КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Фатулаев Буба Фатулаевич

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА И ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2000

Работа выполнена на кафедре математического анализа Смоленского государственного педагогического университета

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор РАСУЛОВ Кахриман Мирземагомедович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор ЖЕГАЛОВ Валентин Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор ЗВЕРОВИЧ Эдмунд Иванович

Ведущая организация –
Чувашский государственный университет

Защита состоится "28" декабря 2000 года в 14^00 часов на заседании специализированного Совета по математике К 053.29.05 Казанского государственного университета по адресу:
420008, г.Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Автореферат разослан "22" ноября 2000 года.

Ученый секретарь
специализированного Совета
профессор В.В. Шурыгин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию линейных краевых задач с сопряжением и со сдвигом (типа Газемана и типа Карлемана) в классах метааналитических функций, т.е. регулярных решений дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + a_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + a_0 F(z) = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1 – некоторые комплексные постоянные, а $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ - дифференциальный оператор Коши-Римана.

Для аналитических функций (т.е. для решений уравнения вида $\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = 0$) краевые задачи со сдвигом впервые были исследованы К.Газеманом[1].

Большой вклад в развитие теории краевых задач со сдвигом для аналитических функций внесли Б.В.Боярский, И.Н.Векуа, Н.П.Векуа, Э.И.Зверович, Р.С.Исаханов, Д.А.Квеселава, Г.С.Литвинчук, И.Б.Симоненко и др.

В последние три десятилетия как в странах СНГ, так и в других странах (Китае, КНДР, Югославии), наблюдается устойчивый интерес к краевым задачам со сдвигом для аналитических функций и различных их обобщений (полианалитических, метааналитических, F-моногенных функций), что объясняется связями этих задач с такими математическими теориями, как, например, теория дифференциальных уравнений, теория приближения функций, а также многочисленными приложениями в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны, в теории плоских кавитационных течений идеальной жидкости и в плоской теории упругости.

Как справедливо указывал И.Н.Векуа[2], "дальнейшие поиски в направлении изучения такого рода задач имеют значительный интерес".

Одним из естественных обобщений краевых задач со сдвигом для аналитических функций являются задачи со схожей структурой для более широких классов функций (полианалитических, метааналитических, F-моногенных и др.). Исследованию таких задач для по-

[1] Haseman C. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben.- Göttingen, 1907. - 192 p.

[2] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. - М.: Наука, 1988, с. 368.

лианалитических и метааналитических функций посвящены работы В.А.Габриновича, С.В.Левинского, В.В.Показеева, И.А.Соколова, M.Canak, B.Damjanovic, C.R.Shoe и др. Однако в этих работах рассматривались лишь задачи так называемого "треугольного вида"[3], которые, по сути, сводятся к последовательному решению нескольких хорошо изученных краевых задач со сдвигом в классах аналитических функций.

В то же время, наиболее важные краевые задачи с сопряжением и со сдвигом общего (не "треугольного") вида для метааналитических функций до настоящего времени оставались не исследованными. К таким задачам, в первую очередь, относятся следущие две задачи, обычно называемые основными краевыми задачами *типа Газемана* и *типа Карлемана* для метааналитических функций[4].

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x+iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L, уравнение которого имеет вид: $t = x(s)+iy(s)$, $0 \leq s \leq l$, где s – натуральный параметр, причем $x(s)$ и $y(s)$ удовлетворяют условию Гельдера вместе со своими производными до 2-го порядка включительно (т.е. $L \in C^2_\mu$). Через T^- обозначим дополнение $T^+ \cup L$ до полной комплексной плоскости.

Задача $H_{2,M}$ (типа Газемана).

Требуется найти все кусочно-метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *с линией скачков* L, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на* L *следующим краевым условиям:*

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t) \cdot F^-(t) + g_0(t), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + g_1(t), \qquad (3)$$

где $\partial/\partial n_+$ $(\partial/\partial n_-)$ *- производная по внутренней (внешней) нормали к* L, *а* $G_k(t), g_k(t)$ $(k = 0, 1)$ *- заданные на* L *функции, причем* $G_k(t)$ *удовлетворяют условию Гельдера вместе с производными до порядка* $3-k$ *(т.е.* $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$*),* $g_k(t)$ *удовлетворяют условию Гельдера вместе с производными до порядка* $2-k$ *(т.е.* $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$*),* $G_k(t) \neq 0$ *на* L*;* $\alpha(t)$ *- функция сдвига, сохраняющая ориентацию контура* L*, причем* $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha(t) \in H^{(2)}(L)$.

---

[3]Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск, 1998, с. 19.

[4]См. с. 286 из книги, цитированной в предыдущей сноске.

Задача $K_{2,M}$ (типа Карлемана).

Требуется найти все метааналитические в T^+ функции, удовлетворяющие на L следующим условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t) \cdot \overline{F^+(t)} + g_0(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n} = G_1(t) \cdot \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n}} + g_1(t), \tag{5}$$

где $L \in C^3_\mu$, $\partial/\partial n$ - производная по внутренней нормали к L, $G_k(t)$, $g_k(t)$ - заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$ и $G_k(t) \neq 0$ на L; $\alpha(t)$ - функция сдвига, сохраняющая ориентацию контура и удовлетворяющая условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \tag{5a}$$

причем $\alpha(t) \in H^{(2)}(L)$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Важно отметить, что поскольку действительные (мнимые) части *бианалитических* функций (т.е. решений уравнения (1) при $a_0 = a_1 = 0$) являются *бигармоническими* функциями, то задача $K_{2,M}$ является естественным обобщением так называемой основной бигармонической задачи[5], имеющей многочисленные приложения в механике сплошной среды и математической физике.

В случае $\alpha(t) \equiv t$ сформулированные выше задачи $H_{2,M}$ и $K_{2,M}$ в классах бианалитических функций были исследованы в работах М.П.Ганина, В.С.Рогожина, К.М.Расулова и др. Однако в случае $\alpha(t) \not\equiv t$ задачи $H_{2,M}$ и $K_{2,M}$ до сих пор не были исследованы. Поэтому разработка методов решения указанных задач является актуальной проблемой.

Связь работы с крупными научными темами.
Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа Смоленского госпедуниверситета в рамках научно-исследовательской темы "Краевые задачи для полианалитических функций и их обобщений" (N 81072482).

Цель работы. Развитие общих методов решения краевых задач типа Газемана и типа Карлемана для метааналитических функций, построение теории их разрешимости и установление нетеровости, выявление частных случаев рассматриваемых задач, допускающих решение в замкнутой форме (в квадратурах).

[5]Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966, с. 138.

Методика исследования. В диссертации используются методы комплексного анализа, теории матричных краевых задач для аналитических функций, теории краевых задач со сдвигом для аналитических функций, а также теории интегральных уравнений.

Научная новизна. В диссертации впервые исследуются краевые задачи с сопряжением и со сдвигом общего (не "треугольного") вида в классах метааналитических функций, разработаны методы решения рассматриваемых задач, установлены необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Однако полученные в диссертации результаты и предложенные методы исследования могут быть применены при решении краевых задач с сопряжением и со сдвигом, отличных от изученных. Кроме того, рассмотренные задачи могут найти приложения в тех областях, где успешно используются краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и их обобщений.

Личный вклад соискателя. Диссертация является самостоятельным научным исследованием соискателя. В совместных работах [6] – [8] лишь постановки задач и идея использования теории обобщенных краевых задач типа Газемана и Карлемана для аналитических функций принадлежат научному руководителю.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на молодежной школе-конференции по теории функций при математическом центре им. Н.И.Лобачевского (Казань, 1998), на Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (Минск, 1999), Всероссийской школе-конференции по теории функций, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова (Казань, 1999), Международной конференции, посвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ (Казань, 2000), семинаре им. Ф.Д.Гахова по краевым задачам и особым интегральным уравнениям при Белорусском госуниверситете (руководитель – профессор Э.И.Зверович) и неоднократно на научно-исследовательском семинаре по комплексному анализу при Смоленском госпедуниверситете (руководитель – профессор К.М.Расулов).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 научных работ, список которых приведен в конце автореферата. Как уже было отмечено, в трех (из восьми) работах, выполненных совместно с научным руководителем, все выкладки в обосновании результатов принадлежат автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 85 наименований. Нумерация формул сквозная в каждой главе. Например, (3.2) (или теорема 3.2) означает вторую формулу (теорему) третьей главы. Общий объем работы составляет 107 страниц, подготовленных с использованием издательской системы LaTeX.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, кратко изложено содержание работы.

Первая глава "Вспомогательные сведения и обзор литературы" состоит из трех разделов. В первом разделе вводятся наиболее часто используемые обозначения и понятия. Основными из них являются понятия метааналитической и кусочно-метааналитической функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z)\cdot\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z)\cdot F(z) = 0, \qquad (6)$$

где $\partial/\partial\bar{z} = [\partial/\partial x + i\partial/\partial y]/2$, а коэффициенты $A_0(z), A_1(z)$ - кусочно-аналитические функции, с линией скачков L, задаваемые следующим образом:

$$A_k(z) = \begin{cases} a_k, & \text{если } z \in T^+, \\ a_k/z^{2-k}, & \text{если } z \in T^-, \quad k = 0, 1, \end{cases}$$

где a_0, a_1 – некоторые комплексные постоянные.

Регулярные решения уравнения (6) в области T^+ (T^-) будем называть метааналитическими в T^+ (T^-) функциями.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (7)$$

для дифференциального уравнения (6).

Известно[6], что всякую метааналитическую функцию $F^+(z)$ в области T^+ можно задавать в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}\}, \quad \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{или}$$

[6]Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск, 1998, с. 139.

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, \quad \text{если} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0,$$

где $\varphi_k^+(z)$ $(k = 0, 1)$ - аналитические в T^+ функции.

Аналогично, в области T^- всякая метааналитическая функция $F^-(z)$ задается в виде

$$F^-(z) = \varphi_0^-(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}/z\} + \varphi_1^-(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}/z\}, \quad \text{если} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{или}$$

$$F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}/z\}, \quad \text{если} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0,$$

где $\varphi_k^-(z)$ $(k = 0, 1)$ - аналитические в T^- функции.

Кусочно-метааналитической функцией с линией скачков L будем называть функцию $F(z)$, которая в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}/z\} + \varphi_1^-(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}/z\}, & z \in T^-, \end{cases} \tag{8}$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}/z\}, & z \in T^-, \end{cases} \tag{9}$$

где $\varphi_k^+(z)$ - аналитические в T^+, а $\varphi_k^-(z)$ - аналитические в T^- функции $(k = 0, 1)$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \to t \in L} F^+(z) = F^+(t), \qquad \lim_{z \to t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

При этом кусочно-метааналитическую функцию, задаваемую формулой (8) ((9)), назовем исчезающей на бесконечности, если $\Pi\{\varphi_k^-; \infty\} \geq 1$ $(\Pi\{\varphi_k^-; \infty\} \geq 1 + k)$, $k = 0, 1$, где $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\}$ обозначает порядок функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

Во втором разделе для удобства дальнейших ссылок приведен ряд известных фактов из теории краевых задач со сдвигом для аналитических функций.

В подразделе 1.2.1 приводится схема решения методом интегральных уравнений задачи Газемана (обычной) для аналитических функций, состоящей в отыскании всех исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций с линией скачков L, удовлетворяющих краевому условию

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{10}$$

где $G(t), g(t)$ - заданные функции точек контура, удовлетворяющие условию Гельдера, $\alpha(t)$ - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм контура L на себя (т.е. прямой сдвиг L), удовлетворяющий следующим условиям:

$$\alpha'(t) \neq 0, \quad \alpha(t) \in H^{(1)}(L). \tag{11}$$

Подраздел 1.2.2 посвящен изложению известных результатов исследования так называемой *обобщенной задачи Газемана* для аналитических функций, состоящей в отыскании всех исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций с линией скачков L, удовлетворяющих краевому условию

$$F^+[\alpha(t)] - G(t)F^-(t) + \int_L A(t,\tau)F^+[\alpha(\tau)]d\tau + \int_L B(t,\tau)F^-(\tau)d\tau = g(t), \tag{12}$$

где $\alpha(t)$ - прямой сдвиг контура L, удовлетворяющий условиям (11); $G(t)$, $g(t)$ - заданные на L функции класса $H(L)$, причем $G(t) \neq 0$ на L; $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$ - заданные фредгольмовы ядра, т.е. $A(t,\tau), B(t,\tau) \in H_*(L \times L)$.

В подразделе 1.2.3 приведена схема решения краевой задачи типа Карлемана для аналитических функций, состоящей в отыскании всех аналитических в T^+ функций по краевому условию

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{F^+(t)} + g(t), \tag{13}$$

где $G(t), g(t)$ - заданные на L функции класса Гельдера, причем $G(t) \neq 0$ при $t \in L$; $\alpha(t)$ - прямой сдвиг контура L, удовлетворяющий условиям (11) и условию Карлемана (5a).

Раздел 1.3 посвящен обзору литературы по теме диссертации.

Вторая глава "Основная краевая задача типа Газемана для метааналитических функций" (состоящая из трех разделов) посвящена исследованию задачи $\boldsymbol{H_{2,M}}$.

В разделе 2.1 дается точная постановка задачи и излагается методика проведения исследования.

Раздел 2.2 посвящен исследованию задачи $\boldsymbol{H_{2,M}}$ в случае, когда контур L есть единичная окружность, т.е. $L = \{t : |t| = 1\}$.

При этом рассматривается случай, когда характеристическое уравнение (7) имеет один (двукратный) корень λ_0, т.е. искомая кусочно-метааналитическая функция имеет вид (9). С учетом (9), соотноше-

ния
$$\frac{\partial}{\partial n_\pm} = \pm i\left\{t'\frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}'\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right\}, \tag{14}$$
а также того факта, что для точек окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется равенство $\bar{t} = 1/t$, краевые условия (2) и (3) удается переписать в следующем виде:
$$W^+[\alpha(t)] = \tilde{G}_0(t)\cdot W^-(t) + \tilde{g}_0(t), \tag{15}$$
$$V^+[\alpha(t)] = \tilde{G}_1(t)\cdot V^-(t) + \tilde{g}_1(t), \tag{16}$$
где $\tilde{G}_k(t), \tilde{g}_k(t)$ $(k = 0,1)$ – удовлетворяющие на L условию Гельдера функции, определенным образом выражающиеся через заданные в условии задачи функции $G_k(t), g_k(t)$ $(k = 0,1)$, а $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ и $V(z) = \{V^+(z), V^-(z)\}$ – исчезающие на бесконечности кусочно-аналитические функции, связанные с аналитическими компонентами искомой кусочно-метааналитической функции по следующим формулам:
$$W^+(z) = z\varphi_0^+(z) + \varphi_1^+(z),\ W^-(z) = \varphi_0^-(z) + \frac{1}{z}\varphi_1^-(z), \tag{17}$$
$$V^+(z) = z^3\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + z^2\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + \lambda_0 z\varphi_0^+(z) + (\lambda_0 + z)\varphi_1^+(z),$$
$$V^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{\varphi_1^-(z)}{z}. \tag{18}$$
Таким образом, установлено, что исходная задача в рассматриваемом случае равносильна совокупности двух обычных задач Газемана (15) и (16) в классах аналитических функций.

Обозначим через $\tilde{æ}_0 = Ind\,\tilde{G}_0(t)$, $\tilde{æ}_1 = Ind\,\tilde{G}_1(t)$ – индексы задач (15) и (16) соответственно. Устанавливается, что $\tilde{æ}_k = æ_k + k + 1$, где $æ_k = Ind\,G_k(t)$ $(k = 0,1)$.

При $\tilde{æ}_0 > 0$ задача (15) безусловно разрешима, и ее общее решение линейно зависит от $\tilde{æ}_0$ произвольных комплексных постоянных. Если же $\tilde{æ}_0 < 0$, то задача (15) имеет единственное решение только при выполнении $|\tilde{æ}_0|$ условий разрешимости:
$$\int_L h_{0k}(\tau)\tilde{g}_0(\tau)d\tau = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,-\tilde{æ}_0, \tag{19}$$
где
$$h_{0k}(\tau) = \frac{1}{X_0^+[\alpha(\tau)]}\left[\tau^{k-1} + \int_L R(\tau,\tau_1)\tau_1^{k-1}d\tau_1\right], \tag{19a}$$

$R(t,\tau)$ – резольвента ядра интегрального уравнения

$$\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\psi(\tau)d\tau = \frac{\tilde{g}_0(t)}{X_0^+[\alpha(t)]}. \tag{19б}$$

а $X_0^+(z)$ – каноническая функция задачи (15).

Аналогично, при $\tilde{æ}_1 > 0$ задача (16) безусловно разрешима, и ее общее решение линейно зависит от $\tilde{æ}_1$ произвольных комплексных постоянных, а при $\tilde{æ}_1 < 0$ задача (16) имеет единственное решение только при выполнении $|\tilde{æ}_1|$ условий разрешимости:

$$\int\limits_L h_{1k}(\tau)\tilde{g}_1(\tau)d\tau = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\tilde{æ}_1, \tag{20}$$

где

$$h_{1k}(\tau) = \frac{1}{X_1^+[\alpha(\tau)]}\left[\tau^{k-1} + \int\limits_L R(\tau,\tau_1)\tau_1^{k-1}d\tau_1\right], \tag{21}$$

а $R(t,\tau)$ – то же самое, что и в (19а), $X_1^+(z)$ – каноническая функция задачи (16).

По найденным функциям $W(z)$ и $V(z)$ можно найти аналитические компоненты $\varphi_0^\pm(z)$ и $\varphi_1^\pm(z)$ искомой метааналитической функции:

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(z) &= \frac{1}{2}\frac{dW^+(z)}{dz} + \frac{\lambda_0 + z}{2z^2}W^+(z) - \frac{V^+(z)}{2z^2}, \\ \varphi_1^+(z) &= \frac{z-\lambda_0}{2z}W^+(z) + \frac{V^+(z)}{2z} - \frac{z}{2}\frac{dW^+(z)}{dz}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0^-(z) &= W^-(z) - \frac{1}{2}V^-(z) + \frac{z}{2}\frac{dW^-(z)}{dz}, \\ \varphi_1^-(z) &= \frac{z}{2}V^-(z) - \frac{z^2}{2}\frac{dW^-(z)}{dz}. \end{aligned} \tag{23}$$

По условию задачи функции $\varphi_k^+(z)$, $k = 0, 1$, должны быть аналитическими в круге T^+, а функции $\varphi_k^-(z)$, $k = 0, 1$, - аналитическими в области T^- и исчезающими на бесконечности, причем функция $\varphi_1^-(z)$ должна иметь на бесконечности нуль порядка не меньше 2. Исходя из этого, получаем условия, которым дополнительно должны удовлетворять решения задач (15), (16):

$$
\begin{cases}
\int\limits_L [\lambda_0 W^+(\tau) - V^+(\tau)]\cdot \tau^{-1} d\tau = 0,\\
\int\limits_L [(\lambda_0+\tau) W^+(\tau) - V^+(\tau)]\cdot \tau^{-2} d\tau = 0,\\
\int\limits_L [W^-(\tau) + V^-(\tau)]\, d\tau = 0,\\
\int\limits_L [2W^-(\tau) + V^-(\tau)]\cdot \tau d\tau = 0.
\end{cases}
\tag{24}
$$

При выполнении условий (24), решение исходной задачи $H_{2,M}$ можно задать формулой (9), где $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются из равенств (22), (23).

Далее, исследуется картина разрешимости задачи $H_{2,M}$ в рассматриваемом случае в зависимости от различных значений индексов $\tilde{æ}_0$ и $\tilde{æ}_1$ задач (15) и (16), доказывается ее нетеровость.

Исходя из этого, для задачи $H_{2,M}$ в разделе 2.2 получены следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть характеристическое уравнение (7) имеет один (двукратный) корень λ_0 и контур $L = \{t : |t| = 1\}$. Тогда:*

1) если $\tilde{æ}_0 \geq 0$ и $\tilde{æ}_1 \geq 0$, то для разрешимости задачи $H_{2,M}$ необходимо и достаточно выполнения условий вида (24), и при выполнении этих условий общее решение задачи $H_{2,M}$ задается формулой (9), где $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются из равенств (22), (23), причем оно линейно зависит от $\tilde{æ}_0+\tilde{æ}_1-r$ произвольных комплексных постоянных; здесь r - ранг определенной матрицы $(0 \leq r \leq \min\{4, \tilde{æ}_0+\tilde{æ}_1\})$;

2) если $\tilde{æ}_0 < 0$ и $\tilde{æ}_1 \geq 0$, то для разрешимости задачи $H_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (19), (24), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (9), где $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются из равенств (22), (23), причем оно линейно зависит от $\tilde{æ}_1 - r$ произвольных комплексных постоянных; здесь r - ранг определенной матрицы $(0 \leq r \leq \min\{4, \tilde{æ}_1\})$;

3) если же $\tilde{æ}_0 \geq 0$ и $\tilde{æ}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $H_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (20), (24), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (9), где $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются из равенств (22), (23), причем оно линейно зависит от $\tilde{æ}_0 - r$ произвольных комплексных постоянных; здесь r - ранг определенной матрицы $(0 \leq r \leq \min\{4, \tilde{æ}_0\})$;

4) наконец, если $\tilde{æ}_0 < 0$ и $\tilde{æ}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $H_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий (19), (20), (24), и при выполнении указанных условий она будет *иметь единственное решение, задаваемое формулой (9), где* $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ *определяются из равенств (22), (23).*

Полученные результаты проиллюстрированы на конкретном примере (пример 2.1).

Раздел 2.3 посвящен исследованию задачи $H_{2,M}$ в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.

Для полноты исследования рассматриваются два случая, в зависимости от того, в каком виде будем искать решение задачи: в виде (8) или (9).

В случае, когда решение задачи $H_{2,M}$ ищется в виде (9), с учетом соотношения (14), краевые условия (2) и (3) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{gathered}\left[\varphi_0^+[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)}\varphi_1^+[\alpha(t)]\right]\exp\{\lambda_0\overline{\alpha(t)}\} = \\ = G_0(t)\cdot\left[\varphi_0^-(t) + \bar{t}\varphi_1^-(t)\right]\exp\{\lambda_0\bar{t}/t\} + g_0(t),\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\exp\{\lambda_0\overline{\alpha(t)}\}\Bigg[\alpha'(t)\cdot t'\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\,\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt}\right) - \\ -\overline{\alpha'(t)}\,\overline{t'}\left(\lambda_0\varphi_0^+[\alpha(t)] + (\lambda_0\overline{\alpha(t)}+1)\varphi_1^+[\alpha(t)]\right)\Bigg] = \\ = G_1(t)\exp\{\lambda_0\bar{t}/t\}\Bigg[t'\left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t}\,\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt}\right) - \\ -\overline{t'}\left(\frac{\lambda_0\left(\bar{t}(t')^2+t\right)}{t^2}\varphi_0^-(t) + \frac{\lambda_0\bar{t}^2(t')^2+\lambda_0 t\bar{t}+t^2}{t^2}\varphi_1^-(t)\right)\Bigg] + t'g_1(t).\end{gathered} \tag{26}$$

Прежде чем продолжить изложение основных результатов данного раздела, отметим одно обстоятельство. А именно, общее представление (9) кусочно-метааналитический функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ формально позволяет свести задачу $H_{2,M}$ к некоторой обобщенной векторно-матричной задаче типа Газемана относительно неизвестного кусочно-аналитического вектора $\varphi^{\pm}(z) = \left(\varphi_0^{\pm}(z), \varphi_1^{\pm}(z)\right)$. Однако[7] получаемая при этом векторно-матричная задача типа Газемана оказывается **вырожденной** (т.е. определители матриц-коэффициентов задачи тождественно равны нулю на L). Поскольку вырожденные задачи не подчиняются известной теории векторно-матричных задач нормального типа для аналитических функций, то возникает необходимость в разработке собственного метода исследования рассматриваемой задачи $H_{2,M}$.

[7]См. замечание 2.1 на с. 41 диссертации.

Суть метода решения задачи $H_{2,M}$, предложенного в диссертации, состоит в следующем. Вводя обозначения

$$\tilde{G}_0(t) = G_0(t) \cdot \exp\{\lambda_0(\bar{t}/t - \overline{\alpha(t)})\},$$

$$\tilde{g}_0(t) = g_0(t) \cdot \exp\{-\lambda_0\overline{\alpha(t)}\},$$

$$Q_0(t) = \bar{t}\tilde{G}_0(t)\varphi_1^-(t) - \overline{\alpha(t)}\varphi_1^+[\alpha(t)] + \tilde{g}_0(t),$$

краевое условие (25) перепишем в следующем виде:

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] = \tilde{G}_0(t)\varphi_0^-(t) + Q_0(t). \tag{27}$$

Считая временно $Q_0(t)$ известной функцией и решая обычную задачу Газемана (27) относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi_0(z)$, по известным формулам определяем функции $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$. Подставляя граничные значения $\varphi_0^+(t)$ и $\varphi_0^-(t)$ найденных функций $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$ и их производных в равенство (26), доказываем, что относительно функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ получаем обобщенную задачу Газемана

$$-\varphi_1^+[\alpha(t)] + \tilde{G}_1(t)\varphi_1^-(t) + \int_L A(t,\tau)\varphi_1^+[\alpha(\tau)]d\tau +$$

$$+\int_L B(t,\tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau = Q_1(t), \tag{28}$$

где $\tilde{G}_1(t), A(t,\tau), B(t,\tau), Q_1(t)$ – функции, которые определенным образом выражаются через заданные в условии задачи $H_{2,M}$ функции $G_k(t), g_k(t)$ $(k = 0, 1)$. Отсюда в свою очередь получается основной результат раздела 2.3 в рассматриваемом случае.

Теорема 2.2. *Пусть дискриминант характеристического уравнения (7) равен нулю. Тогда решение задачи $H_{2,M}$ сводится к последовательному решению обобщенной и обычной задач Газемана (28) и (27) относительно неизвестных кусочно-аналитических функций $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ и $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ соответственно, где $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ – аналитические компоненты искомой метааналитической функции. При этом обобщенная задача Газемана (28) не зависит от $\varphi_0(z)$, а свободный член краевого условия задачи Газемана (27) содержит граничные значения кусочно-аналитической функции $\varphi_1(z)$.*

Аналогичный результат получен и в другом случае, когда решение задачи ищется в виде (8) (теорема 2.3).

Далее, на основании теорем 2.2, 2.3 и картин разрешимости задач Газемана (обобщенной и обычной) для аналитических функций исследуется картина разрешимости задачи $H_{2,M}$ при различных значениях индексов $æ_k = Ind\,\tilde{G}_k(t)$ $(k = 0, 1)$. В общем случае как число q условий разрешимости, так и число l линейно независимых решений задачи $H_{2,M}$ зависят от рангов определенных матриц. Однако при любых значениях индексов числа l и q конечны, т.е. устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.4. *Задача $H_{2,M}$ является нетеровой, и ее индекс определяется по формуле*

$$æ = æ_0 + æ_1 - r,$$

где $æ_j = Ind\,\tilde{G}_j(t)$ $(j = 0, 1)$, а r - ранг определенной матрицы.

Полученные в разделе 2.3 результаты иллюстрируются на конкретном примере (общим методом, полученным в разделе 2.3, решается пример 2.1 из раздела 2.2 и сравниваются результаты решений разными способами).

Третья глава "Основная краевая задача типа Карлемана для метааналитических функций" (состоящая из четырех разделов) посвящена исследованию задачи $K_{2,M}$.

В разделе 3.1 дается точная постановка задачи и излагается методика проведения исследования.

В разделе 3.2 излагается вспомогательный материал. В нем подробно исследуется *обобщенная краевая задача типа Карлемана* для аналитических функций, состоящая в отыскании всех аналитических в T^+ функций $\Phi^+(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] - G(t)\overline{\Phi^+(t)} + \int_L A(t,\tau)\Phi^+[\alpha(\tau)]d\tau + \int_L B(t,\tau)\overline{\Phi^+(\tau)}d\tau = Q(t), \tag{29}$$

где $\alpha(t)$ - функция сдвига, сохраняющая ориентацию контура L и удовлетворяющая условию Карлемана (5а), причем $\alpha(t) \in H^{(2)}(L)$, $\alpha'(t) \neq 0$; $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$ – заданные ядра класса $H_*(L \times L)$, а $G(t)$, $Q(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$, удовлетворяющие условиям

$$G[\alpha(t)] \cdot \overline{G(t)} \equiv 1 \quad \text{и} \quad G[\alpha(t)] \cdot \overline{Q(t)} + Q[\alpha(t)] \equiv 0.$$

Суть метода исследования состоит в непосредственном сведении задачи (29) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. При этом существенную роль играют специальные интегральные представления для аналитических в области T^+ функций, установленные в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha(t)$ - прямой сдвиг, удовлетворяющий условию (14); $G(t) \in H(L)$ и удовлетворяет на контуре L условию*

$$G[\alpha(t)] \cdot \overline{G(t)} \equiv 1;$$

$\Phi^+(z)$ - функция, аналитическая в T^+ и удовлетворяющая условию Гельдера в $T^+ \cup L$. Тогда, если $æ = Ind\, G(t) < 0$, то функцию $\Phi^+(z)$ можно представить в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu[\alpha(\tau)]}{X^+[\alpha(\tau)]} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in T^+,$$

где плотность $\mu(t) \in H(L)$, удовлетворяет условию

$$\overline{\mu[\alpha(t)]} + \mu(t) = 0 \tag{30}$$

и определяется по заданной функции $\Phi^+(z)$ с точностью до выражения, линейно зависящего от $|æ| - 1$ действительных постоянных, а $X^+(z)$ - каноническая функция задачи типа Карлемана

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^+(t)}.$$

Если же $æ = Ind\, G(t) \geq 0$, то функцию $\Phi^+(z)$ можно представить в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\mu[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + X^+(z) \sum_{j=0}^{m} \delta_j z^{-j}, \quad z \in T^+,$$

где $m = æ/2$, плотность $\mu(t) \in H(L)$, удовлетворяет условию (30), δ_0 - действительная постоянная, а δ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ - некоторые комплексные постоянные, причем по заданной функции $\Phi^+(z)$ плотность $\mu(t)$ и постоянные δ_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ определяются однозначно.

Раздел 3.3 посвящен исследованию задачи $K_{2,M}$ в случае произвольных односвязных областей. Основной результат этого раздела содержится в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Если хотя бы при одном значении параметра k $(k = 0, 1)$ и $t \in L$ имеем $G_k[\alpha(t)]\overline{G_k(t)} = 1$, но $G_k[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \neq 0$.*

то задача $K_{2,M}$ *неразрешима. Если же* $G_k[\alpha(t)]\overline{G_k(t)} \neq 1$, $k = 0, 1$, *то решение задачи* $K_{2,M}$ *сводится к последовательному решению двух задач об аналитическом продолжении относительно аналитических компонент искомой метааналитической функции. Наконец, если* $G_k[\alpha(t)]\overline{G_k(t)} \equiv 1$ *и* $G_k[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0$, *то решение задачи* $K_{2,M}$ *сводится к последовательному решению обобщенной задачи типа Карлемана относительно аналитической функции* $\varphi_1^+(z)$ *и обычной задачи типа Карлемана относительно аналитической функции* $\varphi_0^+(z)$, *где* $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ *- аналитические компоненты искомой метааналитической функции.*

В разделе 3.4. содержатся результаты исследования задачи $K_{2,M}$ в случае круга и дробно-линейного сдвига контура. При исследовании используется тот же подход, что и в разделе 2.2 при решении задачи $H_{2,M}$ для единичного круга, т.е. с помощью уравнения Шварца для контура L решение задачи $K_{2,M}$ сводится к решению двух обычных задач типа Карлемана для аналитических функций с дробно-линейным сдвигом контура и, следовательно, в данном случае решение исходной задачи $K_{2,M}$ получается в замкнутой форме (в квадратурах). Далее устанавливается полная картина разрешимости задачи $K_{2,M}$ в рассматриваемом случае в зависимости от значений $æ_0 = Ind\, G_0(t)$ и $æ_1 = Ind\, G_1(t)$ (теорема 3.4).

Полученные результаты проиллюстрированы на конкретном примере.

В заключении сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

1. Разработка методов решения краевых задач $H_{2,M}$ и $K_{2,M}$ в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.

2. Установление необходимых и достаточных условий разрешимости и нетеровости задачи $H_{2,M}$.

3. Решение краевой задачи $H_{2,M}$ в случае круга сведением к двум задачам типа Газемана для аналитических функций.

4. Решение в замкнутой форме (в крадратурах) задачи $K_{2,M}$ в случае единичного круга и дробно-линейного сдвига контура.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Фатулаев Б.Ф.* Основная краевая задача типа Газемана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных обла-

стей с гладкими границами // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: Межвуз. сб. научн. тр./ Смол. гос. пед. ун-т.- Смоленск, 1999.- С. 102-117.

2. *Фатулаев Б.Ф.* Об одной краевой задаче типа Газемана для метааналитических функций в случае круговой области // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Тез. докл. Всероссийской школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова, Казань, 13-18 сент. 1999 г./ Казан. гос. ун-т.- Казань, 1999. - С. 231-232.

3. *Фатулаев Б.Ф.* О решении первой основной краевой задачи типа Газемана для метааналитических функций // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. международной конференции, Минск, 14-18 сент. 1999 г./ Белорусский гос. ун-т, ин-т матем. НАН Беларуси. - Минск, 1999.- С. 227-228.

4. *Фатулаев Б.Ф.* Основные краевые задачи типа Газемана и типа Карлемана для метааналитических функций в случае круговых областей / Смоленск. гос. пед. ун-т. - Смоленск, 1999.- 16 с.- Деп. в ВИНИТИ 24.02.2000. - N 464-В00.

5. *Фатулаев Б.Ф.* О решении внешней краевой задачи типа Карлемана для метааналитических функций в случае единичного круга // Труды математического центра имени Лобачевского.- Т. 5.- Казань: "УНИПРЕСС", 2000.- С. 209-210.

6. *Расулов К.М., Фатулаев Б.Ф.* О решении одной краевой задачи типа Газемана для бианалитических функций // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского.- Казань: "УНИПРЕСС", 1998.- С. 204-206.

7. *Расулов К.М., Фатулаев Б.Ф.* О решении основной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций / Смоленск. гос. пед. ун-т. - Смоленск, 1999.- 23 с.- Деп. в ВИНИТИ 26.10.99. - N2994-В99.

8. *Расулов К.М., Фатулаев Б.Ф.* Исследование основной краевой задачи типа Карлемана для метааналитических функций в случае произвольного гладкого контура // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: Межвуз. сб. научн. тр./ Смол. гос. пед. ун-т.- Смоленск, 1999.- С. 70-97.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю К.М.Расулову за постановки задач и помощь, оказанную при выполнении данной работы.

Подписано в печать 01.11.2000 г.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Зак. 290/00
Отпечатано в типографии ОАО "Смоленскоблгаз"
г. Смоленск, Трамвайный проезд, 8 "б"
Тел.: (0812) 55-60-68.

2-00