КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ДАНЬШИН АЛЕКСАНДР ЮРЬЕВИЧ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2000

Работа выполнена на кафедре теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор А. В. Аминова

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор В. В. Вишневский

кандидат физ.-мат. наук, Г. С. Асанов

Ведущая организация: Чувашский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится «29» декабря 2000 года в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании Диссертационного совета К 053.29.05 при Казанском государственном университете (420008, Казань, ул. Кремлевская 18).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «27» ноября 2000 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Шурыгин В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Изучение геометрии касательных расслоений дифференцируемых многообразий было и остается по сей день актуальным направлением математических исследований. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия обладает богатыми дифференциально-геометрическими свойствами, поэтому теория касательных расслоений находит разнообразные приложения в теоретической и математической физике и самой математике. В последние годы интерес специалистов в этой области все больше смещается в сторону исследования расслоений над различными обобщенными пространствами.

Начало интенсивных исследований в области теории касательных расслоений было положено работой Сасаки [1]. В этой работе был очерчен ряд основных вопросов, на которых сконцентрировались усилия дальнейших исследователей.

Общая теория лифтов тензорных полей и аффинных связностей с дифференцируемого многообразия в его касательное расслоение была разработана К. Яно, А. Леджером, Ш. Кобаяси и Ш. Исихарой. В их работах были построены и изучены линейная связность в касательном расслоении [2], полный, вертикальный [3] и горизонтальный [4] лифты тензорных полей и связностей из дифференцируемого многообразия в его касательное расслоение.

В связи с теорией лифтов следует также упомянуть работы Ф. И. Кагана [5], который в 1967 году разработал теорию полного поднятия для тензоров произвольных валентностей, включающего как частные случаи вертикальный, горизонтальный и есте-

[1] Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. - 1958. - 10. - №3. - pp.338-354.

[2] Yano K., Ledger A. Linear connections on tangent bundles // J. London Math. Soc. - 1964. - v.39. - №3 - pp.495-500.

[3] Yano K., Kobayashi Sh. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles I. General theory // J. Math. Soc. Japan. - 1966. - v.18. - №2 · pp.194-210.

[4] Yano K. Ishihara Sh. Horisontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles // J. Math. and Mech. - 1967. - v.16. - №9. - pp.1015-1030.

[5] Каган Ф.И. К теории лифтов для тензорных полей из многообразия в его касательный пучок // Изв. вузов. Математика. - 1969. №9. - с.37-46.

Каган Ф. И. О некоторых типах аффинорных структур в касательном пучке дифференцируемого многообразия // Укр. геометр. сб. - 1970. - вып. 8. - с.49-68.

ственный (полный) лифты, построенные Яно, Кобаяси и Исихарой.

В работе 1973 г. [6] Ф. И. Каган ввел в рассмотрение семейство римановых метрик на касательном расслоении, получающихся из метрики на базе и зависящее от трех скалярных полей. Метрики Сасаки, Сато и Яно-Кобаяси получаются из этого семейства метрик как частные случаи.

Одной из основных задач в теории касательных расслоений является изучение инфинитезимальных преобразований в касательном расслоении. К. Яно и Ш. Кобаяси [7] изучили аффинные преобразования в касательном расслоении со связностью полного лифта аффинной связности базы и начали исследование инфинитезимальных изометрических преобразований в касательном расслоении с метрикой полного лифта. Полное решение последней задачи было дано Танно [8].

Автоморфизмы различных обобщенных пространств исследовались в работах А.П.Широкова [9], Б.Н.Шапукова [10], И.П.Егорова [11] и их учеников.

Теория проективных преобразований n-мерных римановых пространств с метрическим тензором произвольной сигнатуры была развита в работах А. В. Аминовой. [12]

Ф. И. Каган в работе 1976 г. [13] рассмотрел инфинитезималь-

---

[6] Каган Ф.И. Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием // Изв. вузов. Математика. - 1973. - №6. - с.42-51.

[7] Yano K.. Kobayashi Sh. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles II. Infinitesimal automorphisms // J. Math. Soc. Japan. - 1966. - v.18. - №3 - pp.236-246.

[8] Tanno Sh. Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric // Tensor. - 1974. - 28. - pp.139-144.

[9] Широков А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. - 1967. - М.,1969. - С.127-188.

[10] Шапуков Б.Н. Автоморфизмы расслоенных пространств // Труды геом. семинара. - Казань. 1986. 17. с.84-100.

[11] Егоров И.П. Движения и гомотетии в пространствах Финслера и их обобщения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии. - М. - 1984. - 16. - с.81-126.

[12] Аминова А.В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений // ДАН СССР. - 1971. - Т.197. - №4. - с.807-809.

Аминова А.В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности // Тр. Геометр. семин. М.: ВИНИТИ, 1974. - Т.6. - с.317-346.

Аминова А.В. Группы преобразований римановых многообразий // Проблемы геометрии. - М.: ВИНИТИ, 1990. - Т.22. - с.97-165.

[13] Каган Ф.И. Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении // Матем. заметки. 1976. - т.19. - №2. - с.247-258.

ные проективные и аффинные преобразования в касательном расслоении с симметричной аффинной связностью, являющейся полным (по терминологии Кагана «естественным») лифтом симметричной аффинной связности базы в касательное расслоение.

Ученик А. П. Широкова В. Г. Подольский [14] изучал инфинитезимальные проективные, аффинные, обобщенно-конформные, конформные, гомотетические и изометрические преобразования в касательном расслоении римановых многообразий с метрическим тензором произвольной сигнатуры.

Как правило, в исследованиях, посвященных инфинитезимальным преобразованиям в касательном расслоении, определялся вид векторных полей, порождающих локальную однопараметрическую группу соответствующих преобразований, а также необходимые и достаточные условия существования таких преобразований. При этом в качестве базы выступало пространство аффинной связности или риманово пространство. Возможности рассмотрения другой, более общей базы уделялось явно недостаточное внимание.

Непосредственным обобщением пространства аффинной связности является общее пространство путей, тогда как непосредственным обобщением риманова пространства является пространство Финслера. В указанных обобщенных пространствах все дифференциально-геометрические структуры зависят не только от точки, но и от произвольного касательного вектора, то есть все дифференциально-геометрические структуры в таких пространствах зависят от точки тотального пространства расслоения. Это обусловливает тесную связь теории обобщенных пространств с теорией касательных расслоений.

Замечательный казанский геометр Б. Л. Лаптев развил теорию движений в пространствах финслерова типа с использовани-

---

[14] Подольский В.Г. Движения в касательном расслоении римановых пространств. I // Гравитация и теория относительности. - Казань, 1977. - вып.12, - с.131-141.

Подольский В.Г. Движения в касательном расслоении римановых пространств. II // Сб. аспир. работ. Точные науки. Физика. - Казань, 1977. - часть I. - с.3-10.

Подольский В.Г. Движения в касательном расслоении римановых пространств. III // Гравитация и теория относительности. - Казань, 1976. - вып. 13. - с.102-115.

Подольский В.Г. Инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки // Изв. вузов. Математика. - 1976. - №9. - с. 128-132.

ем аппарата производной Ли [15], а также внес большой вклад в развитие общей теории пространств опорных элементов. [16]

К концу 50-х годов общая теория финслеровых пространств достигла достаточно полного и глубокого развития. Однако вплоть до недавнего времени она не находила систематических применений в теоретической физике. В последние годы число физических приложений финслеровой геометрии резко возросло. Многие физические модели являются фактически финслеровыми структурами на подходящих многообразиях. [17] Кроме того, финслерова геометрия позволяет обобщить различные физические теории. Например, имеется большое количество работ, посвященных финслеровым обобщениям теории гравитации и электромагнитизма.

В физических приложениях рассмотрение различных типов преобразований играет фундаментальную роль, ибо, согласно теореме Нётер, с каждым преобразованием симметрии теории связано существование законов сохранения [18]. Финслерово-обобщенные физические теории формулируются в терминах касательного расслоения над финслеровым многообразием, поэтому преобразования симметрии таких теорий — это преобразования касательного расслоения. Это обусловливает актуальность и практическую значимость исследований в области теории таких преобразований.

Данная диссертация посвящена изучению инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общих пространств путей, а также инфинитезимальных проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательных расслоениях финслеровых пространств.

---

[15] Лаптев Б.Л. Инвариантная форма 2-й вариации, полученная дифференцирлованием Ли в пространстве Финслера // Изв. физ.-мат. общества при Казанском ун-те. - 1940. - 12. - с.3-8.
Лаптев Б.Л. Дифференцирование Ли // В сб.: Алгебра, Топология, Геометрия. Итоги науки. - 1965. - М.: ВИНИТИ АН СССР, 1967. - с.429-465.

[16] Лаптев Б.Л. Пространство опорных элементов // Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. - Казань. - 1958. Итоги науки. - 1965. - М.: ВИНИТИ АН СССР, 1967. - с.429-465.

[17] Асанов Г. С., Пономаренко С. Ф. Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности // Киев, «Штиинца», 1989. - 291с.

[18] Noether E. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. - 1918. - 171.

Цель работы. Целью работы является:
1. Определение структуры векторных полей, порождающих локальные однопараметрические группы проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общих пространств путей.
2. Нахождение структуры векторных полей, порождающих локальные однопараметрические группы проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательном расслоении финслеровых пространств для обширного класса метрик на расслоении.
3. Отыскание необходимых и достаточных условий существования указанных выше преобразований.
4. Выяснение условий, которые накладывает существование в расслоении преобразований исследуемых типов на базовое многообразие.

Научная новизна работы. Данная работа является исследованием в области дифференциальной геометрии расслоенных пространств и их инфинитезимальных преобразований. Научная новизна работы заключается в рассмотрении общей теории проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательном расслоении, где в качестве базы выступает пространство линейных элементов. Результаты работы имеют общетеоретический характер. Доказан ряд фундаментальных теорем. Найдены структуры векторных полей, являющихся инфинитезимальными проективными и аффинными преобразованиями в касательном расслоении общих пространств путей. Решена аналогичная задача для инфинитезимальных проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательном расслоении финслеровых пространств. Определены необходимые и достаточные условия существования всех перечисленных выше типов преобразований. Получены условия, которые налагает существование указанных преобразований на базовое многообразие.

Теоретическое и практическое значение работы. Данная работа является дальнейшим развитием исследований в области геометрии касательных расслоений и ее приложений к теории обобщенных пространств. Она представляет собой вклад в теорию инфинитезимальных преобразований в касательном расслоении обобщенных пространств. Полученные в работе результаты обобщают результаты исследований многих авторов и могут быть использованы для дальнейших исследований в области теории инфинитезимальных преобразований в касательных расслоениях, а также в теоретической физике при исследовании преобразований симметрии финслерово-обобщенных физических теорий, которые приобретают в последние годы все большую актуальность.

Методы исследования. В диссертации используются методы тензорного анализа, аппарат дифференцирования Ли, теория лифтов геометрических объектов с базы в касательное расслоение. Исследования носят локальный характер и ведутся в классе достаточно гладких функций.

Объем работы. Диссертация изложена на 108 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 108 названий.

Краткое содержание диссертации. Во **Введении** обосновывается актуальность темы и ее научная новизна, формулируются цели и задачи исследования, дается краткий обзор исследований по дифференциальной геометрии касательных расслоений и геометрии пространств Финслера, а также обзор их приложений в области теоретической физики, приводится краткое содержание диссертации.

Первая глава содержит предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. В ней рассматриваются основные понятия теории касательных расслоений (§1), теории связностей (§2), теории лифтов тензорных полей и связностей (§3), теории пространств Финслера (§5), теории инфинитезимальных преобразований в касательном расслоении (§4) и в финслеровых пространствах (§6). В §8 описываются метрики на касательных расслоениях финслеровых пространств. В §9 дается краткий обзор физических приложений геометрии касательных расслоений финслеровых пространств.

Вторая глава посвящена исследованию инфинитезимальных преобразований в касательном расслоении общего пространства путей. В §1 рассмотрен естественный лифт связности общего пространства путей и его производная Ли. Записаны уравнения проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общего пространства путей в терминах полей слоевых тензоров. Исследована структура проективных (§2) и аффинных (§3) преобразований. Найдены условия, которые налагает существование в расслоении проективных и аффинных преобразований на базовое многообразие. В §4 сформулированы теоремы о структуре векторных полей, порождающих такие преобразования.

Теорема 2.1 Пусть $\mathrm{M}(G)$ — общее пространство путей, причем $\dim \mathrm{M}(G) > 2$. Для того, чтобы векторное поле $\tilde{v}$ на касательном расслоении $\mathrm{T}(\mathrm{M}(G))$ являлось инфинитезимальным проективным преобразованием связности $\widehat{\Gamma}$, являющейся естественным лифтом связности G, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\tilde{v} = {}^{N}u + {}^{V}v + {}^{HX}A + {}^{VX}B + p(\dot{x})^{VX}id \ ,$$

где $u = u(x)$ — проективное векторное поле на $\mathrm{M}(G)$:

$$\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i P \ ,$$

с проективным фактором $P = q_k(x)\dot{x}^k$,
$v = v(x)$ — аффинное векторное поле на $\mathrm{M}(G)$:

$$\mathcal{L}_v G^i = 0 \ ,$$

удовлетворяющее условиям

$$v^s G^i{}_{kms} = 0 \ , \ v^s \dot{x}^t \nabla_t G^i{}_{kms} = 0 \ ,$$

$p = p(x)$ и $q = q(x)$ — параллельные 1-формы на $\mathrm{M}(G)$:

$$\nabla_k p_m = \nabla_k q_m = 0 \ ,$$

$A = A(x)$ и $B = B(x)$ — тензорные поля валентности (1,1) на $\mathrm{M}(G)$, удовлетворяющие условиям

$$\nabla_k A^i_m = \delta^i_k p_m \ , \ A^s_t H^i_{mks} = 0 \ ,$$

$$\nabla_k B^i_m = -\delta^i_k q_m \ , \ B^s_t H^i_{mks} - B^i_s H^s_{mkt} = 0 \ .$$

При этом уравнение для $\tilde{v}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}{}_{(\beta}\varphi_{\gamma)} \,,$$

где $\varphi = {}^{G}[p,q]$.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в §2.

В §3 доказана аналогичная теорема об аффинных преобразованиях.

Третья глава посвящена исследованию инфинитезимальных преобразований финслеровых пространств. На касательном расслоении финслеровых пространств с потенциальной метрикой вводится трехпараметрическое семейство метрик Кагана и вычислено соответствующее трехпараметрическое семейство метрических связностей (§1).

В §2 выводятся уравнения проективных преобразований относительно этих связностей в виде соотношений между полями слоевых тензоров на базе. Дальнейшие исследования сконцентрированы на двух важных особых типах метрик на касательном расслоении — это метрики типа Сасаки-Сато и метрики типа Яно-Кобаяси.

В §3 - §10 исследуются структуры инфинитезимальных проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований для этих типов метрик. Проинтегрированы уравнения соответствующих преобразований и найдены необходимые и достаточные условия их существовования. Получены условия, которые налагает существование в расслоении проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований на базовое многообразие. В §11 сформулированы теоремы о структуре векторных полей, порождающих перечисленные выше преобразования.

Теорема 3.1 Для того, чтобы векторное поле $\tilde{v}$, принадлежащее классу SHF-функций, [19] являлось инфинитезимальным проективным преобразованием на касательном расслоении финслерова

[19] SHF series of homogeneous functions — ряд однородных функций (англ.). Название предложено автором.

Определение. Функция $f(x,\dot{x})$ называется *SHF-функцией*, если она представима в виде поточечно сходящегося ряда $f(x,\dot{x}) = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Phi}(x,\dot{x})$, где $\overset{(s)}{\Phi}(x,\dot{x})$ — функции, однородные s-ой степени относительно $\dot{x}$.

пространства $M(F)$, наделенном метрикой типа Сасаки-Сато, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\tilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^H U + {}^V V + p(\dot{x})^{VX} id ,$$

где $u^i = u^i(x)$, $v^i = v^i(x)$, $U^i = U^i(x, \dot{x})$, $V^i = V^i(x, \dot{x})$ — векторные поля на $M(F)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathcal{L}_u G^i{}_{km} = 2\delta^i_{(k} q_{m)} ,$$

$$\mathcal{L}_u C^i{}_{km} = 0 ,$$

$$2\mathcal{L}_u g^i{}_{km} + \mathrm{L}_V g^i{}_{km} - V^s G^i{}_{kms} + 2C^i{}_{km} q_s \dot{x}^s = 0 ,$$

$$\mathcal{L}_u H_{km}{}^i + V^s{}_{\cdot k} H_{sm}{}^i + V^s H_{ksm}{}^i = 0 ,$$

$$\mathcal{L}_v G^i{}_{km} - H^i_{(km)s} v^s = -\frac{1}{2} v^s \dot{x}^t \nabla_t G^i{}_{kms} ;$$

$$\alpha(2\mathcal{L}_v C^i{}_{km} - 4v^s \nabla_s C^i{}_{km} + 3v^s G^i{}_{kms} + \frac{1}{2} v^s g^i{}_{km\cdot s}) +$$

$$+ \gamma(U^s C^i{}_{km\cdot s} - \mathrm{L}_U C^i{}_{km}) = 0 ,$$

$$\mathrm{L}_U g^i{}_{km} - \frac{\alpha}{2\gamma} \mathcal{L}_v g^i{}_{km} - \dot{x}^i p_s C^s{}_{km} + 3U^s(\nabla_s C^i{}_{km} - G^i{}_{kms}) +$$

$$+ (\frac{\alpha}{2\gamma} \dot{x}^t \nabla_t v^s - U^s) g^i{}_{km\cdot s} + \frac{\alpha}{2\gamma} v^s \nabla_s g^i{}_{km} - \frac{\alpha}{\gamma} v^s (H_{(km)}{}^i{}_{;s} + H_{s(k}{}^i{}_{;m)}) = 0 ,$$

$$\gamma U^s{}_{\cdot[k} g^i{}_{m]s} - \alpha(g^i{}_{s[k} \nabla_{m]} v^s + v^s H_{[km]}{}^i{}_{;s} - v^s H_{s[k}{}^i{}_{;m]}) = 0 ,$$

$$\gamma U^i{}_{\cdot(k;m)} + \alpha(\nabla_{(k} v^i)_{;m)} = 0 ,$$

$$v^s C^i{}_{kms} = 0 ,$$

$$\gamma(U^i{}_{\cdot s} C^s{}_{km} + U^s{}_{\cdot k} C^i{}_{ms}) + \alpha(C^i{}_{ms} \nabla_k v^s + C^s{}_{km} \nabla_s v^i) = 0 ,$$

$$\nabla_m(U^i{}_{\cdot k}) + U^s G^i{}_{kms} + \frac{\alpha}{2\gamma} v^s (H_{skm}{}^i - 2H_{sm}{}^t C^i{}_{kt}) = \delta^i{}_m p_k ,$$

$$U^s(\nabla_s C^i{}_{km} - G^i{}_{kms} - g^i{}_{s(k\cdot m)}) - \dot{x}^i p_s C^s{}_{km} + \frac{\alpha}{2\gamma} g^s{}_{km} \nabla_s v^i = 0 ,$$

$$U^s(G^i{}_{kms} + g^i{}_{s(k\cdot m)}) + \frac{\alpha}{2\gamma} v^s \dot{x}^t \nabla_t G^i{}_{kms} + \frac{\alpha}{\gamma} G^i{}_{kms} \nabla_t v^s \dot{x}^t -$$

$$- \frac{\alpha}{\gamma} g^i{}_{s(k} \nabla_{m)} v^s - \frac{\alpha}{\gamma} v^s H_{s(k}{}^t C^i{}_{m)t} = 0 ,$$

$$U^s(\nabla_s g^i{}_{km} - 2H_{(km)s}{}^i) - g^s{}_{km} \nabla_s U^i + 2g^i{}_{km} p_s \dot{x}^s = 0 ,$$

$$\nabla_k\nabla_m U^i + U^s(H^i{}_{mks} + \frac{1}{2}\nabla_s g^i{}_{km}) + \frac{1}{2}U^i{}_{\cdot s}H^s{}_{mk} - \frac{\alpha}{\gamma}H_{s(k}{}^i\nabla_{m)}v^s +$$

$$+ g^i{}_{s(k}\nabla_{m)}U^s - \frac{1}{2}g^s{}_{km}\nabla_s U^i = 0\ ,$$

$$U^s(H^i{}_{kms} + \nabla_s g^i{}_{km}) + \frac{\alpha}{\gamma}H_{km}{}^s\nabla_s v^i + g^i{}_{ks}\nabla_m U^s - \dot{x}^i p_s g^s{}_{km} = 0\ ,$$

$$U^s\nabla_s H_{km}{}^i + 2H_{km}{}^i p_s\dot{x}^s + H_{ks}{}^i\nabla_m U^s - H_{km}{}^s\nabla_s U^i = 0\ ,$$

$$V^i{}_{\cdot(k;m)} = 0\ ,$$

$$V^i{}_{\cdot s}C^s{}_{km} = V^s C^i{}_{kms}\ ,$$

$$\nabla_m(V^i{}_{\cdot k}) + V^s G^i{}_{kms} = -\delta^i{}_m q_k\ ,$$

$$V^s{}_{\cdot(k}g^i{}_{m)s} = V^s G^i{}_{kms} = -V^i{}_{\cdot s}g^s{}_{km} - 2\dot{x}^i q_s C^s{}_{km}\ ,$$

$$V^s{}_{\cdot[k}g^i{}_{m]s} = 0\ ,$$

$$\nabla_k p_m = 0\ ,$$

$$\nabla_{(k}q_{m)} = 0\ ,\ q_s g^s{}_{km} = 0\ ,$$

$$q_s H_{km}{}^s = 0\ ,$$

где $U^i(x,\dot{x})$ и $V^i(x,\dot{x})$ — однородные функции первой степени относительно $\dot{x}$, $p_k = p_k(x)$ и $q_k = q_k(x)$ — поля 1-форм на $\mathrm{M}(F)$. При этом уравнение для $\tilde{v}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} = 2\delta^\alpha{}_{(\beta}\varphi_{\gamma)}\ ,$$

где $\varphi = {}^G[p,q]$.

Доказательство теоремы 3.1 приведено в §3.

Теорема 3.2 Для того, чтобы векторное поле $\tilde{v}$, принадлежащее классу SHF-функций, являлось инфинитезимальным проективным преобразованием на касательном расслоении финслерова пространства $\mathrm{M}(F)$, наделенном метрикой типа Яно-Кобаяси, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\tilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^H U + {}^V V + p(\dot{x})^{VX}id\ ,$$

где $u^i = u^i(x)$, $v^i = v^i(x,\dot{x})$, $U^i = U^i(x,\dot{x})$, $V^i = V^i(x,\dot{x})$ — векторные поля на $\mathrm{M}(F)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathcal{L}_u G^i{}_{km} = 2\delta^i{}_{(k}q_{m)}\ ,$$

$$2\mathcal{L}_U C^i{}_{km} + 2\mathrm{L}_V C^i{}_{km} + V^i{}_{\cdot k\cdot m} = 0\,,$$
$$\mathcal{L}_U g^i{}_{km} + V^s(G^i{}_{kms} + g^i{}_{km\cdot s}) = 0\,,$$
$$\mathcal{L}_U H_{(km)}{}^i + V^s H_{(km)}{}^i{}_{\cdot s} - V^i{}_{\cdot s} H_{(km)}{}^s + \dot{x}^i q_s g^s{}_{km} = 0\,,$$
$$v^i{}_{\cdot k\cdot m} + 2\mathrm{L}_V C^i{}_{km} = 0\,,$$
$$\nabla_m(v^i{}_{\cdot k}) + 2C^i{}_{ks}\nabla_m v^s + v^s G^i{}_{kms} = 0\,,$$
$$v^s(G^i{}_{kms} + g^i{}_{km\cdot s}) = 0\,,$$
$$\nabla_{(k}\nabla_{m)} v^i - g^s{}_{km}\nabla_s v^i + v^i{}_{\cdot s} H_{(km)}{}^s - v^s H_{(km)}{}^i{}_{\cdot s} = 0\,,$$
$$\nabla_k U^i = \delta^i{}_k p\,,$$
$$U^i{}_{\cdot k\cdot m} - 2U^i{}_{\cdot s} C^s{}_{km} = 0\,,$$
$$2U^s\nabla_s C^i{}_{km} = U^s G^i{}_{kms} = U^s{}_{(k} g^i{}_{m)s}\,,\ U^s{}_{\cdot[k} g^i{}_{m]s} = 0\,,$$
$$U^i{}_{\cdot s} H_{(km)}{}^s + U^s(\nabla_s g^i{}_{km} + H^i_{(km)s}) + p g^i{}_{km} = 0\,,$$
$$U^s{}_{\cdot k}(\frac{1}{2}H^i{}_{ms} - H_{(sm)}{}^i) + U^s(H^i{}_{kms} + 2C^i{}_{kt}H^t{}_{ms}) = 0\,,$$
$$\nabla_{(k}(U^s H^i{}_{m)s}) - H_{(ks)}{}^i\nabla_m U^s - H_{(ms)}{}^i\nabla_k U^s -$$
$$- U^s(\nabla_s H_{(km)}{}^i + g^t{}_{km}H^i{}_{ts}) + \dot{x}^i p_s H_{(km)}{}^s = 0\,,$$
$$\nabla_m(V^i{}_{\cdot k}) + V^s G^i{}_{kms} = -\delta^i{}_m q_k\,,$$
$$\nabla_k p_m = 0\,,$$
$$p_{k\cdot m} - 2p_s C^s{}_{km} = 0\,,$$
$$\nabla_{(k} q_{m)} = 0\,,$$

где $v^i = v^i(x,\dot{x})$ — однородные функции нулевой степени относительно $\dot{x}$, $U^i(x,\dot{x})$ и $V^i(x,\dot{x})$ — однородные функции первой степени относительно $\dot{x}$, $p_k = p_{\cdot k}(x,\dot{x})$ и $q_k = q_k(x)$ — поля 1-форм на $\mathrm{M}(F)$, $p = p(x,\dot{x})$ — однородная функция первой степени относительно $\dot{x}$. При этом уравнение для $\tilde{v}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} = 2\delta^\alpha{}_{(\beta}\varphi_{\gamma)}\,,$$

где $\varphi = {}^G[p,q]$.

Доказательство теоремы 3.2 приведено в §4.

В §5 приведены доказательства аналогичных теорем для аффинных преобразований.

Теорема 3.3 Для того, чтобы векторное поле $\tilde{v}$, принадлежащее классу SHF-функций, являлось инфинитезимальным конформным преобразованием на касательном расслоении финслерова пространства $M(F)$, $\dim M(F) > 2$, наделенном метрикой типа Сасаки-Сато, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\tilde{v} = {}^{N}u + {}^{V}v + {}^{HX}w + {}^{V}V + \frac{1}{2}l^{VX}id -$$

$$- \frac{1}{4}F^2(\frac{\alpha}{\gamma}{}^{H}(\nabla^* k) + {}^{V}(D^* l)) - \frac{1}{12}\frac{\alpha}{\gamma}F^2\,{}^{H}(\nabla^* l)\ ,$$

где $w^i{}_k = -\frac{\alpha}{\gamma}g^{is}\nabla_s v_k$, $(\nabla^* k)^i = g^{is}\nabla_s k$, $(\nabla^* l)^i = g^{is}\nabla_s l$, $(D^* l)^i = g^{is}l_{\cdot s}$; $k = k(x)$, $l = l(x,\dot{x})$ — скалярные поля на $M(F)$; $u^i = u^i(x)$, $v^i = v^i(x,\dot{x})$, $V^i = V^i(x,\dot{x})$ — векторные поля на $M(F)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathcal{L}_u g_{km} = k g_{km}\ ,$$

$$v_{(k\cdot m)} = v^s C_{kms} = 0\ ,$$

$$V_{(k\cdot m)} = V^s C_{kms} = 0\ ,$$

$$\dot{x}^h g_{ht} g^s{}_{km}\nabla_s v^t = \frac{1}{2}F^2 l_{\cdot s}C^s{}_{km}\ ,$$

$$\alpha\dot{x}^h g_{ht}\nabla_{(k}\nabla_{m)}v^t = \gamma\frac{1}{2}F^2 l_{\cdot s}C^s{}_{km} - \gamma g_{km} l\ ,$$

$$\nabla_k\nabla_m k = g^s{}_{km}\nabla_s k = 0\ ,$$

$$\nabla_{(k}\nabla_{m)} l = g^s{}_{km}\nabla_s l = 0\ ,$$

$$H^i{}_{ks}g^{sm}\nabla_m k = H^i{}_{ks}g^{sm}\nabla_m l = 0\ ,$$

$$\nabla_k V^i = \frac{1}{2}g_{kt}\dot{x}^t g^{is}\nabla_s k - \frac{1}{2}\delta^i{}_k\dot{x}^s\nabla_s k - F^2 C^{is}{}_k\nabla_s k\ ,$$

$$\alpha\dot{x}^h g_{ht}H_{km}{}^s\nabla_s v^t =$$

$$= \gamma(\frac{1}{3}g_{ks}\dot{x}^s\nabla_m l - \frac{1}{3}F^2\nabla_m(l_{\cdot k}) + \frac{1}{4}F^2 l_{\cdot s}g^s{}_{km} - \frac{1}{6}F^2 C^s{}_{km}\nabla_s l)\ ,$$

где $v^i = v^i(x,\dot{x})$ — однородные функции нулевой степени относительно $\dot{x}$, $V^i(x,\dot{x})$ и $l(x,\dot{x})$ — однородные функции первой степени относительно $\dot{x}$. При этом уравнение для $\tilde{v}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\widetilde{V}}\widetilde{g}_{\alpha\beta} = K\widetilde{g}_{\alpha\beta}\ ,$$

где $K = k(x) + l(x, \dot{x})$.

Доказательство теоремы 3.3 приведено в §7.

Теорема 3.4 Для того, чтобы векторное поле $\tilde{v}$, принадлежащее классу SHF-функций, являлось инфинитезимальным конформным преобразованием на касательном расслоении финслерова пространства $\mathrm{M}(F)$, наделенном метрикой типа Яно-Кобаяси, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\tilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^H U + {}^V V + \frac{1}{2} l^{\,VX} id \,,$$

где $u^i = u^i(x)$, $v^i = g^{is} v_s(x)$, $U^i = U^i(x, \dot{x})$, $V^i = V^i(x, \dot{x})$ — векторные поля на $\mathrm{M}(F)$, удовлетворяющие условиям:

$$\mathcal{L}_U g_{km} + V^s{}_{\cdot k} g_{ms} + 2V^s C_{kms} = k g_{km} \,,$$

$$g_{s(k} \nabla_{m)} v^i = 0 \,,$$

$$g_{s(k} U^s{}_{\cdot m)} = 0 \,,$$

$$g_{s(k} (\mathcal{L}_U G^s{}_{m)} + \nabla_{m)} V^s) = 0 \,,$$

$$\frac{1}{2} l_{\cdot k} g_{ms} \dot{x}^s + g_{ks} \nabla_m U^s + U^s g_{kms} = \frac{1}{2} l g_{km} \,,$$

$$\frac{1}{2} g_{s(k} \nabla_{m)} l + U^s g_{t(k} H^t{}_{m)s} = 0 \,,$$

где $U^i(x, \dot{x})$, $V^i(x, \dot{x})$, $l(x, \dot{x})$ — однородные функции первой степени относительно $\dot{x}$. При этом уравнение для $\tilde{v}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}} \tilde{g}_{\alpha\beta} = K \tilde{g}_{\alpha\beta} \,,$$

где $K = k(x) + l(x, \dot{x})$.

Доказательство теоремы 3.4 приведено в §8.

В §9 и §10 приведены доказательства аналогичных теорем для гомотетических и изометрических преобразований.

В **Заключении** приведены основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту:

1. Получены уравнения проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общих пространств путей, записанные в виде соотношений между полями слоевых тензоров на базе.

2. Определена структура векторных полей, порождающих локальные однопараметрические группы проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общих пространств путей.
3. Даны необходимые и достаточные условия существования проективных и аффинных преобразований в касательном расслоении общих пространств путей.
4. Найдены условия, которые налагает существование в расслоении общих пространств путей проективных и аффинных преобразований на базовое многообразие.
5. Вычислено трехпараметрическое семейство метрических связностей для трехпараметрического семейства метрик на расслоении финслерова пространства, включающего в себя как частные случаи метрики Сасаки, Сато и Яно-Кобаяси. Указан общий вид производной Ли подобных связностей относительно произвольного векторного поля на тотальном пространстве расслоения.
6. Выведены уравнения проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований касательного расслоения финслеровых пространств в терминах полей слоевых тензоров на базе.
7. Определена структура векторных полей, порождающих локальные однопараметрические группы проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательном расслоении финслеровых пространств с метрикой типов Сасаки-Сато и Яно-Кобаяси.
8. Получены необходимые и достаточные условия существования проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований в касательном расслоении финслеровых пространств с метрикой типов Сасаки-Сато и Яно-Кобаяси.
9. Найдены условия, которые налагает существование в расслоениях с метриками типов Сасаки-Сато и Яно-Кобаяси проективных, аффинных, конформных, гомотетических и изометрических преобразований на базовое многообразие.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались в Казанском государственном университете на семинарах кафедры теории относительности и гравитации под руководством проф. В. Р. Кайгородова (Казань, 1992–1995 гг.), на геометрическом семинаре кафедры геометрии под руководством проф. Б. Н. Шапукова (Казань, 1995, 2000 гг.), на научных семинарах, руководимых проф. А. В. Аминовой (Казань, 1992 2000 гг.), на Международном коллоквиуме «Современный групповой анализ. Методы и приложения» (Нижний Новгород, 1992 г.), на международной конференции «Геометризация физики» (Казань, 1993 г.), а также «Геометризация физики II» (Казань, 1995 г.), на международном научном семинаре, посвященном 100-летию со дня рождения П. А. Широкова (Казань, 1995 г.), на международной конференции «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики», посвященной 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева (Москва, 1999 г.), на XII международной летней школе-семинаре по теоретической и математической физике «Волга 12'2000», посвященной 90-летию со дня рождения А. З. Петрова (Казань, 2000 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двенадцати работах [1] - [12]. Из содержания работ, выполненных в соавторстве, в диссертации используются только собственные результаты автора.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фондов РФФИ и Сороса, а также программы «Университеты России».

По результатам диссертации опубликованы работы:

1. Аминова А. В., Даньшин А. Ю. Симметрии гамильтоновых систем со связями // Тез. докл. IX Междунар. коллокв. «Современный групповой анализ. Методы и прил.» – Нижн. Новг. – 1992. – с.5.

2. Aminova A. V., Danshin A. Yu. Almost projective motions as symmetries of Hamiltonian systems with constrains // Abstr. of Int. Conf. "Geometrization of Physics" - Kazan, 1993 - p.4.

3. Aminova A. V., Danshin A. Yu. Finsler approach to the geometrization of gravity and electromagnetism // Abstr. of Int. Conf. "Geometrization of Physics" – Kazan, 1993 - p.5.

4. Аминова А. В., Даньшин А. Ю. Финслеров подход к геометризации гравитациии и электромагнетизма // In: "Geometrization of

Physics". Kazan. – 1994. – pp.12–17.
5. Даньшин А. Ю. Динамические системы с однородными лагранжианами и их инфинитезимальные преобразования симметрии // Тезисы докладов междунар. конф. «Геометризация физики II». – Казань, 1995.
6. Даньшин А. Ю. Финслерова структура мировой функции Синга // Тезисы докладов междунар. конф. «Геометризация физики II». – Казань, 1995.
7. Даньшин А. Ю. Инфинитезимальные проективные преобразования в касательном расслоении финслеровых многообразий // Изв. вузов. Математика. – 1995. – №7. – с.12–21.
8. Даньшин А. Ю. Инфинитезимальные проективные преобразования с естественным лифтом связности общего пространства путей // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №9 – с.8–12.
9. Даньшин А. Ю. Инфинитезимальные конформные преобразования в касательном расслоении финслеровых многообразий // Изв. вузов. Математика. – 1998. – №7. – с.11–17.
10. Даньшин А. Ю. Проективные и конформные преобразования фазовых пространств механических систем с однородными лагранжианами // Новейшие проблемы теории поля 1998. Труды Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. – Под ред. проф. А. В. Аминовой – Казань, 1998. – с.13–14.
11. Даньшин А. Ю. Формализм неголономных реперов в финслеровой геометрии // Материалы междунар. конференции «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики», посвященной 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. – Москва, 25-30 октября 1999 года. – М.: Изд. механико-математического факультета МГУ. – 1999. – с.16–17.
12. Даньшин А. Ю. Инфинитезимальные преобразования симметрии динамических систем с однородными лагранжианами // Новейшие проблемы теории поля 1999-2000. Труды Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. – Под ред. проф. А. В. Аминовой – Казань, 2000. – с.428–434.

2-00

Отпечатано на RISO.Тираж 100 экз. Заказ № 232
ООП ТРО ВОИ. Тел. 315-502