На правах рукописи

Казаков Александр Леонидович

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность: 01.01.02 — Дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Иркутск — 2008

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения (УрГУПС)

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Баутин Сергей Петрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Баранцев Рэм Георгиевич

доктор физико-математических наук,
профессор Блохин Александр Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор Рудых Геннадий Алексеевич

Ведущая организация:

Институт гидродинамики им. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 10 июня 2008 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета Д003.021.01 при Институте динамики систем и теории управления СО РАН по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 29 апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Щеглова А.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию систем квазилинейных аналитических дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными.

Изучена обобщенная задача Коши (ОЗК), которая отличается от задачи Коши в традиционной постановке тем, что начальные (граничные) условия ставятся не на одной, а на двух или на нескольких поверхностях. Число поверхностей не превосходит числа независимых переменных. Число условий совпадает с числом неизвестных функций. Термин "обобщенная задача Коши" предложен Н.А. Леднёвым[1]. Именно к обобщенным задачам Коши, с точки зрения общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, приводит математическое описание течений газа с ударными волнами. Доказанные в диссертации теоремы применяются для исследования таких течений.

Наиболее часто встречающейся задачей для дифференциальных уравнений с частными производными является задача Коши (ЗК), т.е. задача с начальными данными, поставленными для всех искомых функций на некоторой поверхности. Если ЗК записана в нормальной форме, то теорема, доказанная С.В. Ковалевской, обеспечивает существование и единственность аналитического решения такой задачи при условии аналитичности всех входных данных.

Одним из важных направлений развития аналитической теории дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе с точки зрения приложений, является доказательство аналогов и обобщений теоремы Ковалевской. В частности, теоремы существования и единственности решения задачи Коши в шкалах банаховых пространств являются современными аналогами теоремы Ковалевской. Первым из таких результатов является теорема, доказанная Л.В. Овсянниковым. Затем обобщение теоремы Ковалевской получил Ф. Трев (F. Treves). Также теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейных сингулярных операторов доказаны Л. Ниренбергом (L. Nirenberg) и Т. Нишидой (T. Nishida). С.С. Титов установил эквивалентность требований теорем Л.В. Овсянникова и Трева–Ниренберга–Нишиды. Также в работах С.С. Титова доказаны новые аналоги теоремы Ковалевской для систем не типа Ковалевской.

Для многих начально-краевых задач, имеющих содержательный газодинамический или физический смысл, вопросы существования и единственности решений в тех или иных функциональных пространствах в случае нелинейных систем исследованы далеко не полностью.

Возможны различные обобщения ЗК.

Одно из направлений обобщения результата С.В. Ковалевской было развито

[1]Леднев Н.А. Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. – Вып. 2. – С. 205–266.

в работах Ш. Рикье (Ch. Riquier) и Ш. Мерея (Ch. Méray). Они исходили из такой постановки задачи, при которой начальные значения для всех искомых функций (а также для производных в случае присутствия в системе производных не только первого порядка) задаются не на координатной плоскости, а в конкретной точке. После этого исследовался вопрос: на каких координатных плоскостях и для каких искомых функций (а также и для производных в отмеченном выше случае) надо задать начальные значения, чтобы поставленная задача имела единственное аналитическое решение. При исследовании сходимости рядов, являющихся решениями некоторых из возникающих при таком подходе задач, было доказано существование и единственность аналитического решения у простейшей ОЗК с данными на двух поверхностях. Результаты Ш. Рикье были улучшены российским математиком Н.М. Гюнтером и обобщены Дж. Томасом (J. Thomas).

Другие обобщения ЗК связаны с увеличением числа поверхностей, несущих начальные (граничные) условия, а также с введением в систему особенностей. Необходимость таких обобщений обусловлена наличием их содержательных приложений в механике сплошной среды, в частности, в газовой динамике.

В качестве самостоятельного объекта исследования ОЗК была рассмотрена Н.М. Гюнтером, а в дальнейшем С.Л. Соболевым и Н.А. Леднёвым.

В работе С.Л. Соболева исследована ОЗК (автор называет ее задачей Гурса) для системы произвольного порядка с данными на двух поверхностях, т.е. когда для части искомых функций начальные данные заданы на одной поверхности, а для всех остальных — на другой поверхности. Решение задачи ищется в виде рядов по степеням независимых переменных x, y. Получены системы линейных алгебраических уравнений, при решении которых определяются коэффициенты указанных рядов. Описан определитель $P(n)$ таких систем. Отличие от нуля определителей $P(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ является необходимым и достаточным условием существования решения задачи в виде ряда. Получены некоторые свойства определителей $P(n)$, хотя сами они не вычисляются и не определяются явно коэффициенты рядов. Приведены достаточные условия, при выполнении которых сходимость рядов доказывается методом мажорант.

В работе Н.А. Леднёва рассмотрена ОЗК в случае, когда начальные данные для искомых функций заданы на произвольном числе координатных гиперплоскостей, и на каждой такой гиперплоскости начальные данные определены для произвольного числа искомых функций. Н.А. Леднёвым для этой задачи получены достаточные условия ее разрешимости в классе аналитических функций. Поскольку решение задачи в явном виде не строится, условия теоремы Леднёва являются достаточно жесткими.

К сожалению, результаты С.Л. Соболева и Н.А. Леднёва, фундаментальные для нелинейной теории аналитических уравнений с частными производными, оказались в течение многих лет не востребованными в приложениях.

Работы В.М. Тешукова дали "вторую жизнь" ОЗК. Оказалось, что многие важные и сложные задачи газовой динамики, связанные с построением аналитических течений, состыкованных между собой через ударные волны, являются ОЗК с точки зрения теории уравнений с частными производными. Исследован случай, когда начальные (граничные) условия для разных функций заданы на двух разных поверхностях. При этом решения задач построены в явном виде, получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решений в виде двойных рядов. При ограничениях, диктуемых физическим смыслом задач, доказана сходимость рядов. В своей научной школе академик А.Ф. Сидоров в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века предложил повторить результаты В.М. Тешукова в другой методике, в том числе уменьшить число искомых функций и использовать "физические" переменные, для того, чтобы в явном виде выписать вторые коэффициенты рядов. Однако в то время попытки некоторых учеников А.Ф. Сидорова решить поставленную задачу успехом не увенчались.

ОЗК для уравнений газовой динамики с условиями на границах, пересекающихся в звуковых точках, рассмотрена Р.Г. Баранцевым.

В работах А.М. Блохина с помощью техники диссипативных интегралов энергии исследуется ОЗК (автор называет ее смешанной задачей) для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне в линейной и квазилинейной постановках.

Еще одно направление обобщения задачи Коши и теоремы Ковалевской связано с тем, что предполагается равным нулю определитель матрицы, стоящей перед вектором производных, выводящих с поверхности, несущей начальные данные. В этом случае записать систему в нормальном виде невозможно и возникает характеристическая задача Коши (ХЗК). Исследованием ХЗК занимались В.М. Бабич, Д. Людвиг (D. Ludvig), Р. Курант, А.А. Дородницын, А.Ф. Сидоров. Аналог теоремы Ковалевской для квазилинейной ХЗК доказан С.П. Баутиным.

Следует отметить, что следствием принципиального отличия ЗК, характеристической и обобщенной ЗК как краевых задач в теории систем уравнений с частными производными является их различие с точки зрения приложений в газовой динамике.

1. Задача Коши: для всех искомых газодинамических параметров при $t = 0$ заданы начальные данные. Требуется построить течение газа при $t > 0$. Существование и единственность локально аналитического решения этой задачи обеспечивает теорема Ковалевской.

2. Характеристическая задача Коши: из точки $x = x_0$ в момент времени $t = t_0$ начинает плавное движение в однородном покоящемся газе непроница-

мый поршень по заданному закону $x = x_p(t)$, $x_p(0) = x_0$, $x'_p(0) = 0$, $x''_p(0) \neq 0$, т.е. начальное значение скорости поршня совпадает со скоростью газа в точке $x = x_0$ в момент времени $t = 0$. По фоновому течению из точки $x = x_0$ начнет распространяться слабый разрыв, т.е. звуковая характеристика, траектория движения и значения параметров газа на которой однозначно заданы фоновым течением. Требуется построить при $t > 0$ течение в области между характеристикой и траекторией движения поршня, удовлетворяющее на поршне условию непротекания, а на характеристике — условию непрерывного примыкания к фоновому течению. Существование и единственность локально аналитического решения этой задачи обеспечивает теорема, доказанная С.П. Баутиным.

3. Обобщенная задача Коши: из точки $x = x_0$ в момент времени $t = 0$ по заданному закону $x = x_p(t)$ непроницаемый поршень резко вдвигается в однородный покоящийся газ, $x'_p(0)$ (начальное значение скорости поршня) строго больше нуля. По однородному покоящемуся газу из точки $x = x_0$ начнет распространяться ударная волна (УВ) с траекторией движения $x = \psi(t)$, $\psi(0) = x_0$, $\psi'(0) > x'_p(0) > 0$, которая заранее неизвестна и на которой должны выполняться некоторые функциональные соотношения (условия Гюгонио), связывающие значения параметров газа по разные стороны от УВ. Требуется определить траекторию движения ударной волны и все течение газа в области между ударной волной и поршнем, удовлетворяющее на поршне условию непротекания, а на фронте ударной волны — условиям Гюгонио. Существование и единственность локально аналитического решения этой задачи обеспечивает теорема, доказанная В.М. Тешуковым (см. также работы А.М. Блохина).

Цель работы. Основной целью диссертации является конструктивное построение решений обобщенных задач Коши с данными на двух и на трех поверхностях в виде бесконечных кратных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами, в том числе для систем с особенностями, и доказательство существования и единственности решений этих задач в классе аналитических функций с получением максимально широких достаточных условий сходимости рядов. Важной задачей диссертации является применение построенных решений и доказанных теорем для исследования течений газа с ударными волнами.

Методы исследования. В работе использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики, в частности, метод представления решения в виде степенных рядов и метод мажорант для доказательства сходимости рядов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработаны теоретические положения по методологии детального исследования обобщенной задачи Коши с начальными данными, заданными на двух и на трех поверхностях, для квазилинейной системы.

2. Доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений обобщенной задачи Коши с начальными данными, заданными на двух поверхностях, для квазилинейной аналитической системы. Доказанные теоремы развивают и обобщают результаты, полученные для обобщенной задачи Коши С.Л. Соболевым и В.М. Тешуковым.

3. Доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений обобщенной задачи Коши с начальными данными, заданными на трех поверхностях, для квазилинейной аналитической системы. Решения указанной задачи впервые построены в явном виде, что позволило ослабить ограничения, наложенные на систему в теореме Н.А. Леднёва[1].

4. Для обобщенных задач Коши в случае, когда на одной или на обеих поверхностях, несущих начальные данные, квазилинейная система имеет особенности, впервые доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций.

5. Построены новые неавтомодельные течения газа с ударными волнами в окрестности оси или центра симметрии. В том числе впервые построена неавтомодельная ударная волна, расходящаяся от оси или центра симметрии с конечной скоростью. Обобщено на случай двух независимых переменных известное автомодельное решение Л.И. Седова (см. также работы И.Е. Забабахина, В.А. Симоненко, Я.М. Каждана).

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработаны положения по методологии детального исследования обобщенной задачи Коши (ОЗК). С помощью этой методологии решена научная проблема построения аналитических решений ОЗК с данными на двух и на трех поверхностях. Доказаны новые теоремы существования и единственности локально аналитических решений ОЗК с данными на двух и на трех поверхностях для различных квазилинейных систем первого порядка, в том числе в случае, когда на всех или на части поверхностей, несущих граничные условия, система имеет особенности. Данные теоремы являются аналогами и обобщениями теоремы Ковалевской, а также теорем С.Л. Соболева, Н.А. Леднёва, В.М. Тешукова на рассмотренные случаи. Общая методика исследования ОЗК может быть применена в теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и в соответствующих приложениях (в механике сплошных сред).

Практическая значимость работы определяется содержательными приложениями доказанных теорем и построенных решений в газовой динамике при описании течений газа с сильными разрывами -- ударными волнами. Построенные решения, в частности, могут быть использованы при исследовании проблемы безударного сильного сжатия газа. Исследование процессов неограниченного или очень сильного сжатия газа имеет важное значение для решения ряда физических проблем, в том числе для осуществления управляемого термоядерного синтеза.

Апробация работы. Результаты диссертации в разные годы докладывались на следующих научных семинарах: ИММ УрО РАН (Екатеринбург, рук. акад. $\boxed{\text{А.Ф. Сидоров}}$), ИГиЛ СО РАН (Новосибирск, рук. акад. Л.В. Овсянников), ИГиЛ СО РАН (Новосибирск, рук. чл.-корр. В.М. Тешуков и проф. В.Ю. Ляпидевский), ИГиЛ СО РАН (Новосибирск, рук. чл.-корр. П.И. Плотников), ИВТ СО РАН (Новосибирск, рук. акад. Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня), НГУ (Новосибирск, рук. проф. А.М. Блохин), ИДСТУ СО РАН (Иркутск, рук. чл.-корр. А.А. Толстоногов и проф. И.В. Бычков), УрГУПС (Екатеринбург, рук. проф. С.П. Баутин).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских научных конференциях: Всероссийских школах-семинарах "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (1996, 1998, 2000, 2002, 2004); Всероссийской конференции "Аналитические методы в газовой динамике" (2006); Международных конференциях "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (1995, 2000, 2005); VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (2001); Всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика А.Ф. Сидорова, "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (2003); Всероссийской конференции, приуроченной к 85-летию академика Л.В. Овсянникова, "Новые математические модели механики сплошной среды: построение и изучение" (2004); Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (2007); Всероссийской конференции, посвященной 50-летию Института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, "Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва" (2007) и др.

Результаты диссертации являются составной частью исследований, выполняемых в Уральском государственном университете путей сообщения в рамках: тематического плана НИР Министерства образования и науки РФ ("Нелинейные уравнения с частными производными и их приложения", 2001–2005 гг., № ГР 01200220281; "Математическое моделирование с помощью нелинейных уравнений", 2006–2010 гг., № ГР 01.2.00606945). Работа поддержана РФФИ, проекты 02-01-01122, 04-01-00205.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 16 печатных работах, куда входят: одна монография [8], издательство "Наука" (Новосибирск), а также 15 статей [1–7, 9–16]. Статьи [1-7] и монография [8] содержат основные результаты диссертации.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором лично и не затрагивают интересы соавторов. Простейшая обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях (задача Коши с начальными данными на разных поверхностях), представленная в § 1 диссертации только для полноты изложения, исследована С.П. Баутиным [8, § 1]. В совместных статьях [1–3] С.П. Баутину принадлежат постановки задач и основные идеи доказательств, автору принадлежат точные формулировки теорем и их подробное обоснование. В совместной с С.П. Баутиным монографии [8] автором единолично написаны §§ 2, 3, 5–7, 9; совместно с С.П. Баутиным написаны введение, §§ 4, 8, 10, заключение и библиографический обзор.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Список литературы содержит 135 наименований. Объем диссертации 359 страниц.

Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследуемых в диссертации задач. Приводится обзор литературы по изучаемой и смежной тематике. Кратко излагается содержание диссертации.

Глава I (§§ 1–3) посвящена построению решений обобщенной задачи Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы первого порядка. В § 1 рассматривается простейший случай двух независимых переменных и двух неизвестных функций, каждая из которых задана на своей поверхности. В § 2 исследуется случай произвольного числа неизвестных функций, часть из которых задана на одной поверхности. остальные — на другой. В § 3 рассматривается случай, когда каждое из граничных условий содержит обе неизвестные функции, что приводит к появлению в системе дополнительных слагаемых специального вида.

Решения всех рассмотренных в диссертации задач строятся в классе аналитических функций, т.е. в виде бесконечных кратных рядов по степеням независимых переменных с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Сходимость построенных рядов доказывается с помощью классического метода мажорант.

В § 1, который включен в диссертацию для полноты изложения материала, рассматривается простейшая ОЗК

$$\begin{cases} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{cases}$$

где u, v — искомые функции; x, y — независимые переменные; a, b, c, d, f, g — аналитические функции, зависящие от переменных x, y, u, v. Доказывается теорема существования и единственности локально аналитического решения и обосновывается пример типа Адамара для данной задачи, который показывает, что сформулировать необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости ОЗК в виде ограничений на коэффициенты системы в данном случае невозможно. Теорема и пример принадлежат С.П. Баутину [8, § 1].

В § 2 строится решение ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы первого порядка в случае m неизвестных функций

$$A_1(x,y,\mathbf{z},\mathbf{U})\mathbf{U}_x + A_2(x,y,\mathbf{z},\mathbf{U})\mathbf{U}_y = \sum_{k=1}^{l} A_{k+2}(x,y,\mathbf{z},\mathbf{U})\mathbf{U}_{z_k} + \mathbf{f}(x,y,\mathbf{z},\mathbf{U})$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u^{(i)}|_{x=0} = \phi_i(y,\mathbf{z}), \ i = 1,\ldots,p; \\ u^{(j)}|_{y=0} = \phi_j(x,\mathbf{z}), \ j = p+1,\ldots,m; \quad 1 \le p \le m-1. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{U} = (u^{(1)},\ldots,u^{(m)})$ – вектор-столбец искомых функций; $x, y, \mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_l)$ – независимые переменные; $A_k = (a_{ij})_k$, $i,j = 1,\ldots,m$; $k = 0,\ldots,l+2$ – матрицы размерности $m \times m$; $a_{ij,k}$, $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_m)$ — аналитические функции, зависящие от переменных $x, y, \mathbf{z}, \mathbf{U}$. Доказана теорема существования и единственности локально аналитического решения поставленной задачи. В том числе указаны необходимые и достаточные условия существования и единственности формального решения в виде кратных рядов по степеням независимых переменных в рассмотренном случае, а также достаточные условия, обеспечивающие сходимость этих рядов. Приведены примеры типа Адамара, показывающие, что невыполнение некоторых из достаточных условий сходимости может повлечь расходимость формальных рядов, а следовательно, отсутствие у рассматриваемой задачи аналитического решения. Также приводится теорема существования и единственности локально аналитического решения для одного из возможных обобщений рассмотренной задачи. Доказанные теоремы развивают результаты, полученные для ОЗК С.Л. Соболевым и В.М. Тешуковым.

В § 3 рассматривается ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы первого порядка в случае двух неизвестных функций в наиболее общей постановке, когда каждое из граничных условий содержит обе искомые функции. Это обстоятельство приводит к тому, что после приведения задачи к стандартному виду в системе появляются дополнительные слагаемые, содержащие производные неизвестных функций, заданные на координатных осях

$$\begin{cases} u_x = Au_y + Bv_x + A\theta v_y|_{x=0} + B\kappa u_x|_{y=0} + p, \\ v_y = Cu_y + Dv_x + C\theta v_y|_{x=0} + D\kappa u_x|_{y=0} + q, \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где u, v – искомые функции; x, y — независимые переменные. Функции $p = p(x,y,u,v,u_y,v_x,u_x|_{y=0},v_y|_{x=0})$, $q = q(x,y,u,v,u_y,v_x,u_x|_{y=0},v_y|_{x=0})$ линейны относительно переменных u_x, v_x, u_y, v_y, причем коэффициенты перед этими переменными обращаются в нуль в точке $O(x=0, y=0, u=0, v=0)$; A, B, C, D, κ, θ — константы. Получены необходимые и достаточные условия существования решения поставленной задачи в виде двойных рядов по степеням независимых переменных. Выписаны системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), при решении которых определяются коэффициенты рядов. Системы решены в явном виде, и получены формулы для искомых коэффициентов. В результате анализа данных формул определены достаточные условия сходимости построенных рядов. Получены также удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение.

Теорема 1 (*Достаточные условия существования формального решения и достаточные условия аналитической разрешимости задачи* (1)).

Пусть в задаче (1) *функции* $p = p(x, y, u, v, u_y, v_x, u_x|_{y=0}, v_y|_{x=0})$, $q = q(x, y, u, v, u_y, v_x, u_x|_{y=0}, v_y|_{x=0})$ *обладают следующими свойствами: а) линейны относительно переменных* u_x, v_x, u_y, v_y, *причем коэффициенты перед этими переменными обращаются в нуль в т.* $O(x=0, y=0, u=0, v=0)$; *б) аналитичны в некоторой окрестности т.* $O(x=0, y=0, u=0, v=0)$ *по переменным* x, y, u, v.

1. Пусть

$$\alpha = AD, \quad \beta = BC, \quad \gamma = 1 - \beta + \alpha, \quad \Delta_0 = \frac{(1 - C\theta)(1 - B\kappa) - \alpha\theta\kappa}{1 - \theta\kappa}$$

и справедливы неравенства

$$\gamma \neq 0, \quad \gamma^2 - 4\alpha \geq 0, \quad 1 - \theta\kappa \neq 0, \quad \Delta_0 \neq 0. \tag{2}$$

Тогда найдется числовое множество $\Lambda(\alpha, \gamma)$ *такое, что при выполнении условия*

$$\Delta_0 \notin \Lambda(\alpha, \gamma) \tag{3}$$

задача (1) *имеет единственное решение в виде рядов по степеням* x, y. *При этом:*

1.1. Если $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, *то* $\quad \Lambda(\alpha, \gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}\ ;\ \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}\right)$;

1.2. Если $\gamma < 0$, $\alpha > 0$, *то* $\quad \Lambda(\alpha, \gamma) = \left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}\ ;\ \frac{\alpha}{\gamma}\right]$;

1.3. Если $\gamma < 0$, $\alpha < 0$, *то* $\quad \Lambda(\alpha, \gamma) = \left[\frac{\gamma\alpha}{\gamma^2 - \alpha}\ ;\ \frac{\alpha}{\gamma}\right]$;

1.4. Если $\gamma > 0$, $\alpha < 0$, *то* $\quad \Lambda(\alpha, \gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}\ ;\ \frac{\gamma\alpha}{\gamma^2 - \alpha}\right]$;

1.5. Если $\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$, то $\Lambda(\alpha,\gamma) = \{0\}$, т.е множество $\Lambda(\alpha,\gamma)$ вырождается в точку.

2. Пусть выполнены неравенства (2), (3) *и*

$$\gamma^2 - 4\alpha \neq 0, \quad \Delta_0 \neq \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}).$$

Тогда задача (1) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности т.* $(x = 0, y = 0)$.

Удобные для проверки достаточные условия аналитической разрешимости других рассмотренных в данной диссертации задач формулируются аналогично и в автореферате не приводятся ввиду их громоздкости.

Также в § 3 приведены примеры и теоремы, которые показывают, что сформулировать необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости ОЗК в виде ограничений на коэффициенты системы в данном случае невозможно, а также что при невыполнении любого из полученных достаточных условий сходимости ряды могут (в зависимости от того, какие условия заданы на границах) как сходиться, так и расходиться.

Пример 1. *Рассматривается задача* (M, θ, $\kappa = \text{const}$)

$$\begin{cases} u_x = M u_y + M\theta v_y|_{x=0} + v + 1, \\ v_y = v_x + \kappa u_x|_{y=0} + u + 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0.$$

1. Если $M = \text{const} > 1$, $\theta = \kappa = 0$, то задача (4) *имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в т.* $(x = 0, y = 0)$.

2. Если при некотором $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство $\theta\kappa = \dfrac{1}{M^n}$, то построить решение задачи (4) *в виде степенных рядов нельзя.*

3. Если $M \neq 1$, $\theta\kappa \neq 0$, $\theta\kappa \neq \dfrac{1}{M^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, то у задачи (4) *существует в некоторой окрестности т.* $(x = 0, y = 0)$ *единственное аналитическое решение.*

Кроме того, рассмотрена ОЗК с данными на двух поверхностях в случае четырех неизвестных функций, которая возникает в газовой динамике при решении задачи о распаде произвольного квазиодномерного разрыва.

Глава II (§§ 4–6) посвящена построению решений обобщенных задач Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейных систем первого порядка с особенностями. В § 4 анализируется простейший случай двух неизвестных функций и двух независимых переменных. Каждая из неизвестных функций задана на своей поверхности для системы с особенностью u/x или x/u. В § 5 рассмотрен случай трех неизвестных функций, когда граничные условия не разрешены относительно неизвестных функций, что приводит к появлению в системе дополнительных слагаемых специального вида. В § 6 исследуется случай системы с особенностями u/x и v/y, когда каждая из двух неизвестных функций задана на своей поверхности. Для задач, рассмотренных в §§ 4, 5, только одна из поверхностей, несущих граничные условия, является характеристикой. Для задачи, рассмотренной в § 6, обе поверхности, несущие граничные условия, являются характеристиками. Таким образом, в главах I, II рассмотрены все возможные, с точки зрения расположения характеристик, постановки ОЗК с данными на двух поверхностях.

В § 4 строятся аналитические решения ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной системы уравнений с частными производными в случае двух неизвестных функций и двух независимых переменных, когда задача имеет конкретную особенность вида u/x или x/u:

$$\begin{cases} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{u}{x}f_1(x,y,u,v) + f_2(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{u}{x}g_1(x,y,u,v) + g_2(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где u, v — искомые функции; x, y — независимые переменные; $a, b, c, d, f_1, g_1, f_2, g_2$ — аналитические функции, зависящие от переменных x, y, u, v. Указаны необходимые и достаточные условия существования и единственности решения поставленной задачи в виде формальных степенных рядов, а также достаточные условия их сходимости.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (5) *функции* $a, b, c, d, f_1, g_1, f_2, g_2$ *являются аналитическими в некоторой окрестности т.* $O(x=0, y=0, u=0, v=0)$.

Пусть

$$A_0 = a(O), \quad B_0 = b(O), \quad C_0 = c(O), \quad D_0 = d(O),$$

$$f_0 = f_1(0), \quad g_0 = g_1(0), \quad A_n = \frac{nA_0}{n - f_0}, \quad B_n = \frac{nB_0}{n - f_0},$$

$$C_n = C_0 + \frac{A_0 g_0}{n - f_0}, \quad D_n = D_0 + \frac{B_0 g_0}{n - f_0}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \delta_0 = 0;$$

$$\delta_{n+1} = \begin{cases} 1 + \frac{B_n}{B_{n+1}} A_{n+1} D_{n+1} \frac{\delta_n}{\Delta_n}, & B_0 \neq 0, \\ 1, & B_0 = 0; \end{cases}$$

$$\Delta_{n+1} = 1 - C_{n+2} B_{n+1} \delta_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Если выполняются условия

$$f_0 \neq n, \ \Delta_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_\infty, \quad |\, \delta_\infty \,| < +\infty, \\ &\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \Delta_\infty, \quad 0 < |\, \Delta_\infty \,| < +\infty; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{|A_0 D_0|}{\Delta_\infty^2} < 1, \tag{8}$$

то у задачи (5) *существует в некоторой окрестности т. О единственное аналитическое решение. При этом условия* (6) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов, а условия* (7), (8) — *достаточными условиями сходимости.*

Построены примеры, которые показывают, что введение устранимой особенности вида u/x в систему существенно меняет свойства ОЗК.

Пример 2. *Задача*

$$\begin{cases} u_x = u_y + v_x, \\ v_y = \frac{u}{x} + xg(y), \\ u(0,y) = 0, \ v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $g(y)$ — *аналитическая функция,* $g_n = \left.\dfrac{d^n g}{dy^n}\right|_{y=0}$, *имеет единственное формальное решение в виде рядов по степеням* x, y. *При этом*

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n|} = R_0 < \infty$, *то эти ряды сходятся при* $|x| < \dfrac{1}{2R_0}$, $|y| < \dfrac{1}{2R_0}$.

2. Если же $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n|} = \infty$, *то ряды расходятся всюду, кроме т.* ($x = 0$, $y = 0$).

Приведено обобщение одной из задач, которое используется при построении течений идеального газа с ударными волнами в окрестности оси или центра симметрии.

Отметим, что если умножить обе части системы (5) на x, то для полученной задачи линия $x = 0$ будет являться характеристикой. Однако задача (5) не попадает под действие теорем для ХЗК, поскольку является ОЗК и принципиально отличается от ХЗК по постановке.

В § 5 строится решение ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной системы первого порядка с двумя неизвестными функциями в случае, когда задача имеет особенности вида u/x, w/x, а граничные условия носят характер более общий, чем рассмотренные в § 4:

$$
\begin{cases}
u_x = a(x,y,u,v,w)u_y + b(x,y,u,v,w)v_x + \dfrac{[u-u_0(y)]}{x} f_1(x,y,u,v,w) + \\
\qquad + f_2(x,y,u,v,w), \\
v_y = c(x,y,u,v,w)u_y + d(x,y,u,v,w)v_x + g(x,y,u,v,w), \\
w_x = [r(x,y,u,v,w)\dfrac{[u-u_0(y)]}{x} + s(x,y,u,v,w)\dfrac{(w-w_0)}{x} + \\
\qquad + h(x,y,u,v,w)]|_{y=0}, \\
\\
w|_{x=0} = w_0, \ u|_{x=0} = u_0(y)|_{x=0}, \ u_0(0) = u_{00}, \\
v|_{y=0} = v_0(x,u,w)|_{y=0}, \ v_0(0,u_{00},w_0) = v_{00}.
\end{cases}
$$

Здесь u, v, w — искомые функции; x, y — независимые переменные; a, b, c, d, g, $f_1, f_2, r, s, h, v_0, u_0$ — аналитические функции своих аргументов; u_{00}, v_{00}, w_0 — константы. Определены необходимые и достаточные условия существования решения рассмотренной задачи в виде двойных рядов по степеням независимых переменных. Выписаны системы линейных алгебраических уравнений, при решении которых определяются коэффициенты рядов. Системы решены в явном виде, и получены формулы для искомых коэффициентов. В результате анализа данных формул определены достаточные условия сходимости построенных рядов. Найдены также удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение. Также рассмотрено одно из возможных обобщений доказанной теоремы, которое используется при решении задачи о фокусировке на ось или в центр симметрии волны сжатия с последующим возникновением ударной волны, распространяющейся с конечной скоростью.

В § 6 строятся аналитические решения ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной системы уравнений с частными производными в случае двух неизвестных функций и двух независимых переменных, когда задача имеет особенности вида u/x и v/y:

$$
\begin{cases}
u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f_1(x,y,u,v)\frac{u}{x} + \\
\qquad + f_2(x,y,u,v)\frac{v}{y} + f_3(x,y,u,v), \\
v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g_1(x,y,u,v)\frac{u}{x} + \\
\qquad + g_2(x,y,u,v)\frac{v}{y} + g_3(x,y,u,v), \\
\qquad u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0,
\end{cases} \tag{10}
$$

где u, v — искомые функции; x, y — независимые переменные; a, b, c, d, f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3 — аналитические функции, зависящие от переменных x, y, u, v. Указаны необходимые и достаточные условия существования и единственности решения поставленной задачи в виде формальных степенных рядов, а также достаточные условия их сходимости.

Теорема 3. *Пусть в задаче* (10) *функции* $a, b, c, d, f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3$ *являются аналитическими в некоторой окрестности т.* $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$.

Пусть

$$A_0 = a(O), \quad B_0 = b(O), \quad C_0 = c(O), \quad D_0 = d(O),$$
$$e_0 = f_1(O), \quad f_0 = f_2(0), \quad g_0 = g_1(0), \quad h_0 = g_2(O);$$

$$H_{k,n-k} = (k+1-e_0)(n-k+1-h_0) - f_0 g_0,$$
$$A_{k,n-k} = \frac{(k+1)(n+1-k-h_0)A_0 + C_0 f_0}{H_{k,n-k}},$$
$$B_{k,n-k} = \frac{(k+1)(n+1-k-h_0)B_0 + D_0 f_0}{H_{k,n-k}},$$
$$C_{k,n-k} = \frac{(n+1-k)(k+1-e_0)C_0 + A_0 g_0}{H_{k,n-k}},$$
$$D_{k,n-k} = \frac{(n+1-k)(k+1-e_0)D_0 + B_0 g_0}{H_{k,n-k}};$$
$$\Delta_{0,n} = 1, \quad \delta_{0,n} = B_{0,n};$$
$$\Delta_{k,n-k} = \begin{cases} 1 - C_{k,n-k}\delta_{k-1,n+1-k}, & \text{если } \Delta_{k,n-k} \neq 0, \\ \text{не определено}, & \text{если } \Delta_{k,n-k} = 0, \end{cases}$$
$$\delta_{k,n-k} = \begin{cases} B_{k,n-k} + \dfrac{A_{k,n-k}D_{k,n-k}\delta_{k-1,n+1-k}}{\Delta_{k,n-k}}, & \text{если } \Delta_{k,n-k} \neq 0,\ \Delta_{k-1,n-k+1} \neq 0, \\ \text{не определено}, & \text{если } \Delta_{k,n-k} = 0, \\ B_{k,n-k} - \dfrac{A_{k,n-k}D_{k,n-k}}{C_{k,n-k}}, & \text{если } \Delta_{k-1,n-k+1} = 0, \end{cases}$$
$$n = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если выполняются условия

$$H_{k,n-k} \neq 0, \ \Delta_{n,0} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \ k = 0, 1, \ldots, n; \tag{11}$$
$$\lim_{n\to\infty} \delta_{n,0} = \delta_\infty, \quad |\, \delta_\infty \,| < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,0} = \Delta_\infty \neq 0, \quad |\, \Delta_\infty \,| < +\infty;$$
$$\frac{|A_0 D_0|}{\Delta_\infty^2} < 1,$$

то у задачи (10) *существует в некоторой окрестности т.* O *единственное аналитическое решение. При этом условия* (11) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде степенных рядов.*

Если умножить обе части системы (10) на xy, то для полученной задачи линии $x = 0$, $y = 0$ будут являться характеристиками, однако задача (10) не является задачей Гурса. Обсуждается вопрос о приложениях ОЗК с данными на двух характеристиках в газовой динамике.

Глава III (§§ 7–9) посвящена построению аналитических решений обобщенной задачи Коши с данными на трех поверхностях для квазилинейной аналитической системы первого порядка в случае трех неизвестных функций, зависящих от трех независимых переменных.

В § 7 ставится ОЗК с данными на трех поверхностях для квазилинейной системы первого порядка в случае трех неизвестных функций. С помощью замен независимых переменных и неизвестных функций она приводится к стандартному виду

$$\begin{cases} u_x = a_1(\mathbf{x},\mathbf{U})u_y + a_2(\mathbf{x},\mathbf{U})u_z + a_3(\mathbf{x},\mathbf{U})v_x + a_4(\mathbf{x},\mathbf{U})v_z + a_5(\mathbf{x},\mathbf{U})w_x + \\ \qquad + a_6(\mathbf{x},\mathbf{U})w_y + g_1(\mathbf{x},\mathbf{U}), \\ v_y = b_1(\mathbf{x},\mathbf{U})u_y + b_2(\mathbf{x},\mathbf{U})u_z + b_3(\mathbf{x},\mathbf{U})v_x + b_4(\mathbf{x},\mathbf{U})v_z + b_5(\mathbf{x},\mathbf{U})w_x + \\ \qquad + b_6(\mathbf{x},\mathbf{U})w_y + g_2(\mathbf{x},\mathbf{U}), \\ w_z = c_1(\mathbf{x},\mathbf{U})u_y + c_2(\mathbf{x},\mathbf{U})u_z + c_3(\mathbf{x},\mathbf{U})v_x + c_4(\mathbf{x},\mathbf{U})v_z + c_5(\mathbf{x},\mathbf{U})w_x + \\ \qquad + c_6(\mathbf{x},\mathbf{U})w_y + g_3(\mathbf{x},\mathbf{U}), \\ u(0,y,z) = 0,\ v(x,0,z) = 0,\ w(x,y,0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w)$ — искомые функции; $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — независимые переменные; a_i, b_i, c_i, g_k, где $i = 1, \dots, 6$, $k = 1, 2, 3$ — аналитические функции, зависящие от переменных $\mathbf{x}, \mathbf{U}$. Подробно рассматривается задача, в которой поверхность $z = 0$, несущая данные для функции w, является характеристикой кратности два для линейной системы, совпадающей с исходной в главной части. Предполагается, что

$$b_3(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ b_5(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ c_3(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ c_5(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0, \tag{13}$$

т.е. в правой части системы (12) 4 из 18 коэффициентов, на которые умножаются производные неизвестных функций, в т. $O(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{U} = \mathbf{0})$ равны нулю. Получены необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи в виде тройных рядов по степеням независимых переменных x, y, z и достаточные условия сходимости рядов.

Вводятся следующие обозначения:

$$A_i = a(0,0,0,0,0,0); \quad B_i = b_i(0,0,0,0,0,0);$$

$$C_i = c_i(0,0,0,0,0,0); \ i = 1,\dots,6; \quad A_i,\ B_i,\ C_i - \mathrm{const},$$

$$\alpha_1^0 = B_4,\ \alpha_2^0 = C_6,\ \alpha_0 = B_4C_6,\ \gamma^0 = 1 - B_6C_4 + B_4C_6,$$

$$\gamma_* = 1 - A_5C_2 + A_3B_2C_6 - A_3B_6C_2 + \frac{A_3B_6}{A_5},$$

$$\gamma = 1 + B_4C_6 - B_6C_4 - A_3B_1 - A_5C_2 + A_3B_2C_6- \\ -A_3B_6C_2 + A_5B_4C_1 - A_5B_1C_4,$$

$$\gamma^* = 1 - A_3B_1 + A_5B_4C_1 - A_5B_1C_4 + \frac{A_5C_4}{A_3},$$

$$\alpha_1 = B_4 + A_3B_2 + A_5B_2C_4 - A_5B_4C_2,$$

$$\alpha_2 = C_6 + A_5C_1 + A_3B_6C_1 - A_3B_1C_6,\quad \alpha = \alpha_1\alpha_2.$$

Вводятся числовые последовательности μ_n, ξ_n, μ_n^0, ξ_n^0 по формулам

$$\mu_0 = 1,\ \ \mu_1 = \gamma^*\gamma_* - \alpha,\ \ \mu_{n+1} = \gamma\mu_n - \alpha\mu_{n-1},\ \ n \in \mathbb{N};$$

$$\xi_0 = 1,\ \ \xi_1 = \gamma,\ \ \xi_{n+1} = \gamma\xi_n - \alpha\xi_{n-1},\ \ n \in \mathbb{N};$$

$$\mu_0^0 = 1,\ \ \mu_1^0 = 1,\ \ \mu_{n+1}^0 = \gamma_0\mu_n^0 - \alpha_0\mu_{n-1}^0,\ \ n \in \mathbb{N};$$

$$\xi_0^0 = 1,\ \ \xi_1^0 = \gamma_0,\ \ \xi_{n+1}^0 = \gamma_0\xi_n^0 - \alpha_0\xi_{n-1}^0,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Пусть в задаче* (12) *все входные данные аналитичны в некоторой окрестности т. О по переменным* x, y, z, u, v, w. *Если выполняются условия* (13), *а также соотношения*

$$\mu_n \neq 0,\ \mu_n^0 \neq 0,\ n \in \mathbb{N}; \tag{14}$$

$$\xi_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N};\ \xi_n^0 \neq 0,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu_\infty,\ 0 <| \mu_\infty |< +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \xi_\infty,\quad \xi_\infty = \mu_\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}^0}{\mu_n^0} = \mu_\infty^0,\ 0 <| \mu_\infty^0 |< +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1}^0}{\xi_n^0} = \xi_\infty^0,\quad \xi_\infty^0 = \mu_\infty^0;$$

$$\frac{|\alpha|}{\mu_\infty^2} < 1;\quad \frac{|\alpha_0|}{(\mu_\infty^0)^2} < 1;\quad \frac{|\alpha_1^0\alpha_2|}{|\mu_\infty^0\mu_\infty|} < 1;\quad \frac{|\alpha_2^0\alpha_1|}{|\mu_\infty^0\mu_\infty|} < 1,$$

то у задачи (12) *существует в некоторой окрестности т.* ($x = 0, y = 0, z = 0$) *единственное аналитическое решение. При этом условия* (14) *являются необходимыми и достаточными условиями существования формального решения задачи.*

Выписаны СЛАУ, при решении которых находятся рекуррентные формулы для коэффициентов рядов. В результате анализа данных формул получены удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение. Показано, что теоремы, доказанные в данном параграфе, не сводятся к теореме Н.А. Леднёва, которая обеспечивает существование и единственность аналитического решения ОЗК в наиболее общей постановке в случае, когда система удовлетворяет определенным (довольно жестким) условиям.

В § 8 подробно рассматривается ОЗК с данными на трех поверхностях для квазилинейной аналитической системы первого порядка в случае трех неизвестных функций, в которой поверхности $x = 0$ и $y = 0$, несущие данные для функций u и v, являются характеристиками кратности один для линейной системы, совпадающей с исходной в главной части. Предполагается, что

$$c_1(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ c_3(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ c_5(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ c_6(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0. \tag{15}$$

Также, как и в § 7, в правой части системы (12) 4 из 18 коэффициентов, на которые умножаются производные неизвестных функций, в т. $O(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{U} = \mathbf{0})$ равны нулю, хотя эти коэффициенты отличны от рассмотренных в § 7. Для этой задачи получены необходимые и достаточные условия существования решения в виде тройных рядов по степеням независимых переменных x, y, z. Выписаны СЛАУ, при решении которых находятся рекуррентные формулы для коэффициентов рядов. В результате анализа данных формул определены достаточные условия сходимости рядов.

Вводятся обозначения:

$$\alpha_1 = A_1 + A_6C_2 - A_1B_6C_4 + B_1A_6C_4,$$
$$\alpha_1 = B_3 + B_5C_4 - A_5B_3C_2 + A_3B_5C_2,$$
$$\gamma = 1 + A_1B_3 - A_3B_1 - A_5C_2 - B_6C_4 + A_1B_5C_4 + A_6B_3C_2 - A_3B_6C_2 - A_5B_1C_4,$$
$$\gamma^* = 1 - A_5C_2 - B_6C_4 + A_5B_6C_2C_4 - A_6B_5C_2C_4,\quad \alpha = \alpha_1\alpha_2,$$
$$\alpha_1^0 = A_1,\quad \alpha_2^0 = B_3,\quad \alpha_0 = A_1B_3,\quad \gamma_0 = 1 + A_1B_3 - A_3B_1.$$

Здесь символами $\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma^*, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \gamma_0$ обозначены величины, отличные от фигурирующих в § 7.

Также вводятся числовые последовательности ϖ_n, ζ_n, ϖ_n^0, ζ_n^0 по следующим формулам:

$$\varpi_0 = 1,\quad \varpi_1 = \gamma^*,\quad \varpi_{n+1} = \gamma\varpi_n - \alpha\varpi_{n-1},\quad n \in \mathbb{N};$$
$$\zeta_0 = 1,\quad \zeta_1 = \gamma,\quad \zeta_{n+1} = \gamma\zeta_n - \alpha\zeta_{n-1},\quad n \in \mathbb{N};$$
$$\varpi_0^0 = 1,\quad \varpi_1^0 = 1,\quad \varpi_{n+1}^0 = \gamma_0\varpi_n^0 - \alpha_0\varpi_{n-1}^0,\quad n \in \mathbb{N};$$
$$\zeta_0^0 = 1,\quad \zeta_1^0 = \gamma_0,\quad \zeta_{n+1}^0 = \gamma_0\zeta_n^0 - \alpha_0\zeta_{n-1}^0,\quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5. *Пусть в задаче* (12) *все входные данные аналитичны в некоторой окрестности т.* O *по переменным* x, y, z, u, v, w. *Если выполняются* *условия* (15), *а также соотношения*

$$\varpi_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}; \tag{16}$$

$$\varpi_n^0 \neq 0,\ n \in \mathbb{N}; \tag{17}$$

$$\zeta_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\zeta_n^0 \neq 0,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} = \varpi_\infty,\ 0 <| \varpi_\infty |< +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \zeta_\infty, \quad \zeta_\infty = \varpi_\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varpi_{n+1}^0}{\varpi_n^0} = \varpi_\infty^0,\ 0 <| \varpi_\infty^0 |< +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_{n+1}^0}{\zeta_n^0} = \zeta_\infty^0, \quad \zeta_\infty^0 = \varpi_\infty^0;$$

$$\frac{|\alpha|}{\varpi_\infty^2} < 1; \quad \frac{|\alpha_0|}{(\varpi_\infty^0)^2} < 1; \quad \frac{|\alpha_1^0\alpha_2|}{|\varpi_\infty^0\varpi_\infty|} < 1; \quad \frac{|\alpha_2^0\alpha_1|}{|\varpi_\infty^0\varpi_\infty|} < 1,$$

то у задачи (12) *существует в некоторой окрестности т.* $(x = 0, y = 0, z = 0)$ *единственное аналитическое решение. Причем условия* (16), (17) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных рядов по степеням* x, y, z.

Показано, что теоремы, доказанные в данном параграфе, не сводятся к теореме Н.А. Леднёва. Получены также удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение. Приведены примеры типа Адамара, которые показывают, что при существовании у ОЗК с данными на трех поверхностях решения в виде рядов по степеням независимых переменных x, y, z аналитическое решение задачи, тем не менее, может отсутствовать, так как ряды сходятся только в т. $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Пример 3. *Задача*

$$\begin{cases} u_x = u_y + u_z + p(x, y, z, u, v, w), \\ v_z = v_x + v_z + q(x, y, z, u, v, w), \\ w_z = w_x + w_y + r(x, y, z, u, v, w), \end{cases}$$

$$u(0, y, z) = 0,\ v(x, 0, z) = 0,\ w(x, y, 0) = 0,$$

где $p = q = r = u+v+w+1$, *имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в т.* $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

Также установлено, что невозможно сформулировать необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости ОЗК с данными на трех поверхностях в виде ограничений на коэффициенты системы в угловой точке.

В § 9 в наиболее общей постановке рассмотрена ОЗК с данными на трех поверхностях для квазилинейной системы первого порядка в случае трех неизвестных функций

$$\begin{cases} A_1(\mathbf{x},\mathbf{U})\mathbf{U}_x + A_2(\mathbf{x},\mathbf{U})\mathbf{U}_y + A_3(\mathbf{x},\mathbf{U})\mathbf{U}_z = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{U}), \\ \Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{U})|_{\phi_1(\mathbf{x})=0} = 0, \\ \Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{U})|_{\phi_2(\mathbf{x})=0} = 0, \\ \Phi_3(\mathbf{x},\mathbf{U})|_{\phi_3(\mathbf{x})=0} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w)$ - вектор-столбец искомых функций; $\mathbf{x} = (x, y, z)$ - вектор независимых переменных; $A_k = (a_{ij})_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$ - матрицы размерности 3×3; $a_{ij,k}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, Φ_k — аналитические функции, зависящие от переменных $\mathbf{x}, \mathbf{U}$; ϕ_k — аналитические функции, зависящие от переменных x, y, z. Для исследования задачи используется методика диагонализации системы, отличающаяся от методики, использованной для исследования ОЗК с данными на трех поверхностях в §§ 7, 8. Своеобразие методики диагонализации состоит в том, что две матрицы, стоящие перед векторами производных, при помощи замены неизвестных функций приводятся к диагональному виду. Ранее эта методика применялась в работах С.Л. Соболева, В.М. Тешукова и в § 2 диссертации для исследования обобщенной задачи Коши с данными на двух поверхностях. Доказаны новые теоремы существования и единственности локально аналитических решений ОЗК с данными на трех поверхностях, не попадающие под действие как теоремы Н.А. Леднёва, так и теорем, доказанных в §§ 7, 8.

Глава IV (§§ 10–14) посвящена построению математических моделей течений газа с ударными волнами в виде обобщенной задачи Коши. В §§ 10, 11 рассматриваются известные задачи о поршне и о распаде разрыва, ранее кусочно аналитические решения этих задач при помощи другой методики были построены В.М. Тешуковым. В §§ 12, 13 строятся течения газа в окрестности оси или центра симметрии с расходящимися ударными волнами. Основным элементом здесь является построение решения системы уравнений газовой динамики в области между центром (осью) симметрии и фронтом ударной волны, включая построение неизвестного фронта ударной волны. В § 14 рассмотрены приложения ОЗК с данными на трех поверхностях.

В § 10 рассматривается задача о поршне. В идеальный газ вдвигается непроницаемый квазиодномерный поршень. Если в начальный момент времени условие согласования скорости газа и скорости поршня не выполнено, в течении газа возникает ударная волна, фронт которой заранее неизвестен. Под ударной волной здесь понимается гладкая поверхность, на которой газодинамические параметры терпят разрыв первого рода. При этом параметры газа по разные стороны поверхности разрыва связаны функциональными соотношениями, которые являются следствиями законов сохранения и называются условиями Гюгонио. Строится течение газа в области, ограниченной поршнем и фронтом ударной волны, включая построение фронта ударной волны. Задача приводится к стандартному для ОЗК виду с помощью следующих действий: 1) введение новых независимых переменных x, y так, чтобы траектория поршня и фронт ударной волны стали новыми координатными осями; 2) введение новых искомых функций так, чтобы условия на поршне и ударной волне перешли в нулевые для этих новых искомых функций; 3) приведение полученной задачи к нормальному виду, когда уравнения разрешены относительно производных, выводящих с каждой из координатных осей, на которых заданы нулевые граничные условия для соответствующих искомых функций; 4) выделение у полученной задачи главной части. В результате получается ОЗК с данными на двух поверхностях для аналитической системы. Существование и единственность локально аналитического решения данной задачи обеспечивает теорема, доказанная в § 3. Таким образом, в диссертации решена задача, поставленная 30 лет назад перед своими учениками академиком А.Ф. Сидоровым (см. раздел актуальность темы).

В § 11 рассматривается пространственная задача о распаде произвольного квазиодномерного разрыва, сосредоточенного в начальный момент времени на криволинейной поверхности, в случае, когда в результате распада разрыва образуются две ударных волны и контактный разрыв, т.е. имеет место конфигурация Б (по терминологии Б.Л. Рождественского и Н.Н. Яненко). Данная газодинамическая задача приводится к стандартному для ОЗК виду с помощью той же методики, которая использовалась § 10 для преобразования задачи о поршне. В результате получается ОЗК с данными на двух поверхностях для аналитической системы. Существование и единственность локально аналитического решения данной задачи обеспечивает теорема, доказанная в § 3.

То обстоятельство, что предложенный в диссертации подход оказался применим не только к новым (§§ 12–14), но и к некоторым ранее решенным задачам (§§ 10–11), свидетельствует о его универсальности.

В § 12 рассматривается задача о распаде разрыва в особой точке в случае конфигурации Б. Пусть известно аналитическое по переменным t, r решение системы уравнений газовой динамики в случае сферической или цилиндрической симметрии в некоторой полной окрестности точки $(t = 0, r = 0)$ (фоновое течение). При этом дополнительно предполагается, что $u|_{t=0,r=0} < 0$, $\sigma|_{t=0,r=0} > 0$, $s|_{t=0,r=0} > 0$. В силу условия симметрии при $r = 0$ скорость газа $u = 0$. В следствие этого возникает сильный разрыв решения — ударная волна, фронт которой неизвестен и определяется вместе с решением задачи. Строится решение в области между осью (центром) симметрии и ударной волной. Впервые неавтомодельное решение этой задачи построено в данной диссертации.

В § 13 решается задача о неавтомодельном безударном сжатии симметричного объема газа: на ось или в центр симметрии фокусируется волна сжатия, вызванная плавным вдвижением в идеальный покоящийся газ непроницаемого поршня, после чего возникает ударная волна, движущаяся с конечной скоростью. Строятся течения газа перед фронтом ударной волны и стыкуются с течением за фронтом с выполнением условий Гюгонио. Построенное решение обобщает известное автомодельное решение Л.И. Седова на случай двух независимых переменных. Конфигурация соответствующих течений газа в плоскости переменных t, r приведена на рис. 1.

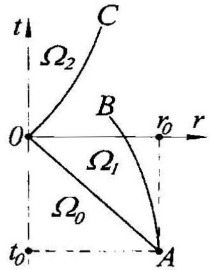

Рис. 1

Линия AB — траектория движения поршня. Прямая AO – звуковая характеристика, отделяющая область волны сжатия Ω_1 от области покоя Ω_0. Момент фокусировки характеристики AO берется за $t = 0$. Линия OC — траектория движения ударной волны.

§ 14 посвящен приложениям ОЗК с данными на трех поверхностях. Рассматриваются двумерные нестационарные течения идеального политропного газа. Установлено, что ОЗК с данными на трех поверхностях для системы уравнений газовой динамики в наиболее "естественной" постановке не имеет в общем случае аналитического решения, хотя ее решение в виде рядов по степеням независимых переменных строится. Установлена аналитическая разрешимость одной ОЗК с данными на трех поверхностях для двумерной системы уравнений газовой динамики в случае, когда две из поверхностей, на которых заданы граничные условия, являются характеристиками кратности один. Впервые приложения ОЗК с данными на трех поверхностях рассматриваются в данной диссертации.

В **заключении** на основе полученных результатов сформулированы выводы.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Приведены постановки ОЗК с данными на двух и на трех поверхностях для различных квазилинейных систем первого порядка, в том числе в случае, когда на всех или части поверхностей, несущих граничные условия, система имеет особенности. Поставленные задачи при помощи замен неизвестных функций и независимых переменных преобразуются к стандартному виду.

2. Предложена методика детального исследования ОЗК, включающая в себя: замены независимых переменных, переводящие поверхности, несущие граничные условия, в координатные плоскости; замены неизвестных функций, приводящие граничные условия к однородному виду; построение решения в виде кратных рядов по степеням независимых переменных; доказательство сходимости рядов при помощи метода мажорант; использование найденных в явном виде коэффициентов формальных рядов для получения максимально широких и вместе с тем в виде удобных для проверки достаточных условий их сходимости.

3. Доказаны теоремы существования и единственности локально аналитических решений ОЗК с данными на двух поверхностях для различных квазилинейных систем первого порядка, в том числе в случае, когда на одной или на обеих поверхностях, несущих граничные условия, система имеет особенности. Данные результаты являются аналогами и обобщениями теоремы Ковалевской на рассмотренные случаи.

4. Доказаны теоремы существования единственности локально аналитических решений ОЗК с данными на трех поверхностях.

5. Построены примеры типа Адамара, которые показывают, что невозможно получить необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости ОЗК в виде ограничений на коэффициенты, на которые умножаются производные неизвестных функций, а также — что при невыполнении некоторых из условий доказанных в диссертации теорем построенные единственным образом ряды расходятся вне многообразия, по которому пересекаются поверхности, несущие начальные данные, т.е. примеры показывают, что условия теорем являются в определенном смысле неулучшаемыми.

6. Доказанные в диссертации теоремы использованы для построения неавтомодельных разрывных течений газа вблизи оси или центра симметрии в задаче о распаде разрыва в особой точке и в задаче о фокусировке волны сжатия на ось или в центр симметрии с последующим расхождением ударной волны, имеющей конечную скорость движения. Показано также, что под действие доказанных в диссертации теорем попадают некоторые задачи газовой динамики, решенные ранее.

Основные публикации по теме диссертации

1. Баутин С.П. Некоторые течения газа в окрестности оси или центра симметрии с отраженными ударными волнами / С.П. Баутин, А.Л. Казаков // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 195–198.

2. Баутин С.П. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью / С.П. Баутин, А.Л. Казаков // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, вып. 3. — С. 465–474.

3. Баутин С.П. Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для системы с особенностью / С.П. Баутин, А.Л. Казаков // Известия вузов. Математика. — 1997. — № 10 (425). — С. 13–23.

4. Казаков А.Л. Построение кусочно-аналитических течений газа, состыкованных через ударные волны, вблизи оси или центра симметрии / А.Л. Казаков // Прикладная механика и техническая физика. — 1998. — № 5. — С. 25–38.

5. Казаков А.Л. Некоторые течения газа с ударными волнами, являющиеся решениями обобщенных задач Коши / А.Л. Казаков // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 3 (42). — С. 278–286.

6. Казаков А.Л. Об аналитических решениях обобщенной задачи Коши с данными на трех поверхностях для квазилинейной аналитической системы / А.Л. Казаков // Сибирский математический журнал. — 2006. — Т. 47, № 2. — С. 301–315.

7. Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы / А.Л. Казаков // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. – С. 1041–1055.

8. Баутин С.П. Обобщенная задача Коши и ее приложения / С.П. Баутин, А.Л. Казаков. – Новосибирск: Наука, 2006. — 399 с.

9. Казаков А.Л. Неавтомодельное безударное сжатие симметричного объема газа / А.Л. Казаков // Вычислительные технологии. — 2008. — Т. 13, № 1. — С. 56–70.

10. Казаков А.Л. Построение решений обобщенной задачи Коши с данными на трех поверхностях в классе аналитических функций / А.Л. Казаков // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. 11, № 1 (33). — С. 63–79.

11. Казаков А.Л. Некоторые течения газа с ударными волнами в пневматических магистралях железнодорожного транспорта / А.Л. Казаков // Транспорт Урала. – 2004. — № 2. — С. 70–74.

12. Казаков А.Л. Теоремы существования и единственности аналитических решений обобщенной задачи Коши / А.Л. Казаков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы Всерос. науч. конф., РГПУ им. А.И. Герцена. – СПб., 2005. – С. 51–55.

13. Казаков А.Л. Задача о распаде разрыва в случае конфигурации Б как

обобщенная задача Коши / А.Л. Казаков // Проблемы прикладной математики. — Екатеринбург: Уральский гос. ун-т путей сообщ., 2006. — Вып. 41 (124). — Т. I. — С. 100–166.

14. Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши с данными на двух характеристиках / А.Л. Казаков // Проблемы прикладной математики и механики. — Екатеринбург: Уральский гос. ун-т путей сообщ., 2007. — Вып. 58 (141). — Т. I. — С. 285–299.

15. Казаков А.Л. Применение метода диагонализации для построения аналитических решений обобщенной задачи с данными на трех поверхностях / А.Л. Казаков // Проблемы прикладной математики и механики. — Екатеринбург: Уральский гос. ун-т путей сообщ., 2007. — Вып. 58 (141). — Т. I. — С. 300–326.

16. Казаков А.Л. Построение аналитических решений одной обобщенной задачи Коши с данными на трех поверхностях / А.Л. Казаков // Известия вузов. Математика. — Казань, 2007. — С. 1–26. — Деп. в ВИНИТИ 06.07.07, № 700 – В2007.

Казаков Александр Леонидович

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Подписано в печать 01.04.2008

Бумага писчая № 1 Объем 1,6 п.л.

Тираж 150 экз. Формат 60×90 1/16 Заказ 74

Уральский государственный университет путей сообщения
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66

10=