КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

На правах рукописи

МАЙОРОВА Мария Евгеньевна

УДК 519.6

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ.

05.13.18 – теоретические основы
математического моделирования,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Мам

КАЗАНЬ - 2000

Работа выполнена в Казанском государственном университете.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.Б. Андреев,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.С. Желтухин

Ведущая организация – Институт математики НАН Беларуси

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор А.Д. Ляшко,
доктор физико-математических наук,
доцент М.Ф. Павлова

Защита диссертации состоится "23" июня 2000 г. в 14 часов на заседании диссертационного Совета Д 053.29.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, КГУ, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "19" 05 2000 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федотов Е.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интенсивное развитие вычислительной техники открывает широкие возможности применения численного моделирования во многих областях современного естествознания. Помимо традиционных сфер, таких как физика, химия, техника математическое моделирование нашло применение и в биологии, медицине, экономике и т.д.

Многие задачи современного естествознания описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. В настоящее время одним из наиболее эффективных методов решения таких уравнений является конечно-разностный метод или метод сеток. Теория этого метода для линейных задач математической физики развита к настоящему времени достаточно полно. Различные аспекты этой теории освещены, например, в монографиях и обзорах А.А. Самарского, А.А. Самарского и В.Б. Андреева, А.А. Самарского и А.В. Гулина, Г.И. Марчука, Е.Г. Дьяконова, В.С. Рябенькова и А.В. Филиппова, Р. Рихтмаейера и К. Мортона и др.

Значительно слабее изучены разностные схемы для нелинейных задач. С наибольшей полнотой разработаны и исследованы численные методы решения нелинейных задач в предположении существования гладкого решения. Здесь следует отметить работы В.Н. Абрашина, В.Ф. Баклановской, М.М. Карчевского, А.В. Лапина, А.Д. Ляшко, Н.В. Арделяна, Е.М. Федотова и др. Достаточно подробно изучены разностные схемы для уравнений и неравенств со слабой нелинейностью, а также с монотонными пространственными операторами.

Класс же нелинейных задач, имеющих прикладной интерес, значительно шире и постоянно пополняется, поскольку для более точного математического описания различных процессов и явлений приходится вводить в рассмотрение новые нелинейные модели, часть которых не укладывается в ранее разработанные теории и не только с точки зрения численного решения, но и с точки зрения разрешимости самих задач. Примером могут служить нестационарные задачи, получившие в научной литературе название задач "с двойным вырождением". Термин "двойное вырождение" подразумевает, что рассматриваемое уравнение (или вариационное неравенство) содержит нелинейность и вырождение и в пространственном операторе, и во "временных слагаемых". Такие задачи часто встречаются в приложениях, например, при математическом моделировании процессов неньютоновской фильтрации, диффузии, таянии ледника, совместного движения поверхностных и подземных вод, фильтрационной консолидации.

Цели исследований. Предмет исследования данной работы – уравнения и вариационные неравенства с двойным вырождением с монотонным по градиенту пространственным оператором.

Основное внимание в работе уделяется построению и исследованию сходимости сеточных методов решения указанных задач. При этом учитывается, что характерной особенностью задач с двойным вырождением является негладкость решения. Поэтому исследование сеточных методов проводится при минимальных предположениях о гладкости исходных данных, обеспечивающих лишь существование обобщенного решения задачи. В этом случае исследование сходимости приближенных методов тесно взаимосвязано с вопросами о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи, поскольку из сходимости сеточного метода часто следует существование решения дифференциальной задачи, а единственность решения позволяет усилить результат о сходимости. Поэтому в диссертацию включены результаты о единственности и существовании обобщенного решения в тех случаях, когда они являются новыми.

Методика исследований. Исследование всех рассматриваемых в работе задач проведено в едином стиле. При доказательстве теоремы существования используется метод полудискретизации, метод Галеркина и метод штрафа. Построение разностных схем проводится с помощью метода сумматорных тождеств. Исследование сходимости дискретных методов основано на получении априорных оценок восполнений приближенных решений в нормах соболевских пространств и последующем предельном переходе. При этом существенно используется аппарат теории функций и нелинейного анализа. Для линейных уравнений математической физики аналогичная методика подробно разработана О.А. Ладыженской.

Научная новизна работы определяется следующими ее основными результатами:

1. Доказана единственность решения нелинейного эволюционного

уравнения с двойным вырождением.
2. Для решения уравнения с двойным вырождением предложены две разностные схемы и исследована их сходимость.
3. Доказана теорема существования обобщенного решения вариационного эволюционного неравенства с двойным вырождением при неоднородном ограничении.
4. Доказана теорема о единственности гладкого решения вариационного эволюционного неравенства с двойным вырождением при неоднородном ограничении.
5. Предложен сеточный метод решения вариационного эволюционного неравенства, доказана его сходимость.

Практическая значимость. Результаты теоретических исследований и разработанные численные методы могут быть использованы при решении конкретных задач фильтрации неньютоновскрй жидкости, диффузии, таянии ледника.

Апробация работы. Результаты диссертации и докладывались на Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева (Казань, 1994 г.), на Международной конференции "Optimization Of Finite Element Approximations" (St.-Petersburg, 1995), на Всероссийском семинаре "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач" (Казань, 1996 г., 1998 г.), на 8-ой Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования" (Абрау-Дюрсо, 1999 г.), в Казанском университете (семинар А.Д.Ляшко), а также на итоговых конференциях КГУ 1994–2000 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 13 работах.

Обьем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 101 наименование. Работа изложена на 133 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследований, сформулированы цели работы, приведен список литературы, дано краткое описание содержания диссертации.

Первая глава содержит шесть параграфов и посвящена исследованию следующей краевой задачи

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(u)k_j(\nabla u)) = f, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_{|\Gamma}(x) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что $\varphi(\xi)$ – абсолютно непрерывная, строго возрастающая функция, удовлетворяющая при любом $\xi \in R^1$ следующим условиям

$$b_0 \mid \xi \mid^\alpha - b_1 \le \Phi(\xi) \equiv \int_0^\xi \varphi'(t)t dt \le b_2 \mid \xi \mid^\alpha + b_3,$$

$$\mid \varphi(\xi) \mid \le b_4 \mid \xi \mid^{\alpha-1} + b_5,$$

$$(\varphi'(\xi)\xi)' \ge 0,$$

где $\alpha > 1$, $b_0 > 0$, $b_1 \ge 0$, $b_2 > 0$, $b_3 \ge 0$, $b_4 > 0$, $b_5 \ge 0$, $b_6 > 0$.

Функции a_i, k_i таковы, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ $(1/p + 1/p' = 1)$, определенный равенством

$$L(u, \nabla v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(v)k_j(\nabla v))$$

является непрерывным, коэрцитивным, ограниченным, монотонным по градиенту. Допускается вырождение оператора L по ∇v.

В первом параграфе первой главы дана постановка задачи.

Второй параграф посвящен доказательству единственности обобщенного решения задачи (1)–(2).

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. *Пусть функции φ, a_i, k_i удовлетворяют перечисленным выше условиям, кроме того,*

$$\mid a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2) \mid \le d_2 \mid \xi_1 - \xi_2 \mid \quad \forall \xi_1,\ \xi_2 \in R^1,\ \forall x \in \Omega,\ d_2 > 0. \tag{3}$$

Тогда при любых

$$f \in L_1(0,T; L_1(\Omega))$$

задача (1)-(2) имеет единственное обобщенное решение.

В третьем параграфе первой главы сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

В четвертом параграфе первой главы для решения задачи (1)–(2) рассматривается явная разностная схема следующего вида

$$\varphi_t(y) + Ay = f_{h\tau}, \tag{4}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \qquad y_{|\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Здесь A – скточная аппроксимация оператора L, построенная методом сумматорных тождеств, функции $f_{h\tau}$, y_0 – разностные аппроксимации функций f и u_0 соответственно.

Для решения разностной схемы (4)–(5) получены априорные оценки восполнений сеточных решений, на основе которых, доказывается сходимость кусочно-постоянных восполнений решения (4)–(5) к обобщенному решению исходной задачи.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2. *Пусть функции* φ, a_j, k_j *удовлетворяют перечисленным выше условиям, кроме того,*

$$\varphi'(\xi) \geq b_6 \mid \xi \mid^{\alpha-2} \qquad \text{при} \quad \alpha \geq 2, \tag{6}$$

$$\left(\varphi^{-1}(\xi)\right)' \geq b_7 \mid \xi \mid^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \qquad \text{при} \quad \alpha < 2, \tag{7}$$

$$f \in L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega)) \cap L_\alpha(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega)),$$

$$u_0 \in L_\alpha(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega).$$

Тогда при τ, h, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\tau \leq c\lambda_\alpha^{-s}, \tag{8}$$

$$\tau\lambda_\alpha^{\bar{s}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau,\ h \to 0, \tag{9}$$

где $s = \max\{p,\alpha\}/\min\{\alpha-1,1\}$, $\bar{s} = \max\{p,\alpha,\alpha'\}$,

$$\lambda_\alpha = \frac{2\sqrt[p]{n}}{h^{1+n(p-\alpha)/\alpha p}}, \qquad \text{если} \quad p \geq \alpha,$$

$$\lambda_\alpha = \frac{2\sqrt[\alpha]{n}}{h}, \qquad \text{если} \quad 1 < p < \alpha, \tag{10}$$

существует подпоследовательность кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы (4)–(5), сходящаяся к обобщенному решению задачи (1)–(2).

Если $f \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, а функции a_i удовлетворяют условию (3),то вся последовательность кусочно-постоянных восполнений сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2).

В пятом параграфе первой главы предлагается схема, названная регуляризованной:

$$\varphi_t(y) + \sigma y_t + Ay = f_{h\tau}, \tag{11}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \qquad y_{|\Gamma} = 0, \tag{12}$$

где A, $f_{h\tau}$, φ, y_0 – те же, что и в схеме (4)-(5), а σ – некоторая положительная постоянная (параметр регуляризации). Отметим, что схема (11)-(12) по реализации близка к явной, однако при доказательстве сходимости не требуется выполнения условий (6), (7). Здесь доказана

Теорема 3. *Пусть функции φ, a_j, k_j удовлетворяют перечисленным выше условиям,*

$$f \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)),$$

шаги сетки τ, h выбраны так, что параметр ρ, определенный соотношениями

$$\rho = \tau\lambda_2^2 = \tau\frac{4n^{2/p}}{h^2} \qquad \text{при} \qquad 1 < p < 2,$$

$$\rho = \tau\lambda_2^2\lambda_\alpha^{p-2} = \begin{cases} \tau\dfrac{2^p n}{h^{p+n(p-2)(p-\alpha)/\alpha p}} & \text{при} \quad p \geq 2,\ \alpha \geq 2, \\ \tau\dfrac{2^p n}{h^p} & \text{при} \quad \alpha \leq 2 < p, \end{cases}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\rho < 1, \quad \rho \to 0 \quad \text{при} \quad \tau,\ h \to 0,$$

а параметр регуляризации σ выбран так, что

$$\sigma = \sigma_0\rho^{1-\gamma},$$

где $0 < \gamma < 1$ – произвольная постоянная, σ_0 - константа, определяемая исходными данными задачи.

Тогда существует подпоследовательность кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы (11)-(12), сходящаяся к обобщенному решению задачи (1)-(2).

Если $f \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, а функции a_i удовлетворяют условию (3), то вся последовательность кусочно-постоянных восполнений сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2).

В последнем параграфе первой главы приведены результаты численного исследования разностных схем для задачи (1)-(2) на примере задачи о свободном растекании неньютоновской жидкости или куполовидного ледника с нулевым балансом массы.

Численные исследования проводились в одномерном случае. Анализ проведенных экспериментов позволяет сделать вывод, что явная схема дает хорошие результаты. Неявная разностная схема, реализованная методом Ньютона, не на много улучшает результаты явной разностной схемы и сохраняет зависимость между шагами τ, h, поскольку для сходимости метода Ньютона требуется высокая точность начального приближения. Регуляризованная разностная схема дает решения близкие к решениям явной разностной схемы, если итерационный параметр σ выбран оптимально.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию эволюционного вариационного неравенства с двойным вырождением вида:

$$\int_0^T \langle \frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}, v-u\rangle dt + \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(u)k_i(\nabla u))(v-u)\,dx\,dt \ \geq$$

$$\geq \int_0^T \langle f, v-u\rangle dt \quad \forall\, v \in K, \tag{13}$$

где

$$K = \{\, v \,;\ v \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)) \cap L_\infty(0,T;L_\alpha(\Omega)),$$
$$v \geq \overline{g} \ \text{ почти всюду в } \ \Omega \times (0,T]\},$$

$\langle w,v\rangle$ значение функционала w из $L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$ на элементе v из $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega))$. При определении решения вариационного неравенства полагается, что функция u такова, что

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ почти всюду в } Q_T. \tag{14}$$

В первом параграфе дана постановка задачи, определено обобщенное решение.

Во втором параграфе доказана теорема существования обобщенного решения вариационной задачи (13)–(14). Доказательство проводится с помощью метода полудискретизации со штрафом. Под решением полудискретной задачи понимается функция $y(t) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega)$ $\forall t \in \omega_\tau$, такая, что

$$y(0) = u_0(x) \text{ почти всюду в } \Omega$$

и для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega)$ $\forall t \in \omega_\tau$ справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega \varphi_t\Big((y(t) - g(t))^+ + g(t)\Big) w\, dx + \langle L_g(\hat{y}(t), \nabla \hat{y}(t)), w\rangle +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_\Omega \beta\Big(\hat{y}(t) - \hat{g}(t)\Big) w\, dx = \langle f_\tau(t), w\rangle.$$

Здесь ε – параметр штрафа, f_τ и g полудискретные аналоги функций f и $\overline{g}$:

$$f_\tau(x,t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \langle f(x,\xi), w\rangle\, d\xi, \quad g(x,t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \langle \overline{g}(x,\xi), w\rangle\, d\xi,$$

операторы L_g, β определены следующими равенствами

$$L_g(v, \nabla u) = L((v-g)^+ + g, \nabla u) \quad \forall v,\, u \in L_\alpha(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),$$

$$\beta w = -\mid w^- \mid^{p-2} w^- \quad \forall w \in R^1.$$

Доказана

Теорема 4. *Пусть*

$$\overline{g} \in L_\infty(0,T; L_\alpha(\Omega)) \cap L_p(0,T; W_p^{(1)}(\Omega)), \quad \overline{g}_{|\Gamma} \le 0,$$

$$\frac{\partial \varphi(\overline{g})}{\partial t} \in L_{p'}(0,T; L_{p'}(\Omega)),$$

$$u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega), \quad u_0(x) \ge \overline{g}(x,0) \text{ почти всюду в } \Omega, \tag{15}$$

$$f \in L_{p'}(0,T; L_{p'}(\Omega)).$$

Тогда существует подпоследовательность восполнений решения полудискретной задачи, сходящаяся к обобщенному решению задачи (13)–(14).

В третьем параграфе второй главы исследуется единственность решения вариационной задачи (13)–(14). Установлено, что при выполнении условия

$$| a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta) | \le c \,| \xi - \eta | \quad \forall \xi,\ \eta \in R^1,\ i = 1,...,n, \tag{16}$$

решение задачи (13)–(14) единственно в классе функций, удовлетворяющих включению

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} \in L_2(0,T;L_2(\Omega)). \tag{17}$$

Кроме того, здесь показано, что, если $\alpha \ge 2$, A – монотонный оператор, $f \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$ и справедливо соотношение (16), то задача (13)–(14) будет иметь решение, удовлетворяющее (17).

В четвертом параграфе для решения вариационного неравенства (13)–(14) при $g = const$ предлагается следующая разностная схема

$$\varphi_t(y) + Ay + \frac{1}{\varepsilon}\beta(\hat{y} - g) = f_{h\tau}, \tag{18}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_{|\Gamma} = 0. \tag{19}$$

Здесь A, $f_{h\tau}$ – разностные аппроксимации оператора L и функции f, определенные так же, как и в первой главе.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 5. *Пусть функции φ, a_j, k_j удовлетворяют условиям теоремы 2, $k_i(\xi)\xi \ge 0 \ \ \forall\ \xi \in R^1$; $f \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$, а для u_0 справедливо соотношение (15).*

Тогда при любых τ, h и ε, удовлетворяющих (7), (8) и таких, что

$$\frac{\tau\lambda_\alpha^s}{\varepsilon^{(s-1)/(p-1)}} \le c,$$

где $s = \max\{\alpha, \alpha', p\}$, λ_α определена (10), существует подпоследовательность кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы (18)–(19), сходящаяся к обобщенному решению задачи (13)–(14).

Автор благодарит Российский Фонд Фундаментальных Исследований за финансовую поддержку работы в рамках грантов 95-01-00400, 98-01-00260.

Основные работы автора по теме диссертации.

1. Ляшко А.Д., Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О разрешимости одного вариационного неравенства теории нелинейной нестационарной фильтрации // Диф. ур. – 1996. – Т.32. – N 7. – С. 896-901.
2. Майорова М.Е. Сходимость явной разностной схемы для нелинейного параболического уравнения с двойным вырождением / Казань: КГУ, 1996. – Деп. в ВИНИТИ 31.01.96. – N 344-В96.– 20 С.
3. Майорова М.Е. Исследование разрешимости одного вариационного неравенства с двойным вырождением при неоднородном ограничении / Материалы Всероссийского семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань.– 1998. – С. 53-54.
4. Майорова М.Е. О разрешимости одного эволюционного вариационного неравенства с неоднородным ограничением / "Исследование по прикладной математике". – Казань: Изд.-во Казанского математического общества. – Вып. 23. – 1999. – С. 204-211.
5. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О сходимости неявной разностной схемы для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв.вузов.Математика. – 1994. – N 1. – С. 43-53.
6. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О разностных методах решений уравнений типа нестационарной фильтрации с двойным вырождением / Тез.докладов Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева, Казань.–1994.–ч. 2. –С. 80-81.
7. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О явных разностных схемах для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации / Казань: КГУ, 1995. – Деп. в ВИНИТИ 28.03.95. – N 836-В95.– 30 С.
8. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О существовании решения одного вариационного эволюционного неравенства с двойным вырождением/ Тез. докладов Международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред", Изд.-во СО РАН– 1996.–С. 381-382.
9. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О явных разностных схемах для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации / "Исследования по прикладной математике". – Казань: Изд-во Казанского

математического общества. – Вып. 22. – 1997. – С. 106-130
10. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. Сходимость явных разностных схем для одного вариационного неравенства теории нелинейной нестационарной фильтрации // Изв.вузов.Математика, 1997. – N 7. – С. 53-65.
11. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. О единственности решения в задачах с двойным вырождением / Труды 8-ой Всероссийской школы-семинара "Современные проблемы математического моделирования", Абрау-Дюрсо.– 1999.– С. 154-161.
12. Павлова М.Ф., Майорова М.Е. Сходимость явных разностных схем для параболического нелинейного нестационарного неравенства / Материалы Всероссийского семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань.–1996.–С. 87-89.
13. Pavlova M.F., Maiorova M.E. On the convergence of finite element schems for nonlinear parabolic with double degeneration / Abstract of Internationale conference "Optimization of Finite Element Approximation", St.-Peterburg. –1995.-P.74-75.

Отпечатано на ризографе.
Бумага офсет. Заказ ФФ 3/05.
Тираж 100 экз. ООП ТРО ВОИ т.: 31-55-02