε пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Более точно, Дж. Нэш и Н. Кейпер установили, что всякое C^1-гладкое локально L-липшицево погружение (вложение) $f : V \to \mathbb{R}^k$ n-мерного риманова пространства V с $n < k$ и $L < 1$ можно аппроксимировать в C-норме последовательностью C^1-гладких изометрических погружений (вложений).

Методы построения таких «патологических» погружений (вложений) были затем развиты М. Громовым [7], который назвал их «выпуклым интегрированием» (см. также [18]).

Используя метод выпуклого интегрирования, последние годы ряд известных зарубежных математиков (Дж. Болл, Ст. Мюллер, Вл. Шверак, Б. Кирхейм и др., см., например, [38]; из отечественных специалистов в данном направлении успешно работал М. А. Сычёв [42]) изучали следующую проблему: каким условиям должно удовлетворять множество $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, чтобы дифференциальное соотношение

$$Dv(x) \in K \quad \text{для п.в. } x \in \Omega \tag{3}$$

имело нетривиальные липшицевы решения $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Обзор результатов о липшицевых решениях соотношения (3) сделан в относительно недавней работе [33]. Из последних достижений в данной тематике, не вошедших в [33], упомянем красивые результаты, полученные венгерским математиком Л. Секельхиди с соавторами [34], [27] для случая размерностей $n = m = 2$. В частности, в работе [34] доказано, что rank-1 выпуклая оболочка множества значений градиента всякого липшицева отображения $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является связным множеством (определение rank-1 выпуклой оболочки см., например, в [38]). При доказательстве результатов в работе [34] используются как классические результаты Ю. Г. Решетняка [21], так и новый элегантный метод разделяющих квазиконформных кривых, разработанный Л. Секельхиди.

В настоящей диссертации вопрос о решениях дифференциального соотношения (3) исследуется в классической постановке — для C^1-гладких функций. Опишем, наконец, один из тех феноменов жесткости, которые изучается в данной работе. Известен классический результат, что если C^2-гладкая функция $v = v(x,t)$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяет дифференциальному уравнению гамильтонова типа

$$v_t = \varphi(v_x) \quad \text{в } \Omega, \tag{4}$$

где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция, то через каждую точку $z \in \Omega$ проходит прямая линия (характеристика), на которой градиент $Dv \equiv \mathrm{const}$.

Поскольку в уравнении (4) участвуют только первые производные функции v, естественно возникает вопрос, сохранится ли указанное свойство, если предполагать только лишь C^1-гладкость отображения v и, соответственно, лишь непрерывность функции φ? Стремление к наиболее естественной постановке вопроса приводит к следующей более общей проблеме.

Проблема 1. *Пусть C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обладает свойством*

$$\operatorname{Int} Dv(\Omega) = \varnothing, \tag{5}$$

где символом Int *обозначена внутренность множества. Будет ли тогда выполнено следующее утверждение: существует не более чем счетное множество E такое, что для каждой точки $z \in \Omega$, удовлетворяющей условию*

$$Dv(z) \notin E, \tag{6}$$

найдется прямая линия $L \ni z$ такая, что $Dv \equiv \mathrm{const}$ на компоненте связности множества $L \cap \Omega$, содержащей точку z?

(Отметим, что не более чем счетное исключительное множество E появляется уже в C^2-гладком случае, поэтому такая формулировка естественна.) На примере процитированных выше результатов мы видим, как драматически может меняться ситуация с решениями дифференциальных соотношений при уменьшении гладкости. Поэтому интуитивно складывается ощущение, что ответ в Проблеме 1, вообще говоря, должен быть отрицательный. Это ощущение владело и западными специалистами. Приведем один характерный пример. В недавней работе [35] Я. Колар и Я. Кристенсен пытались доказать, что непостоянная C^1-гладкая функция $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с компактным носителем обладает свойством $Dv(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Cl} \operatorname{Int} Dv(\mathbb{R}^2)$, где символом Cl обозначено замыкание множества. Это свойство, очевидно, является тривиальным следствием положительного ответа на вопрос в Проблеме 1. Но авторы [35] даже и не пытаются ставить такую проблему, а свой результат они доказывают только при дополнительных предположениях на модуль непрерывности градиента Dv (типа гёльдеровости).

На примере приведенного результата Я. Колара и Я. Кристенсена видно, что решение Проблемы 1 помогает получить информацию о множестве значений градиента функции v. Возникает

Проблема 2. *Каким условиям должно удовлетворять множество $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, чтобы дифференциальное соотношение*

$$Dv(x) \in K \quad \text{для всех } x \in \Omega \tag{7}$$

имело нетривиальные C^1-гладкие решения $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Фактически, поставленная проблема состоит в изучении аналитических и геометрических свойств множеств значений градиента C^1-гладких отображений. Геометрические свойства множеств значений градиента всюду дифференцируемых (негладких) отображений изучались ранее, например, в работах [37], [15], [10].

Одна из принципиальных трудностей, которые возникают при исследовании Проблемы 1 (и Проблемы 2 для случая $n = 2$, $m = 1$) при переходе от C^2 к C^1-гладкости, заключается в том, что для C^1-гладких функций в общем случае не выполняется условие теоремы Сарда. Напомним, что в применении к скалярным функциям двух переменных классическая теорема Сарда звучит следующим образом.

Теорема Сарда. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{meas} v(Z_v) = 0. \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем символом Z_v обозначается множество критических точек функции v, т. е. $Z_v = \{z \in \Omega \mid Dv(z) = 0\}$.

Как показал Уитни [43], условие C^2-гладкости в данном результате опустить нельзя. А именно, Уитни построил C^1-гладкую функцию $v : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ со следующим свойством: множество критических точек Z_v содержит дугу, на которой $v \neq \text{const}$.

Однако некоторые аналоги теоремы Сарда справедливы и для функций, не имеющих требуемой степени гладкости. Хотя равенство (8) тогда может уже и не выполняться, Дубовицким [8] были получены некоторые результаты о строении множеств уровня для случая пониженной гладкости (см. также [25]).

Другим направлением исследований было обобщение теоремы Сарда для пространств Гельдера, Соболева, а также для пространств функций, удовлетворяющих условию Липшица (см., например, [25]).

Авторы цитированной статьи [35] также устанавливают аналог теоремы Сарда при сделанных ими предположениях.

Получение аналога теоремы Сарда для случая Проблемы 1 (без добавочных предположений на модуль непрерывности градиента) является первым шагом к ее решению.

В последней главе 6 настоящей диссертации исследуется иной феномен жесткости — геометрического характера. Тематика, которой посвящена указанная глава, хотя и является сравнительно молодой (она отдаленно восходит к процитированному результату Нэша – Кейпера), но непосредственно связана также с классическими задачами, имеющими двухсотлетнюю историю. Отправной точкой можно считать известную теорему Коши об однозначной определенности выпуклого многогранника своей разверткой. В дальнейшем проблемами однозначной определенности выпуклых поверхностей внутренней метрикой занимались Минковский, Гильберт, Вейль, Бляшке, Кон-Фоссен и другие известные математики. Но наибольших успехов в этом направлении добились академик А. Д. Александров и его ученики. Упомянем ставшую уже классической теорему А. В. Погорелова об однозначной определенности ограниченной замкнутой выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$ ее внутренней метрикой (см., например, [20]). Этот результат был обобщен на случай выпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ Е. П. Сенькиным [24]. Наиболее впечатляющий результат — об устойчивости в теореме А. В. Погорелова — был получен Ю. А. Волковым [6], нашедшим явную оценку деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики.

В связи с успешным развитием теории однозначной определенности выпуклых поверхностей возник естественный вопрос: можно ли получить подобные результаты для невыпуклых поверхностей? Отдельные результаты для случая повышенной гладкости были получены (см., например, работы [1], [40], где доказаны теоремы жесткости для некоторого класса поверхностей в предположениях аналитичности и C^4-гладкости соответственно). Однако в целом в свете процитированных результатов Нэша – Кейпера ответ на этот вопрос представлялся весьма пессимистичным. В самом деле, согласно указанным результатам всякая C^1-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ не является однозначно определенной (в классе всех таких поверхностей) своей внутренней метрикой.

Адекватный подход к проблеме однозначной определенности для невыпуклого случая был найден А. П. Копыловым [11] (см. также обзорную статью [12]). В подходе А. П. Копылова задача (в несколько упрощенной формулировке) ставится следующим образом.

Проблема 3. *Пусть U и V — две области в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), внутренние метрики которых продолжаются по непрерывности в замыкания этих областей. Предположим, что границы этих областей изометричны в относительных метриках, т. е. метриках, индуцируемых на границах внут-*

ренними метриками областей. Выяснить, являются ли сами области евклидово изометричными (*т. е. конгруэнтными*).

Данная проблема включает в себя упомянутую задачу об однозначной определенности выпуклых поверхностей как частный случай. В предложенном А. П. Копыловым подходе возникает также целый ряд новых и очень интересных задач, в исследовании которых в разное время принимали участие А. Д. Александров, А. В. Кузьминых, В. А. Александров, М. К. Боровикова и др. (см., например, обзорную статью [12]). Оказалось, что однозначная определенность областей относительными метриками их границ имеет место не только в классическом случае, когда их дополнения — ограниченные выпуклые множества, но, например, и в следующих случаях: область U строго выпуклая, область V любая (А. Д. Александров); область U выпуклая и отличная от полупространства, область V любая (А. В. Кузьминых); области U и V ограничены и обладают кусочно гладкими границами (В. А. Александров); области U и V обладают непустыми ограниченными дополнениями и C^1-гладкими границами, причем $n \geqslant 3$ (В. А. Александров) и др.

Однозначная определенность в классе областей с аналитическими границами изучалась в [2]. Интересные результаты по однозначной определенности областей условием *локальной* изометричности их границ в относительных метриках были получено в работах [17], [5], [4]. Новым и многообещающим является предложенный в [12] подход к однозначной определенности конформного типа.

Однако во всех перечисленных результатах, в соответствии с формулировкой Проблемы 3, предполагалось, что внутренние метрики областей U и V продолжаются по непрерывности в замыкания этих областей. Возникает следующий вопрос: нельзя ли отказаться от этого предположения и получить результаты об однозначной определенности, справедливые для всех областей, без каких бы то ни было априорных предположений о регулярности?

Хотя далеко не каждая область удовлетворяет предположениям о регулярности в формулировке Проблемы 3, но зато абсолютно *любая* область $U \subset \mathbb{R}^n$ допускает продолжение по непрерывности своей внутренней метрики на свою *хаусдорфову границу*[1]. Возникает следующая модификация исходной Проблемы 3.

[1]Получить которую можно, пополнив область U по Хаусдорфу (относительно внутренней метрики) и удалив из полученного пополнения точки самой области.

Проблема 4. *Пусть U и V — две области в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Предположим, что хаусдорфовы границы этих областей изометричны в относительных метриках. Выяснить, являются ли евклидово изометричными сами области.*

По данной проблеме был опубликован результат В. А. Александрова [3] для случая, когда границы областей U, V суть полиэдры, а также результат А. П. Копылова для ситуации, когда $n = 2$ и область U — ограниченная и выпуклая, V — любая [12]. В личном сообщении автору А. П. Копылов также сообщил решение этой задачи для случая, когда область U строго выпукла, V — любая.

В настоящей работе получено полное решение проблем 1, 3–4, а также получен ряд результатов по проблеме 2.

Основные результаты диссертации.

1. Найдены необходимые и достаточные условия на непрерывную функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с тем, чтобы уравнение гамильтонова типа на плоскости $v_t = \varphi(v_x)$ имело нетривиальные (т. е. неаффинные) C^1-гладкие решения. Доказано, в частности, что функция φ (a priori предполагаемая лишь непрерывной) должна быть дважды дифференцируема почти всюду.

2. Полностью изучен случай произвольной вещественной C^1-гладкой функции v двух переменных, у которой внутренность множества значений градиента пуста. В этом случае установлено, что линии уровня градиентного отображения являются прямолинейными отрезками. Отсюда выведено, что множество значений градиента функции v локально представляет собой кривую, которая имеет в каждой точке касательные в некотором слабом смысле, и направление этих слабых касательных меняется как функция ограниченной вариации. В то же время удалось построить вещественную C^1-гладкую функцию двух переменных, у которой множество значений градиента является дугой, не имеющей касательной (в обычном смысле) ни в одной точке.

3. Установлен аналог теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных.

4. Результаты 1–3 перенесены на случай C^1-гладких отображений $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество значений градиента которых одномерно.

5. Найдены необходимые и достаточные условия однозначной определенности областей в $\mathbb{R}^n$ метрикой хаусдорфовой границы, индуцированной внутренней метрикой области, при этом на области не налагается никаких априорных требований регулярности.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований дифференциальных соотношений с частными производными и при изучении жесткости римановых многообразий. Результаты диссертации также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области анализа и геометрии.

Методы исследования. Одним из основных методов для решения поставленных задач является концепция изэнтропических решений дифференциальных уравнений, введенная в [19]. Определение изэнтропического решения можно получить из классического (данного академиком С.Н. Кружковым [16]) определения энтропийного решения, если в последнем знак неравенства заменить знаком равенства (см. также [51]). В диссертации также активно применяется аппарат теории функций вещественных переменных. В частности, используется теорема Сарда, точнее, ее аналог для C^1-гладких функций, доказанный в главах 2, 5. Для получения результатов последней главы 6 используется техника теории однозначной определенности областей относительными метриками их границ (см. [12]).

Апробация работы. Результаты работы докладывались в Оксфорде (в январе 2007 в Математическом Институте на семинаре Applied Analysis and Mechanics), в Лозанне (Швейцария, XX Rolf Nevanlinna Colloquium, с 8 по 13 августа 2005), в Мадриде (Испания, International Congress of Mathematicians, 22-31 августа 2006), в Бендлево (Польша, на конференциях Self-similar solutions in nonlinear PDEs, с 4 по 9 сентября 2005 г.; Analysis and Partial Differential Equations Conference, 19-23 июня 2006; Geometric Analysis and Nonlinear PDEs Conference, 3-10 июня 2007), в Лоте над Рохановым (Чехия, на конференциях 35th Winter School in Abstract Analysis 2007, 13-20 января 2007; и на 36th Winter School in Abstract Analysis 2007, 12-19 января 2008), в Слупске (Польша, в Институте математике на семинаре кафедры анализа и топологии, в сентябре 2005 и в июне 2006), в Новосибирске (на Общеинститутском семинаре Института математики СО РАН; на семинаре отдела геометрии и анализа Института математики СО РАН; на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка, с 23 августа по 2 сентября 2004 г.; на Международной конференции «Математика в современном мире», посвященной 50-летию Института математики СО РАН, 17-23 сентября 2007).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в ведущих отечественных журналах [44]–[53].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из шести глав, включая введение, указателя терминов, предметного указателя и литературы. Она изложена на 160 страницах текста, набранного в редакционно-издательской системе $\LaTeX\,2_\varepsilon$, библиография содержит 91 наименование.

Содержание диссертации.

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Основные результаты каждой главы (теоремы и их следствия) явным образом сформулированы в первых параграфах главы. Нумерация всех результатов (теорем, лемм, следствий), а также определений и замечаний сквозная внутри параграфа и состоит из трех цифр: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа и третья — порядковый номер внутри параграфа. Нумерация формул двойная: первая цифра — номер главы, а вторая — порядковый номер внутри главы. (Нумерация формул и утверждений в автореферате не совпадает с нумерацией в диссертации.)

Глава 1. Введение

В данной главе приведена характеристика основных результатов работы, а также определения и обозначения, используемые далее на протяжение всей диссертации. Укажем некоторые из используемых далее обозначений, еще не поясненных выше. Символом $Dv^{-1}(A)$ обозначается прообраз $Dv^{-1}(A) = \{x \in \Omega \mid Dv(x) = A\}$. *Областью* мы называем открытое связное множество. Всюду в дальнейшем $\operatorname{Conv} E$ — выпуклая оболочка множества E, $\dim E$ — размерность множества E, $\operatorname{meas}(E)$ — мера Лебега множества E, $\mathcal{H}^k(E)$ — k-мерная мера Хаусдорфа множества E. Символом $a \cdot b$ мы обозначаем скалярное произведение векторов a,b. Символом $\operatorname{comp}_z E$ обозначается компонента связности множества E, содержащая точку z.

Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изометрическое преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ (не обязательно линейное). Тогда для $x \in \mathbb{R}^n$ символом Qx мы будем обозначать значение отображения Q в точке x (обычно так пишут для линейных отображений Q, но по техническим причинам нам будет удобно так писать и для аффинных отображений).

Глава 2. Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Основным результатом главы является следующая

Теорема 1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $0 \notin \operatorname{Cl}\operatorname{Int} Dv(\Omega)$. Тогда выполнено равенство* $\operatorname{meas} v(Z_v) = 0$.

Результаты данной главы опубликованы в работе [44].

Глава 3. О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась множеством значений градиента C^1-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

В третьей главе найдены необходимые и достаточные условия на непрерывную кривую, чтобы она была множеством значений градиента вещественной C^1-гладкой функции двух переменных. Доказано, что у этой кривой имеются касательные в некотором слабом смысле, и направление этих слабых касательных меняется как функция ограниченной вариации (см. ниже Теорему 7). В то же время, такая кривая не обязательно будет регулярной в классическом смысле: у нее может не существовать касательных (в обычном смысле) ни в одной точке (Теорема 4). В качестве приложения указанных результатов получены необходимые и достаточные условия на непрерывную функцию φ с тем, чтобы уравнение (4) имело нетривиальные (т. е. неаффинные) C^1-гладкие решения. В последнем уравнении производные v_t, v_x лишь непрерывны и, как может показаться сначала, это соотношение не может дать ничего больше естественного свойства непрерывности функции φ. Оказалось, однако, что функция φ должна быть локально липшицевой на открытом множестве полной меры, а ее производная на этом множестве должна иметь локально ограниченную вариацию (Теорема 5). В частности, φ должна быть дважды дифференцируема почти всюду.

Аналитические условия на кривую содержатся в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное инъективное отображение (дуга), и пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.*

Предположим, что выполнены следующие включения:

$$Dv(\Omega) \subset \gamma(\mathbb{R}), \tag{9}$$

$$\gamma(J) \subset Dv(\Omega), \tag{10}$$

где J — некоторое связное подмножество $\mathbb{R}$. Тогда γ обладает следующим свойством:

(Γ_1) для каждой точки $u_0 \in J$ существует окрестность $V = V(u_0)$ и непрерывная слева функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат в плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет место следующая формула:

$$\forall [u_1, u_2] \subset V \cap J \quad \gamma_2(u) \,|_{u_1}^{u_2} = \gamma_1(u) l(u) \,|_{u_1}^{u_2} - \int\limits_{u_1}^{u_2 - 0} \gamma_1(u)\, dl(u), \tag{11}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса по полуоткрытому интервалу $[u_1, u_2)$, и используется стандартное обозначение $f(u) \,|_{u_1}^{u_2} := f(u_2) - f(u_1)$.

Теорема 2 допускает обращение.

Теорема 3. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, не постоянное ни на каком интервале. Пусть, далее, на некотором связном множестве $J \subset \mathbb{R}$ отображение γ обладает свойством (Γ_1). Тогда найдутся область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и функция $v \in C^1(\Omega)$ такие, что выполнены включения (9)-(10). Более точно, существует функция $u(z) \in C(\Omega)$ такая, что справедливы равенства $Dv(z) \equiv \gamma(u(z))$ при $z \in \Omega$, $u(\Omega) = J$.*

Теоремы 2, 3 позволяют построить несколько характерных примеров.

Теорема 4. *Существуют дуга (непрерывное инъективное отображение) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, не имеющая касательной ни в одной точке $u \in \mathbb{R}$ (в частности, γ не спрямляема ни на каком интервале), и C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $Dv(\Omega) = \gamma(\mathbb{R})$.*

Далее рассмотрен случай, когда кривая γ является графиком некоторой непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. е. $\gamma(u) \equiv (u, \varphi(u))$. В этом случае включения (9)-(10) для функции $v = v(x, t)$ эквивалентны следующим соотношениям:

$$v_t = \varphi(v_x) \quad \text{в } \Omega, \tag{12}$$

$$J \subset v_x(\Omega). \tag{13}$$

Теорема 5. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая соотношениям* (12)-(13), *где $\varphi = \varphi(u)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тогда φ обладает следующим свойством.*

(Γ_2) *Существует замкнутое относительно интервала J множество F нулевой меры, такое, что функция φ удовлетворяет условию Липшица локально на $U = J \setminus F$. Более того, функция φ дифференцируема на U всюду за исключением не более чем счетного множества точек $E_{\sigma,U} \subset U$. Далее, если формально доопределить производную φ' на весь интервал J по правилу*

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi'(u) & , \quad u \in U \setminus E_{\sigma,U}; \\ \lim\limits_{\tau \to u-0} \varphi'(\tau) & , \quad u \in E_{\sigma,U}; \\ \infty & , \quad u \in F, \end{cases}$$

то полученная функция φ' будет иметь локально ограниченную вариацию на U. Кроме того, для любой точки $u_0 \in J$ найдется ее окрестность $V = V(u_0)$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что функция $\frac{1}{\varphi' - \alpha} : V \cap J \to \mathbb{R}$ будет являться функцией ограниченной вариации на V.

Отсюда видно, что «плохая» дуга из Теоремы 4 не может быть графиком некоторой непрерывной функции φ. Справедлива обратная к Теореме 5

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством* (Γ_2) *на некотором интервале $J \subset \mathbb{R}$. Тогда найдутся область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и функция $v(x,t) \in C^1(\Omega)$ такие, что выполнены соотношения* (12)-(13).

Обозначим через $\mathbb{R}P^1$ множество прямых линий плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящих через точку 0, т. е. $\mathbb{R}P^1$ есть одномерное проективное пространство. Иногда мы будем естественным образом отождествлять прямую из $\mathbb{R}P^1$ с вектором из $\mathbb{R}^2$, параллельным этой прямой.

Определение 1. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (кривая), не постоянное ни на каком интервале. Будем говорить, что прямая $p \in \mathbb{R}P^1$ является *σ-касательной справа* к кривой γ в точке u_0 (обозначается $p = \gamma'_+(u_0)$), если для любой последовательности $u_\nu \to u_0 + 0$, такой, что

$$\sup_\nu \sup_{u \in [u_0, u_\nu]} \frac{|\gamma(u) - \gamma(u_0)|}{|\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)|} < \infty,$$

имеет место сходимость (понимаемая в естественном смысле)

$$\frac{\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)}{|\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)|} \to p.$$

Аналогично вводится понятие *σ-касательной* $\gamma'_-(u_0)$ *слева* в точке u_0 и просто *σ-касательной* $\gamma'(u_0)$ в точке u_0. Очевидно, что если кривая γ имеет обычную касательную в точке, то эта касательная будет также и σ-касательной. Однако обратное утверждение неверно (это следует, например, из Теоремы 4 и сформулированной ниже Теоремы 7).

Теорема 7. *Пусть* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *— непрерывное инъективное отображение (дуга), и пусть* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *—* C^1*-гладкая функция на области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Предположим, что выполнены включения* (9)-(10). *Обозначим* $a = \inf J$, $b = \sup J$. *Тогда, помимо свойства* (Γ_1), *дуга* γ *обладает также следующим свойством:*

(Γ_3) *для каждой точки* $u_0 \in J$ *существует окрестность* $V = V(u_0)$ *и непрерывная слева функция* $l : V \to \mathbb{R}$ *ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат*[2] *в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *справедливы следующие равенства:*

$$\forall u \in V \cap J \setminus \{b\} \;\; \gamma'_+(u) = (1, l(u+0)), \quad \forall u \in V \cap J \setminus \{a\} \;\; \gamma'_-(u) = (1, l(u)), \tag{14}$$

т. е., вышеупомянутые односторонние σ-касательные существуют и параллельны векторам $(1, l(u+0))$, $(1, l(u))$ *соответственно*[3]. *Таким образом,* $\gamma'_+(u)$ *непрерывна справа в каждой точке* $u \in J \setminus \{b\}$, *а* $\gamma'_-(u)$ *непрерывна слева в каждой точке* $u \in J \setminus \{a\}$, *причем* $\gamma'_+(u) = \gamma'_-(u) = \gamma'(u)$ *для всех точек* $u \in (a, b) \setminus E_\sigma$, *где исключительное множество* E_σ *не более чем счетно.*

Результаты главы 3 получены в неразрывном соавторстве с Е. Ю. Пановым и опубликованы в работах [50]–[53].

Глава 4. Свойства C^1-гладких функций $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, множество значений градиента которых нигде не плотно

В данной главе исследована более сложная проблема: случай произвольной C^1-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, у которой внутренность множества значений градиента пуста. Этот случай сведен к рассмотренному в предыдущей главе (см. Теоремы 9, 10). При этом получен

---

[2]Здесь окрестность V, функция l и замена координат — те же самые, о которых шла речь в свойстве (Γ_1).

[3]Мы обозначаем через $l(u+0)$ соответствующий односторонний предел функции l.

положительный ответ в Проблеме 1 (Теорема 8). В качестве одного из следствий, доказана справедливость утверждения процитированной выше теоремы Я. Колара и Я. Кристенсена для произвольной C^1-гладкой функции v двух переменных, носитель которой является непустым компактным множеством (без дополнительных предположений на модуль непрерывности градиента).

Теорема 8. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что*

$$\operatorname{Int} Dv(\Omega) = \varnothing. \tag{15}$$

Тогда для любой точки $z \in \Omega$, такой, что $\operatorname{meas} Dv^{-1}(Dv(z)) = 0$, найдется прямая $L = L(z) \ni z$ такая, что $\operatorname{comp}_z(L \cap \Omega) = \operatorname{comp}_z Dv^{-1}(Dv(z))$.

Следствие 1. *Пусть $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непостоянная C^1-гладкая функция с компактным носителем. Тогда $Dv(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} Dv(\mathbb{R}^2)$.*

Напомним, что носителем функции $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества $\{z \in \mathbb{R}^n \mid v(z) \neq 0\}$.

Теорема 9. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что справедливо равенство (15). Тогда для любой точки $z_0 \in \Omega$ найдутся ее открытая связная окрестность Ω_0, непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ такие, что функция γ непостоянна ни на каком интервале, и $Dv(z) \equiv \gamma(u(z))$ при $z \in \Omega_0$.*

Из Теоремы 9 и результатов предыдущей главы непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия Теоремы 9. Тогда функция γ обладает свойствами (Γ_1) и (Γ_3) из Теорем 2, 7 на множестве $J = u(\Omega_0)$.*

Результаты главы 4 опубликованы в работах [45], [46].

Глава 5. Свойства C^1-гладких функций $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество значений градиента которых одномерно

В данной главе получены аналоги предыдущих результатов для C^1-гладких отображений $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество значений градиента которых одномерно. В частности, найдены необходимые и достаточные условия на кривую в $\mathbb{R}^{m\times n}$, чтобы она была множеством значений градиента C^1-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Показано, что у этой кривой имеются касательные в слабом смысле, эти касательные являются rank-1-матрицами, и направление этих касательных есть функция ограниченной вариации (Теорема 16). Также доказано, что в этом случае для функции v справедливо утверждение теоремы Сарда (Теорема 17), а множества уровня градиентного отображения $Dv : \Omega \to \mathbb{R}^{m \times n}$ суть гиперплоскости (см. Теорему 11).

Определение 2. Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ называется *$*$-одномерным*, если для любого линейного отображения $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$ образ $L(E)$ является нигде не плотным множеством в $\mathbb{R}^2$, т. е. $\operatorname{Int} L(E) = \varnothing$.

В случае, когда $\mathbb{R}^k$ есть плоскость (т. е. $k = 2$), $*$-одномерность множества E эквивалентна тому, что топологическая размерность E не превосходит 1. Далее, при произвольных размерностях k если $\mathcal{H}^2(E) = 0$, то множество E $*$-одномерно. Однако, если $k > 2$, то в пространстве $\mathbb{R}^k$ существуют множества, гомеоморфные отрезку из $\mathbb{R}$, но не являющиеся $*$-одномерными. К таким множествам относятся, например, графики кривых Пеано.

Теорема 11. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $Dv(\Omega)$ $*$-одномерно. Тогда для любой точки $x \in \Omega$ такой, что* $\operatorname{meas} Dv^{-1}(Dv(x)) = 0$, *найдется гиперплоскость $H = H(x) \ni x$ такая, что* $\operatorname{comp}_x(H \cap \Omega) = \operatorname{comp}_x Dv^{-1}(Dv(x))$.

Следствие 2. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $Dv(\Omega)$ $*$-одномерно. Тогда для любой точки $x_0 \in \Omega$ найдутся ее открытая связная окрестность Ω_0, непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что функция γ непостоянна ни на каком интервале, и $Dv(x) \equiv \gamma(u(x))$ при $x \in \Omega_0$.*

Для векторов $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ символом $a \otimes b$ обозначим $m \times n$ матрицу $(a_i b_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Теорема 12. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $Dv(\Omega)$ $*$-одномерно, Ω_0 — подобласть Ω, а непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times n}$ удовлетворяют условиям Следствия 2. Тогда γ обладает следующим свойством на интервале $J = u(\Omega_0)$:*

($\mathrm{M}\Gamma_1$) *существует непрерывная слева функция* $l = (l_1, \ldots, l_n){:}J \to S(0,1)$ *локально ограниченной вариации такая, что* $\forall \bar{e} \in S(0,1)\ \forall [s_1, s_2] \subset J$

$$0 \notin \mathrm{Cl}\{l(s)\cdot\bar{e} \mid s \in [s_1, s_2]\} \Rightarrow \gamma(s)\,\Big|_{s_1}^{s_2} = [\gamma(s)\bar{e}] \otimes \frac{l(s)}{l(s)\cdot\bar{e}}\,\Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2-0} [\gamma(s)\bar{e}] \otimes d\frac{l(s)}{l(s)\cdot\bar{e}} \tag{16}$$

где интегрирование ведется в смысле Лебега-Стилтьеса по полуоткрытому интервалу $[s_1, s_2)$, *а* $S(0,1)$ *есть единичная сфера в* $\mathbb{R}^n$.

Более того, если $u(x) = s \in J$ *и* $\operatorname{meas} u^{-1}(s) = 0$, *то гиперплоскость* $H(x)$ *из Теоремы 11 ортогональна вектору* $l(s)$.

Справедлива обратная к Теореме 12

Теорема 13. *Пусть* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ *— непрерывная функция, непостоянная ни на каком интервале. Предположим, что функция* γ *имеет свойство* ($\mathrm{M}\Gamma_1$) *на связном подмножестве* $J \subset \mathbb{R}$. *Тогда существует область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^1*-гладкая функция* $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *и непрерывная функция* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *такие, что* $Dv(x) \equiv \gamma(u(x))$ *для* $x \in \Omega$, $\quad u(\Omega) = J$.

Следующие теоремы посвящены изучению функциональной зависимости частных производных. Рассмотрим сначала случай вещественнозначных функций ($m = 1$). Предположим, что для непрерывной функции $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение

$$\gamma_1(s) \equiv s, \tag{17}$$

тогда дуга γ является графиком некоторой непрерывной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Из Теоремы 12 можно вывести, что кривая γ в этом случае имеет регулярность в классическом смысле.

Теорема 14. *Пусть* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *—* C^1*-гладкая функция в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющая соотношениям*

$$\forall j = 2, \ldots, n \quad \frac{\partial v}{\partial x_j} = \gamma_j\Big(\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big) \ \text{ в } \Omega,$$

где $\gamma = \gamma(s)$ *— непрерывная функция из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *со свойством* (17). *Положим* $J = \frac{\partial v}{\partial x_1}(\Omega)$. *Тогда для каждого* $j = 2, \ldots, n$ *координатная функция* γ_j *обладает свойством* (Γ_2) *из Теоремы 5 на интервале* J.

Теорема 14 допускает обращение при $n = 2$ (см. Теорему 6); при $n > 2$ это уже неверно. Если мы рассмотрим случай вектор-функций ($m > 1$), то ситуация существенно меняется: можно рассчитывать только на регулярность, описанную в предыдущих параграфах данной главы.

Теорема 15. *Пусть* $\gamma : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\gamma_{ij}(s)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *есть непрерывное отображение,*

$$\gamma_{11}(s) \equiv s, \tag{18}$$

и пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1*-гладкая функция области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Предположим, что выполнены соотношения*

$$\forall i = 1, \ldots, m \ \forall j = 1, \ldots, n \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big) \ \text{ в } \Omega. \tag{19}$$

Обозначим $J = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\Omega)$. *Тогда выполнены утверждения теорем 11 и 12, т. е.* γ *обладает свойством* (МГ_1) *на* J, *а множества уровня градиентного отображения* Dv *суть гиперплоскости.*

Обращаем внимание читателя на то, что в теоремах 15, 14 мы не предполагаем, что множество $Dv(\Omega)$ $*$-одномерно.

Хотя кривые γ из Теоремы 12 могут не иметь касательной в классическом смысле ни в одной точке, они имеют некое слабое подобие касательных в каждой точке.

Обозначим символом $\mathbb{R}P^{n-1}$ вещественное $(n-1)$-мерное проективное пространство, т. е. $\mathbb{R}P^{n-1}$ есть множество прямых линий пространства $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку 0. Иногда мы будем естественным образом отождествлять прямую из $\mathbb{R}P^{n-1}$ с ненулевым вектором из $\mathbb{R}^n$, параллельным этой прямой. Следующее определение является обобщением на многомерный случай Определения 1.

Определение 3. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — непрерывное отображение (кривая), не постоянное ни на каком интервале. Будем говорить, что прямая $p \in \mathbb{R}P^{n-1}$ является *σ-касательной справа* к кривой γ в точке s_0 (обозначается $p = \gamma'_{\sigma+}(s_0)$), если для любой последовательности $s_\nu \to s_0 + 0$, удовлетворяющей условию $\sup_\nu \sup_{s\in[s_0,s_\nu]} \frac{|\gamma(s)-\gamma(s_0)|}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)|} < \infty$, найдется последовательность векторов $a_\nu \in \mathbb{R}^m$ такая, что имеет место сходимость $\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)|} - a_\nu \otimes l \to 0$, где $l \in S(0,1)$ есть вектор, параллельный прямой p.

Аналогично вводится понятие *σ-касательной* $\gamma'_{\sigma-}(s_0)$ *слева* в точке s_0 и просто *σ-касательной* $\gamma'_\sigma(s_0)$ в точке s_0. Очевидно, что если кривая γ имеет обычную касательную в точке, и эта касательная является rank-1 матрицей $a \otimes b$, то у этой кривой будет также существовать и σ-касательная, параллельная вектору b. Однако обратное утверждение неверно.

Теорема 16. *Предположим, что условия Теорем 11-12 выполнены. Обозначим* $J = u(\Omega_0)$, $a = \inf J$, $b = \sup J$. *Тогда помимо свойства* (МГ_1) *функция* γ *обладает также следующим свойством:*

(МГ_3) *существует непрерывная слева функция* $l = (l_1, \dots, l_n) : J \to S(0,1)$ *локально ограниченной вариации такая*[4], что

$$\forall s \in J \setminus \{b\} \;\; \gamma'_{\sigma+}(s) = l(s+0), \qquad \forall s \in J \setminus \{a\} \;\; \gamma'_{\sigma-}(s) = l(s),$$

т. е. указанные σ-касательные существуют и параллельны векторам $l(s+0)$, $l(s)$ *соответственно. Таким образом,* $\gamma'_{\sigma+}(s)$ *непрерывна справа в каждой точке* $s \in J \setminus \{b\}$, *а* $\gamma'_{\sigma-}(s)$ *непрерывна слева в каждой точке* $s \in J \setminus \{a\}$, *причем* $\gamma'_{\sigma+}(s) = \gamma'_{\sigma-}(s) = \gamma'_\sigma(s)$ *для всех точек* $s \in (a,b) \setminus E_\sigma$, *где исключительное множество* E_σ *не более чем счетно. Более того, имеет место включение* $E_\sigma \subset E_u$, где $E_u = \{s \in J \mid \operatorname{meas} u^{-1}(s) > 0\}$.

Для функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ будем обозначать через Z_v множество критических точек: $Z_v = \{x \in \Omega \mid \operatorname{rank} Dv(x) < m\}$. Следующий результат является многомерным обобщением Теоремы 1.

Теорема 17. *Пусть* $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-*гладкое отображение области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *для которого выполнены предположения Теорем 11 или 15 (т. е. множество* $Dv(\Omega)$ $*$-*одномерно или частные производные функции* v *удовлетворяют уравнениям* (19)). *Тогда*

$$\operatorname{meas} v(Z_v) = 0. \tag{20}$$

Напомним, что в классической теореме Сарда для функций $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ для справедливости равенства (20) требуется C^r-гладкость, где $r = \max(0, n-m) + 1$.

Результаты главы 5 являются дальнейшим развитием идей, опубликованных в работах [44]–[46], [53].

---

[4]Здесь функция l — та же самая, о которой шла речь в свойстве (МГ_1).

Глава 6. Однозначная определенность областей в $\mathbb{R}^n$ метрикой границы, индуцированной внутренней метрикой области

Сначала напомним необходимые определения теории однозначной определенности областей (см., например, [12]).

Определение 4. Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и ρ_U — ее внутренняя метрика[5]. Пополним метрическое пространство (U, ρ_U) по Хаусдорфу. Отождествляя точки построенного пополнения, соответствующие точкам области U, с самими этими точками и удаляя их из пополнения, мы получим метрическое пространство $(\partial_H U, \rho_{H,U})$, совокупность $\partial_H U$ элементов которого называется *хаусдорфовой границей области* U, а $\rho_{H,U}$ — *относительной метрикой ее хаусдорфовой границы.* Расстояние в этой метрике между элементами $\bar{x}, \bar{y} \in \partial_H U$ будем обозначать также $|\bar{x} - \bar{y}|_{H,U}$.

Пусть U, V — области в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f : \partial_H U \to \partial_H V$ является *изометрией (в относительных метриках) хаусдорфовых границ областей* U, V, если отображение f биективно и $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \partial_H U$ справедливо равенство $|\bar{x} - \bar{y}|_{H,U} = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})|_{H,V}$; при наличии такой изометрии будем говорить также, что *хаусдорфовы границы областей* U, V *изометричны в относительных метриках.*

Определение 5. Будем говорить, что *область* $U \subset \mathbb{R}^n$ *однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы*, если каждая область $V \subset \mathbb{R}^n$, хаусдорфова граница которой изометрична в относительных метриках аналогичной границе области U, сама изометрична U (в евклидовых метриках).

Определение 6. Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\mathbb{R}^n \setminus U$ есть непустое выпуклое множество. Тогда хаусдорфова граница $\partial_H U$ называется *замкнутой выпуклой поверхностью* в $\mathbb{R}^n$, а соответствующая метрика $\rho_{H,U}$ — *внутренней метрикой* указанной поверхности.

В условиях последнего определения в том случае, когда $\mathrm{Cl}\, U \neq \mathbb{R}^n$, хаусдорфова граница $\partial_H U$ совпадает с обычной границей ∂U, и сформулированное определение эквивалентно обычному понятию замкнутой выпуклой поверхности и ее внутренней метрики. Но оно охватывает также вырожденный случай, когда $\mathrm{Cl}\, U = \mathbb{R}^n$, и потому нам удобно им пользоваться.

---

[5] Напомним, что расстояние по внутренней метрике области U между точками $x, y \in U$ равно инфимуму длин кривых, лежащих в U и соединяющих x, y.

Для области U обозначим $F_U = U \setminus \mathrm{Cl}\,\mathrm{Conv}\,\partial U$, а через U_i будем обозначать компоненты связности открытого множества $U \cap \mathrm{Int}\,\mathrm{Conv}\,\partial U$.

Теорема 18. *Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Если $\dim \mathrm{Conv}\,\partial U < n$, то область U не является однозначно определенной в том и только том случае, когда $\partial U = \mathrm{Conv}\,\partial U$, $\dim \partial U = n-1$, и $\partial_H U$ не является однозначно определенной замкнутой выпуклой поверхностью (в классе всех замкнутых выпуклых поверхностей в $\mathbb{R}^n$).*

(II) *Если $\dim \mathrm{Conv}\,\partial U = n$, то область U не является однозначно определенной в том и только том случае, когда существует неизометричная ей область V, семейство изометрических отображений $Q_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и гомеоморфизм $\theta : \partial F_U \to \partial F_V$ со свойствами:*

(IIa) *Для каждой компоненты U_i справедливо равенство $Q_i U_i = V_i$. Это же равенство справедливо и для каждой компоненты V_i.*

(IIb) *Включение $x \in U \cap \partial U_i$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо включение $Q_i x \in V \cap \partial V_i$; далее, в случае выполнения этих включений справедливо также равенство $\theta(x) = Q_i x$.*

(IIc) *Гомеоморфизм θ является изометрией во внутренних метриках замкнутых выпуклых поверхностей ∂F_U, ∂F_V.*

Из Теоремы 18 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Пусть область $U \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий:*

1) *область U ограничена;*

2) *$n \geqslant 3$ и множество $\mathbb{R}^n \setminus U$ ограничено.*

Тогда область U однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.

Я благодарен своему научному консультанту профессору А. П. Копылову. Его вклад в моё развитие как математика, а также постоянная поддержка неоценимы. Я особо признателен академику Ю. Г. Решетняку, пробудившему во мне интерес к современному анализу. Также я особо благодарен профессору Е. Ю. Панову, который предложил концепцию изэнтропических решений дифференциальных уравнений, явившуюся красивым и эффективным инструментом для решения включенных в диссертацию задач. Наконец, благодарю всех остальных своих старших коллег, которые в разное время делились со мною своими соображениями по поводу задач, включенных в диссертацию: В. А. Александрова, С. К. Водопьянова, А. В. Грешнова, Н. С. Даирбекова, А. А. Егорова, Н. Н. Романовского, М. А. Сычёва.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-01009-а, 05-01-00482-а, 08-01-00531-а), грантов Президента РФ для поддержки молодых кандидатов наук (МК-3778.2004.1, МК–5366.2008.1) и ведущих научных школ РФ (НШ-311.2003.1, НШ-8526.2006.1, НШ-5682.2008.1), гранта Фонда содействия отечественной науке для молодых кандидатов, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 117, 2006) и грантов Лаврентьевского конкурса молодежных проектов СО РАН. Часть работы была выполнена во время моего визита в Международный Банаховский Центр в Бендлево (Польша), и я благодарен всем сотрудникам этого центра и, особенно, академику ПАН профессору Б. Боярскому за гостеприимство.

Литература

[1] *Александров А. Д.* Об одном классе замкнутых поверхностей // Матем. сборник. 1938. Т. 4, № 46. С. 69-77.

[2] *Александров В. А.* Об областях, однозначно определяемых относительной метрикой своей границы, *в: Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.* 1987. Т. 7: Исследования по геометрии и математическому анализу. С. 5-19.

[3] *Александров В. А.* Однозначная определенность областей с нежордановыми границами // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 3-12.

[4] *Александров В. А.* Об изометричности многогранных областей, границы которых локально изометричны в относительных метриках // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 3-9.

[5] *Боровикова М. К.* Об изометричности многоугольных областей, границы которых локально изометричны в относительных метриках // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 4. С. 30-41.

[6] *Волков Ю. А.* Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики, *в: Укр. геометр. сб.* Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. Вып. **5/6**. С. 44-69.

[7] *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: «Мир», 1990.

[8] *Дубовицкий А. Я.* О строении множеств уровня дифференцируемых отображений n-мерного куба в k-мерный куб // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Мат. 1957. Т. 21. С. 371-408.

[9] *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1081–1095.

[10] *Егоров А.А., Коробков М.В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046-1059.

[11] *Копылов А. П.* О граничных значениях отображений, близких к изометрическим // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 120-131.

[12] *Копылов А. П.* Об однозначной определенности областей в евклидовых пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 139-167.

[13] *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений // Новосибирск: «Наука», 1990.

[14] *Копылов А. П.* Устойчивость в C^l-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными эллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1304-1321.

[15] *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сибирский мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118-133.

[16] *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Матем. сборник. 1970. Т. 81, № 2. С. 228-255.

[17] *Кузьминых А. В.* Об изометричности областей, границы которых изометричны в относительных метриках // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 91-99.

[18] *Мишачев Н. М., Элиашберг Я. М.* Введение в h-принцип. М.: МЦНМО, 2004.

[19] *Панов Е.Ю.* Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения. *Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.* Москва: МГУ, 1991.

[20] *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: «Наука», 1969.

[21] *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: «Наука», 1982.

[22] *Решетняк Ю. Г.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Геометрия-4: Нерегулярная риманова геометрия. – М., 1989. – С. 8-189. – (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления; Т. 70).

[23] *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1996.

[24] *Сенькин Е. П.* Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей, *в: Укр. геометр. сб.* Харьков: Изд-во ХГУ, 1972. Вып. **12**. С. 131-152.

[25] *Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P.* Sard's theorem for mappings in Holder and Sobolev spaces // Manuscripta Math. 2005. V. 118. P. 383-397.

[26] *Donaldson S. K., Sullivan D. P.* Quasiconformal 4-manifolds // Acta Math. 1989. V. 163, № 3-4. P. 181–252.

[27] *Faraco D., Székelyhidi L.* Tartar's conjecture and localization of quasiconvex hulls in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences. 2006. Preprint № 60. http://www.mis.mpg.de/jump/publications.html

[28] *Iwaniec T., Martin G.* Quasiregular mappings in even dimensions // Acta Math. 1993. V. 170, № 1. P. 29–81.

[29] *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford Mathematical Monographs. New York: The Clarendon Press Oxford University Press, 2001.

[30] *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, № 3. P. 391–413.

[31] *John F.* On quasi-isometric mappings. I // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21, № 1. P. 77-110.

[32] *John F.* On quasi-isometric mappings. II // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 22, № 2. P. 265-278.

[33] *Kirchheim B., Müller S., Šverák V.* Studying nonlinear PDE by geometry in matrix space. In *Geometric analysis and Nonlinear partial differential equations.* S. Hildebrandt and H. Karcher, Eds. Springer-Verlag. 2003. P. 347-395.

[34] *Kirchheim B., Székelyhidi L.* On the gradient set of Lipschitz maps. Preprint № 16, MPI-MIS. 2007.

[35] *Kolar J., Kristensen J.* Gradient Ranges of Bumps on the Plane // Proceedings of the AMS. 2005. V. 133, № 5. P. 1699-1706.

[36] *Kuiper N. H.* On C^1-isometric imbeddings. I // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1955. V. 58. P. 545–556.

[37] *Malý J.* The Darboux property for gradients // Real Anal. Exchange. 1996/97. V. 22, № 1. P. 167–173.

[38] *Müller S.* Variational Models for Microstructure and Phase Transitions. Leipzig: Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences, 1998. (Lecture Notes, № 2. http://www.mis.mpg.de/jump/publications.html).

[39] *Nash J.* C^1 isometric imbeddings // Ann. of Math. 1954. V. 60. P. 383-396.

[40] *Nienberg L.* Rigidity of a class of closed surfaces. In *Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962)*. Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963. P. 177-193.

[41] *Rickman S.* Quasiregular mappings. Vol. 26 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[42] *Sychev M. A.* A few remarks on differential inclusions // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 2006. V. 136, № 3. P. 649-668.

[43] *Whitney H.* A function not constant on a connected set of critical points // Duke Math. J. 1935. V. 1. P. 514-517.

Работы автора по теме диссертации.

[44] *Коробков М.В.* Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1083-1091.

[45] *Коробков М. В.* Свойства C^1-гладких функций, образ градиента которых является нигде не плотным множеством // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 5. С. 596-598.

[46] *Коробков М.В.* Свойства C^1-гладких функций, множество значений градиента которых является нигде не плотным множеством // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1272-1284.

[47] *Коробков М. В.* Необходимые и достаточные условия однозначной определенности плоских областей // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 416, № 4. С. 443–445.

[48] *Коробков М.В.* Пример C^1-гладкой функции, множество значений градиента которой является дугой, не имеющей касательной ни в одной точке // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 134-144.

[49] *Коробков М. В.* Необходимые и достаточные условия однозначной определенности плоских областей // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 548-567.

[50] *Коробков М.В., Панов Е.Ю.* К теории изэнтропических решений квазилинейных законов сохранения // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 33. С. 69-78.

[51] *Коробков М.В., Панов Е.Ю.* Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Матем. сборник. 2006. Т. 197. № 5. С. 99-124.

[52] *Коробков М.В., Панов Е.Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась образом градиента C^1-гладкой функции // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 4. С. 449-452.

[53] *Коробков М.В., Панов Е.Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась образом градиента C^1-гладкой функции // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 789-810.

Коробков Михаил Вячеславович

Некоторые теоремы жесткости в анализе и геометрии

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 11.07.08. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,8. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 90 экз. Заказ № 109

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6

10 —