

0716642-1

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГУРЬЯНОВА ОЛЬГА НИКОЛАЕВНА



**РАСЧЕТ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ МКЭ**

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ - 2000

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета.

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор **А.И. Голованов**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент АНТ **В.Н.Паймушин**

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ



870091

Доктор физико-математических наук, профессор **Р.А.Каюмов**

Ведущая организация: НИИ механики Нижегородского государственного университета

Защита состоится "22" июня 2000г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. Физ.2 на заседании диссертационного совета Д 053.29.01 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И.Лобачевского.

Автореферат разослан " " мая 2000г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А.Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ.

Настоящая работа лежит на пересечении трех крупных разделов механики деформируемого тела. Это исследование слоистых оболочек сложной формы, широко используемых во многих современных конструкциях. Это геометрически нелинейные задачи механики оболочек – направление издавна являющееся традиционным для казанской школы механиков, получившее новый импульс к развитию с появлением в промышленности изделий из композиционных материалов. И, наконец, метод конечных элементов (МКЭ), занимающий в настоящее время одно из ведущих положений как в нашей стране, так и за рубежом, позволяющий исследовать самые сложные объекты.

Каждое из этих направлений усиленно разрабатывается, имеется громадное количество публикаций, сформировались научные школы, занимающиеся одним или несколькими из указанных направлений. Однако, работ, объединяющих все эти направления пока еще недостаточно.

Ведущее положение в исследовании слоистых оболочек занимают работы Болотина В.В., Воровича И.И., Григолюка Э.И., Куршина Л.М., Муштари Х.М., Прусакова А.П., Саченкова А.В., Чулкова П.П. Позднее появилась серия работ Григоренко Я.М., Куликова Г.М., Паймушина В.Н. и многих других.

Основополагающие результаты в геометрически и физически нелинейных задачах получили Алумяэ Н.А., Вольмир А.С., Галимов К.З., Корнишин М.С., Муштари Х.М., Новожилов В.В., Саченков А.В., Тергулов И.Г.

Метод конечных элементов усиленно разрабатывается за рубежом, значительные результаты получены и в нашей стране. Основные положения этого метода изложены в работах Зенкевича О., Одена Д., Постнова В.А., Рикардса Р.Б., Розина А.А., Сахарова А.С., Голованова А.И., Гаврюшина С.С. и др.

ЦЕЛЬ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.

Разработать, используя возможности МКЭ и метода пошагового нагружения, вариант безитерационного подхода к исследованию деформации оболочек сложной формы с анизотропными слоями при больших перемещениях. С помощью одного из вариантов метода продолжения по параметру развить предложенную методику на исследование закритических деформаций с определением верхней и нижней предельных точек и выходом на устойчивую ветвь кривой "нагрузка-прогиб". Создать алго-

ритм и пакет программ, реализующий применение разработанного метода для исследования слоистых оболочек сложной формы. Проверить точность и надежность метода на ряде известных и новых задач механики оболочек.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РЕЗУЛЬТАТОВ.

Разработан вариант безитерационного метода исследования больших прогибов слоистых оболочек сложной формы с анизотропными слоями переменной толщины, основанный на использовании МКЭ и метода пошагового нагружения в сочетании с методом продолжения по параметру. С его помощью решен ряд важных для практического использования задач.

ДОСТОВЕРНОСТЬ полученных результатов обеспечивается:

Использованием традиционных для слоистых оболочек гипотез, известного вариационного уравнения теории оболочек, применением хорошо апробированных МКЭ и метода шагового нагружения в сочетании с методом продолжения по параметру.

Хорошим соответствием результатов, полученных в диссертации, с известными аналитическими и численными решениями других авторов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ.

Созданный и апробированный пакет программ может с успехом использоваться при исследовании больших прогибов оболочечных конструкций сложной формы с анизотропными слоями переменной толщины, при построении кривой "нагрузка-прогиб" с определением ее верхней и нижней предельных точек.

Полученные решения могут быть использованы в автомобильной, авиационной и других областях промышленности, где используются гибкие многослойные тонкостенные конструкции.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ:

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались

1. На итоговых научных конференциях Казанского университета с 1997-2000 г.
2. На VII Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением"- Казань. – 1997.
3. На XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин – Саратов – 1997.

4. На VIII Межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" – Самара – 1998.
5. На Международной конференции "Актуальные проблемы механики оболочек" – Казань – 1998.
6. На школе-конференции молодых ученых в области механики оболочек и пластин – Казань – 1998.
7. На VII Международной конференции "Математика. Экономика. Экология. Образование"- Ростов-на-Дону – 1999.
8. На V Международном симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и слоистых сред" – Москва – 1999.
9. На XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин – Н. Новгород – 1999.
10. На VI Международном симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и слоистых сред" – Москва – 2000.
11. На Международной научно-технической конференции "Технико-экономические проблемы промышленного производства" – Наб. Челны – 2000.
12. На семинаре в КГУ
13. На семинаре в КФТИ КНЦ РАН.

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации – 166 страниц, включая 70 рисунков, 1 таблицу, список основных обозначений и список литературы 249 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении приводится обзор работ, близких к теме диссертации, сформулирована цель работы, ее структура, выписаны положения, выносимые на защиту

В первом параграфе первой главы выписаны основные соотношения нелинейной теории упругости: дается понятие перемещения точек тела, упругой деформации, вводятся тензор напряжений Коши и напряжения тензора Пиолы-Кирхгофа. Записывается вариационное уравнение принципа возможных перемещений для трехмерного тела.

Далее проводится анализ наиболее известных методов решения нелинейных задач и детально излагается шаговый метод, применяемый в

диссертации. Основная идея метода в том, что нагружение конструкции осуществляется шагами и рассматривается последовательность ее равновесных состояний при каждом шаге нагружения. Приращение нагрузки на каждом шаге выбирается достаточно малым, чтобы задачу можно было считать квазилинейной.

Пусть известна геометрия изогнутой поверхности конструкции на N шаге. Вводим декартову систему координат с началом в некоторой точке наблюдения и вырезаем прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. Накопленные к этому шагу напряжения, действующие на эти площадки, также считаются известными

Записываем вариационное уравнение относительно приращений компонент напряженно-деформированного состояния (НДС), в котором сохранены нелинейные члены, имеющие при больших прогибах тот же порядок малости, что и линейные:

$$\begin{aligned} \iiint_{V^{(N)}} \left[\Delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(N)} \delta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i^{(N)}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j^{(N)}} \right) \right] dV = \iiint_{V^{(N)}} \Delta \bar{P} \cdot \delta \bar{v} dV + \\ + \iint_{S_\sigma^{(N)}} \Delta \bar{T} \cdot \delta \bar{v} dS + \left(\iiint_{V^{(N)}} \bar{P} \cdot \delta \bar{v} dV^{(N)} + \iint_{S_\sigma^{(N)}} \bar{T} \cdot \delta \bar{v} dS - \iiint_{V^{(N)}} \sigma_{ij}^{(N)} \delta \varepsilon_{ij} dV \right). \end{aligned} \quad (1)$$

где \bar{v} - вектор перемещений точки при переходе от N -го шага к $(N+1)$ -му, \bar{P} и \bar{T} - векторы массовых и контурных усилий, $\Delta \bar{P}$ и $\Delta \bar{T}$ - приращение нагрузок на шаге нагружения, $\sigma_{ij}^{(N)}$ - тензор напряжений Коши (накопленные напряжения всех предыдущих шагов), $\Delta \sigma_{ij}$ - приращение напряжений (тензор Пиолы-Кирхгофа), ε_{ij} - приращение линейной деформации, $V^{(N)}$ - область, занимаемая оболочкой, $S^{(N)} = S_\sigma^{(N)} + S_\sigma^{(N)}$ - ограничивающая ее поверхность.

Слагаемое в круглых скобках правой части вариационного уравнения при точном решении равно нулю. Однако в N -ом состоянии уравнение равновесия не выполняется точно из-за пренебрежения членами высшего порядка малости. Поэтому выражение в круглых скобках оставляется в уравнении для коррекции решения при переходе от одного шага нагружения к другому, что приводит к уменьшению накопления погрешности.

В результате решения вариационного уравнения определяются приращения всех компонент НДС, причем приращения напряжений действ-

вуют на площадки искривленного в процессе деформирования параллелепипеда (напряжения Пиолы-Кирхгофа).

Чтобы перейти к следующему шагу нагружения, необходимо пере- считать напряжения Пиолы-Кирхгофа в напряжения тензора Коши. Для этого вводится новая декартова система координат с началом в той же точке наблюдения, занявшей в результате деформирования другое положение в пространстве. Вновь вырезается элементарный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям новой системы и осуществляется пересчет напряжений, действующих на площадки искривленного параллелепипеда (напряжения Пиолы-Кирхгофа), к напряжениям, действующим на площадки нового прямоугольного параллелепипеда (напряжения Коши).

В итоге, как и перед предыдущим шагом нагружения, имеется "начальная" геометрия поверхности и тензор накопленных напряжений Коши. Это дает возможность записать и решать вариационное уравнение для следующего шага.

Во втором параграфе первой главы описанная выше постановка трехмерной задачи распространяется на тонкостенные конструкции, состоящие из пластин и оболочек малой и средней толщины. При этом используется МКЭ. Конструкция разбивается на 9-ти узловые изопараметрические конечные элементы (КЭ), каждый КЭ оболочки представляет собой трехмерное тело, у которого один из размеров меньше двух других (рис.1). Внутри конечного элемента вводится линейная аппроксимация вдоль меньшего размера и квадратичная в остальных двух направлениях. Этот материал излагается в первом пункте параграфа.

При описании деформации оболочек принимается статическая гипотеза о малости напряжений обжатия.

В рамках используемой методики применяется подход, позволяющий учитывать указанную статическую гипотезу. Основная идея состоит в следующем. Вводится локальная декартова система координат $x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}$ с осями $\bar{p}_1^{(N)}, \bar{p}_2^{(N)}, \bar{p}_3^{(N)}$ (рис.1), причем орт $\bar{p}_3^{(N)}$ направлен по нормали к деформированной на N -м шаге нагружения срединной поверхности оболочки. В отличие от криволинейной системы координат ξ, η, ζ , единой для всей исследуемой поверхности, она вводится для каждой квадратурной точки. Квадратурные точки необходимы для численного вычисления интегралов, входящих в разрешающее вариационное уравнение, когда интегрирование заменяется суммированием подынтегральных выражений, вычисленных в этих точках. Введение локальной

системы координат позволяет выделить напряжение $\sigma_{33}^{(N)}$ (напряжение обжатия) и пренебречь им в соответствии с принятой гипотезой.

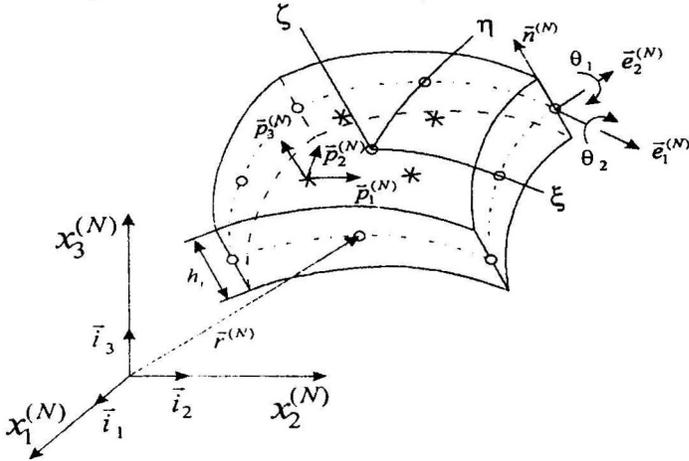


Рис. 1

Запишем в новых осях линейную и нелинейную деформации:

$$2\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial v'_i}{\partial x'^{(N)}_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'^{(N)}_i}, \quad 2\varepsilon''_{ij} = \frac{\partial v'_k}{\partial x'^{(N)}_i} \cdot \frac{\partial v'_k}{\partial x'^{(N)}_j}.$$

Здесь v'_1, v'_2, v'_3 — проекции вектора перемещений \vec{v} на орты $\vec{p}_1^{(N)}, \vec{p}_2^{(N)}, \vec{p}_3^{(N)}$, по индексам k идет суммирование. Связь между компонентами тензора деформации в системе координат $x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}$ и компонентами тензора деформации в криволинейной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \{\varepsilon'\} &= [R_1]\{\varepsilon\}, \quad \{\gamma'\} = [R_2]\{\gamma\} + [R_3]\{\varepsilon\}, \\ \{\varepsilon''\} &= [R_1]\{\varepsilon''\}, \quad \{\gamma''\} = ([R_2]\{\gamma''\} + [R_3]\{\varepsilon''\}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\gamma'\} = \begin{Bmatrix} \gamma'_{13} \\ \gamma'_{23} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon''\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon''_{11} \\ \varepsilon''_{22} \\ \varepsilon''_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\gamma''\} = \begin{Bmatrix} \gamma''_{13} \\ \gamma''_{23} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

матрицы $[R_i]$ определяются геометрией поверхности

Описанная схема вычисления деформаций предполагает численное интегрирование по всем трем направлениям. Для оболочек с большим количеством слоев это приводит к излишне трудоемкой расчетной схеме. Связано это с тем, что при различных механических характеристиках

слоев возникает необходимость вычисления подинтегральных выражений уравнения хотя бы в одной точке по толщине каждого слоя. Представляется целесообразным изначально разложить деформации в ряды по поперечной координате ζ с удержанием "классических слагаемых"

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \left(\{e\} + \frac{h}{2} \zeta \{x\} \right), \quad \{\gamma\} = \frac{h}{2} \{\gamma^0\}, \\ \{\varepsilon''\} &= \left(\{e''\} + \frac{h}{2} \zeta \{x''\} \right), \quad \{\gamma''\} = \frac{h}{2} \{\gamma^{0''}\}, \end{aligned} \quad (4)$$

а затем проинтегрировать по ζ аналитически.

В результате дискретизации исследуемой области с помощью КЭ появляются погрешности при вычислении деформаций. Для оболочек малой относительной толщины, у которых деформации поперечного сдвига невелики по сравнению с остальными, процесс дискретизации может привести к появлению ложных деформаций поперечного сдвига, значительно превышающих истинные (эффект сдвигового "запирания"). Для борьбы с потерей точности из-за этого эффекта используется метод двойной аппроксимации линейной части деформаций по точкам суперсходимости. Идея его состоит в следующем. В результате расчетов получена аппроксимация перемещений в КЭ. Используя соотношения Коши, строим аппроксимацию деформаций. Погрешность этой аппроксимации меняется от точки к точке. Известна методика определения точек суперсходимости, в которых величина погрешности минимальна. Используя значения деформаций в этих точках, строим новую аппроксимацию деформаций на элементе. Затем по этим дополнительно построенным аппроксимациям вычисляем матрицу жесткости, матрицу геометрической жесткости и вектор неуравновешенных сил.

Во второй главе разработана методика исследования изгиба пластин и оболочек с учетом больших перемещений и конечных деформаций. Она основана на пошаговом нагружении и использовании геометрии деформированного состояния в качестве отсчетной метрики. Построены разрешающие уравнения для слоистых оболочек из композиционных материалов в рамках кинематической гипотезы Тимошенко и в предположении малости напряжений обжатия. При переходе к следующему шагу нагружения осуществляется пересчет геометрии деформированного состояния и накопленных напряжений.

В первом параграфе записываются соотношения закона Гука для каждого слоя:

$$\{\Delta\sigma^{i,m}\} = [A^m] \{\varepsilon^i\}, \quad \{\Delta\tau^{i,m}\} = [B^m] \{\gamma^i\}, \quad (5)$$

$$\{\Delta\sigma^{m'}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11}^{m'} \\ \Delta\sigma_{22}^{m'} \\ \Delta\sigma_{12}^{m'} \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta\tau^{m'}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{13}^{m'} \\ \Delta\sigma_{23}^{m'} \end{Bmatrix},$$

где m - номер слоя.

Предполагается, что каждый слой является ортотропной оболочкой с осями ортотропии α, β , причем ψ - угол между осью ортотропии α и осью $x_1^{(N)}$.

Подставляем в вариационное уравнение (1) соотношения закона Гука (5), аппроксимации деформаций (4) и интегрируем по толщине. Второе слагаемое в левой части вариационного уравнения и последнее слагаемое его правой части содержат накопленные к N -ому шагу напряжения. Чтобы вычислить интегралы, содержащие эти напряжения, предполагаем, что в пределах слоя напряжения $\{\sigma_k^{(N)}\}$ изменяются по толщине по линейному закону, а напряжения $\{\tau_k^{(N)}\}$ - по квадратичному, как это принято в теории пластин и оболочек. Для получения закона распределения $\{\sigma_k^{(N)}\}$ используем значения напряжений в каждой квадратурной точке на межслойных поверхностях со стороны каждого слоя, а для $\{\tau_k^{(N)}\}$ еще и в средней точке каждого слоя.

В результате проведенного интегрирования, аналитического по толщине и численного по остальным двум координатам, и стыковки конечных элементов, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left([K] + [K_\sigma] \right) \{\Delta q^{(N)}\} = \{P^{(N)} + \Delta P^{(N)}\} - \{P_\sigma^{(N)}\}, \quad (6)$$

где $\{\Delta q^{(N)}\} = \{u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2\}$; u_1, u_2, u_3 - проекции вектора перемещений точек срединной поверхности на оси глобальной системы координат при переходе из N -го состояния в $(N+1) - e$; θ_1, θ_2 - углы поворота вектора нормали $\vec{n}^{(N)}$ относительно двух взаимно перпендикулярных векторов $\vec{e}_1^{(N)}$ и $\vec{e}_2^{(N)}$, которые с вектором $\vec{n}^{(N)}$ образуют правую тройку (рис.1); $[K]$ - матрица жесткости; $[K_\sigma]$ - матрица геометрической жесткости.

Решение системы осуществляется методом Холецкого, когда суммарная матрица жесткостей представляется в виде произведения двух треугольных матриц

$$[K] + [K_\sigma] = [L][L]^T, \quad (7)$$

в результате чего приходим к решению двух систем уравнений с треугольными матрицами:

$$\begin{cases} [L]\{X\} = \{P^{(N)} + \Delta P^{(N)}\} - \{P_{\sigma}^{(N)}\}, \\ [L]\{q\} = \{X\}. \end{cases} \quad (8)$$

В ходе решения системы уравнений (8) определяется геометрия деформированной поверхности и приращения напряжения на этом шаге нагружения.

Задачей второго параграфа второй главы является подготовка перехода к следующему шагу нагружения. Решение вариационного уравнения в предыдущем параграфе позволяет определить, насколько сместилась точка наблюдения $M^{(N)}$ в процессе деформирования. Пусть она занимает положение $M^{(N+1)}$. Прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными координатным плоскостям системы $x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}$ с началом в точке $M^{(N)}$ в результате нагружения деформируется, одна из его вершин переходит в точку $M^{(N+1)}$. Приращения напряжений, определенные после решения вариационного уравнения, действуют на искривленные площадки и представляют тензор Пиолы-Кирхгофа. Введем две новые декартовы системы координат с началом в точке $M^{(N+1)}$. Одна x_1^*, x_2^*, x_3^* с ортами $\bar{p}_1^{(N)}, \bar{p}_2^{(N)}, \bar{p}_3^{(N)}$ получена параллельным переносом старой системы $x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}$, другая $x_1^{(N+1)}, x_2^{(N+1)}, x_3^{(N+1)}$ с ортами $\bar{p}_1^{(N+1)}, \bar{p}_2^{(N+1)}, \bar{p}_3^{(N+1)}$ поворотом новой системы координат относительно точки $M^{(N+1)}$ до совпадения оси $x_3^{(N+1)}$ с нормалью к деформированной поверхности. Вырежем элементарные параллелепипеды с ребрами, параллельными осям каждой из двух новых систем координат. Напряжения, действующие на грани этих параллелепипедов, представляют собой тензоры Коши. В итоге имеем три параллелепипеда, имеющих общую вершину $M^{(N+1)}$ - искривленный, на который действуют напряжения Пиолы-Кирхгофа, и два прямоугольных, связанных с новыми системами координат, к которым приложены напряжения тензора Коши. Очевидно, пересчет напряжений, действующих на площадки искривленного параллелепипеда (тензор Пиолы-Кирхгофа) к площадкам прямоугольного параллелепипеда, связанного с системой координат $x_1^{(N+1)}, x_2^{(N+1)}, x_3^{(N+1)}$ (тензор Коши), осуществляется в два приема по следующим формулам

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial x_m^*}{\partial x_j^{(N)}} \frac{\partial x_n^*}{\partial x_s^{(N)}} (\sigma_{js}^{(N)} + \Delta \sigma_{js}), \quad (9)$$

$$\sigma_{js}^{(N+1)} = \sum_{m,n} (\vec{p}_j^{(N+1)} \cdot \vec{P}_m^{(N)}) (\vec{P}_s^{(N+1)} \cdot \vec{P}_n^{(N)}) \sigma_{mn},$$

где $\Delta\sigma_{js}$ - приращения напряжений (тензор Пиолы-Кирхгофа); σ_{mn} - напряжения, действующие на грани прямоугольного параллелепипеда, связанного с системой координат x_1^*, x_2^*, x_3^* ; $\sigma_{js}^{(N+1)}$ - искомый тензор напряжений Коши, отнесенный к параллелепипеду в системе координат $x_1^{(N+1)}, x_2^{(N+1)}, x_3^{(N+1)}$.

Описанный выше КЭ произвольной оболочки, лежит в основе созданного пакета программ на языке Fortran 77 для транслятора Ms. Power Station 4.0 в среде Windows 95, предназначенного для расчета пространственных оболочечных конструкций сложной геометрии с учетом геометрической нелинейности. Описание пакета программ находится в третьем параграфе второй главы. Пакет имеет модульную структуру, каждый из модулей выполняет законченный цикл вычислений. В зависимости от поставленной задачи собирается необходимый пакет этих модулей, которые циклически включаются в работу.

В третьей главе рассмотрена серия задач, решенных изложенным в предыдущих главах методом. В первом параграфе проводится тестирование пакета программ, реализующих построенный алгоритм решения нелинейных задач деформирования однородных и слоистых анизотропных оболочек. Решены следующие задачи. Изгиб консольной изотропной полосы в цилиндрическую оболочку с помощью изгибающего момента, приложенного к свободному краю. Получено хорошее совпадение с теоретическим решением, приведенным в монографии А.И. Лурье "Нелинейная теория упругости". При 300 шагах нагружения различие в значениях перемещений свободного конца не превышает 3.5%. На рис. 2 приведен процесс деформирования полосы.

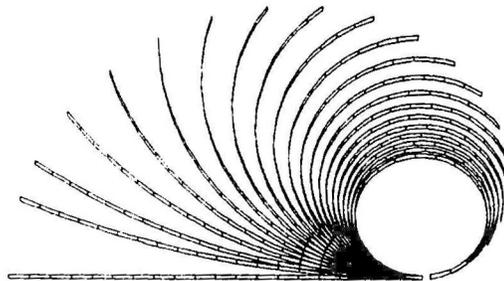


Рис.2

Исследуется изгиб жестко заземленных по торцам изотропной и ортотропной (однослойной и слоистой с различным армированием слоев) цилиндрических оболочек под внутренним давлением. Отмечено хорошее совпадение кривых "нагрузка-прогиб" с полученными в работах Kant T., Menon M., Chang T., Chao W.

Рассмотрена деформация трехслойного однополостного гиперблоида с ортотропными слоями одинаковой толщины из одного материала, но при разных углах армирования. В его наименьшем сечении приложена самоуравновешенная система 4-х сил. На рис.3 изображена 1/8 часть гиперблоида. На рис.4 а) приведены кривые "нагрузка-прогиб" в указанных точках при следующих параметрах задачи. Радиус большего сечения 15 м, меньшего - 7.5 м; толщина пакета 0.04 м; высота гиперблоида 40 м; $E_a = 40 \cdot 10^6$ кН/м²; $E_b = 10^6$ кН/м²; модули сдвига одинаковы, причем $G = 0.6 \cdot 10^6$ кН/м²; коэффициент Пуассона $\nu_{ab} = 0.25$. Во внешних слоях

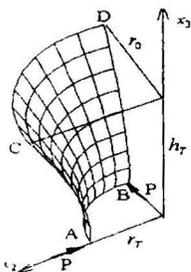
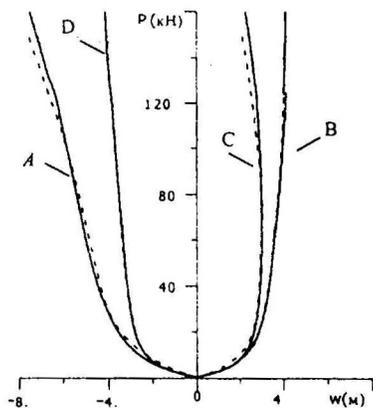
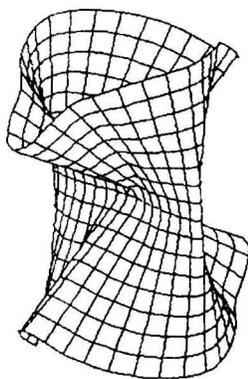


Рис.3

большой модуль упругости в направлении оси вращения, во внутреннем слое, наоборот, в окружном. Сплошной линией обозначены кривые, полученные в диссертации, пунктирной - взятые из работ Basar Y., Ding Y., Schultz R. На рис.4 б) изображена изогнутая поверхность гиперблоида.



а)



б)

Рис.4

Изгиб слоистой полусферы с отверстием в окрестности полюса под действием аналогичной самоуравновешенной системы сил, приложенной

к экваториальному сечению. Сравнение с кривой, построенной в работе Basar Y и др., показывает вполне удовлетворительное соответствие результатов.

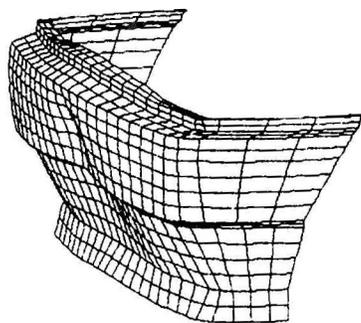


Рис.5

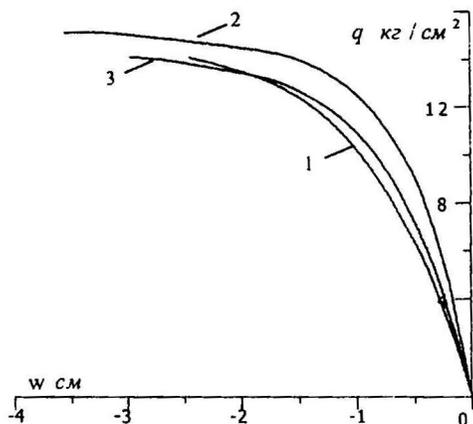


Рис.6

Во втором параграфе решается новая задача - исследуется нелинейный изгиб бампера переднеприводного легкового автомобиля под действием равномерно распределенной по площадке поперечной нагрузки. Бампер крепится к автомобилю в шести точках, расположенных в двух параллельных плоскостях. Площадка нагружения располагается в центре бампера или несколько смещена к краю. Материал бампера считался либо изотропным, либо ортотропным. Поскольку бампер имеет довольно сложную форму, он разбивается на 8 подконструкций. Строятся кривые "нагрузка-прогиб" для шести различных точек бампера, находящихся в центре площадки нагружения, или вблизи ее, или на периферии. Размеры бампера и его механические характеристики приведены в диссертации. На рис.5 приведена изогнутая поверхность симметрично нагруженного бампера, на рис. 6 - кривые "нагрузка-прогиб" в центре площадки нагружения для трех вариантов материала: кривая 1 - ортотропия при большем модуле упругости в направлении большего размера бампера, кривая 2 - ортотропия при большем модуле упругости в направлении меньшего размера бампера, кривая 3 - изотропный материал. Меньшие прогибы при одной нагрузке имеют место в случае 2.

В четвертой главе исследуется закритическая деформация оболочки. В первом параграфе рассматриваются виды потери устойчивости, вводится понятие предельных точек и точек бифуркации. В диссертации рассматривается класс оболочек, имеющих только предельные точки.

Во втором параграфе изложены различные методы непрерывного и дискретного продолжения по параметру. Выбирается метод, наиболее удачно сочетающийся с МКЭ.

В третьем параграфе предлагается вариант метода продолжения по параметру, позволяющий построить решение с приемлемой точностью, не используя итерационного процесса на каждом шаге нагружения. В предыдущих главах приращение нагрузки на каждом шаге задавалось произвольно, чаще всего шаги нагружения были одинаковыми. Это позволяло приблизиться к верхней предельной нагрузке, но не давало возможности перейти в закритическую область. С этой проблемой сталкивались многие исследователи, и по-разному преодолевали ее. Наиболее продуктивным оказался метод продолжения по параметру. В диссертации используются один из вариантов этого метода. Изложим суть его на одномерной задаче. При приближении к предельной точке, чтобы не проскочить ее, необходимо уменьшать величину приращения нагрузки, а после прохождения этой точки приращение нагрузки вообще становится отрицательным. Не зная заранее, где находится предельная точка, нужно научиться управлять приращением нагрузки с помощью некоторого параметра задачи.

Процедура метода пошагового нагружения в сочетании с МКЭ линеаризует задачу и сводит ее к системе линейных алгебраических уравнений вида (6). Считаем построенной часть кривой "нагрузка-прогиб" до точки $A^{(N)}$, например методом, изложенным в предыдущих главах. Очевидно, известны и точки кривой, определенные на предыдущих шагах нагружения $A^{(N-2)}$, $A^{(N-1)}$. Строим хорду известной части кривой $A^{(N-1)}A^{(N)}$ и продолжаем ее в результате чего получаем вектор $A^{(N)}B^{(N)}$, длину которого обозначим $\lambda^{(N)}$. Из точки $B^{(N)}$ проводим вектор $B^{(N)}A^{(N+1)}$, перпендикулярный вектору $A^{(N)}B^{(N)}$ (Рис. 7). Здесь $A^{(N+1)}$ - неизвестная пока точка искомой кривой. Условие перпендикулярности векторов $A^{(N)}B^{(N)}$ и $B^{(N)}A^{(N+1)}$ дает уравнение, которое вместе с уравнением (6) позволяет определить приращение нагрузки на данном шаге и координаты искомой точки кривой в зависимости от параметра $\lambda^{(N)}$. Пусть $\lambda^{(N)} = \lambda \cos^2 \varphi^{(N)}$, где λ - наперед заданное число, характеризующее оптимальное приращение нагрузки вдали от предельной точки, $\varphi^{(N)}$ - угол между хордами $A^{(N-2)}A^{(N-1)}$ и $A^{(N)}B^{(N)}$. Если угол $\varphi^{(N)}$ мал, то есть кривизна кривой "нагрузка-прогиб" меняется мало, $\lambda^{(N)}$ незначительно отличается от λ . При подходе к предельной точке угол $\varphi^{(N)}$ рас-

тет, уменьшая значение $\lambda^{(N)}$. Вместе с этим параметром уменьшается приращение нагрузки, что позволяет пройти верхнюю предельную точку, и, двигаясь по нисходящей части кривой, перейти через нижнюю предельную точку с выходом на устойчивую часть кривой "нагрузка-прогиб". В диссертации реализуется вышеописанная идея для многомерного случая.

В четвертом параграфе решается задача изгиба изотропной цилиндрической панели под действием сосредоточенной силы, приложенной в ее центре. Прямолинейные края панели шарнирно оперты, криволинейные – свободны. Кривая "нагрузка-прогиб" приведена на рис. 7. Сплошная линия соответствует кривой, полученной в диссертации, пунктирной – результат, полученный в работе Surana K.; пунктиром с одной точкой изображены результаты Sabir A.B., Lock A.C.; пунктирная линия с двумя точками соответствует кривой из работы Bergan P., Nygard M., Vjaerum R.

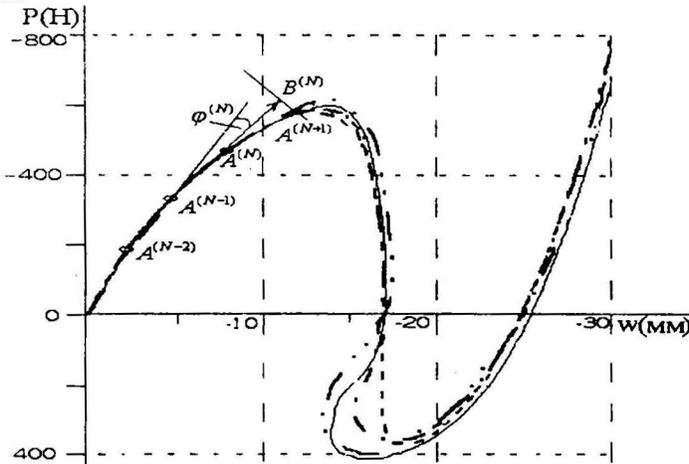


Рис.7

Этой задачей демонстрируется эффективность предложенной в диссертации методики определения критического состояния. Удалось получить участок, где наблюдается одновременное уменьшение нагрузки и прогиба (рис. 7). Он известен в литературе под названием "kick-ins" и является пробным камнем для всех подобных методик. Например, смена на ниспадающей ветви диаграммы параметра (вместо приращения нагрузки используется приращение прогиба), предпринятая в работе Surana K. (пунктирная линия), не улавливает отмеченный эффект.

Отметим, что при большей в два раза относительной толщине панели эффект "kick-ins" не проявляется, причем наблюдается хорошее совпадение результатов, полученных в диссертации и работах Скворцова Ю.В., Хазанова Х.С.(1990 г.); Голдманиса М.В., Тетерса Г.А. (1989 г.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

1. Разработана методика исследования изгиба пластин и оболочек с учетом больших перемещений и конечных деформаций. Она основана на пошаговом нагружении и использовании текущей геометрии в качестве отсчетной метрики. Показано, что для исключения накопления погрешности при линеаризации задачи на каждом этапе нагружения необходимо сохранять в уравнении равновесия относительно приращения перемещений невязку от неуравновешенности предшествующего состояния.
2. При определении очередного напряженного состояния, которое описывается в компонентах тензора напряжений Коши относительно площадок, расположенных в координатных плоскостях локальной декартовой системы координат, необходимо выполнять два этапа вычислений. На первом по приращениям напряжений Пиолы-Кирхгофа вычисляются компоненты тензора напряжений Коши относительно исходного базиса, на втором производится пересчет к новому базису следующего состояния равновесия.
3. Построены разрешающие уравнения для слоистых оболочек из композиционных материалов в рамках кинематической гипотезы Тимошенко и предположении о малости напряжений обжатия. Напряжения по толщине распределяются в соответствии с механическими характеристиками каждого слоя: мембранные и изгибные напряжения - линейны в пределах слоя, напряжения поперечного сдвига - квадратичные и непрерывные на межслойных поверхностях. Информация о напряженном состоянии оболочки в процессе всего нагружения хранится в виде их узловых значений на межслойных поверхностях, а в случае необходимости в точках срединных поверхностей слоев.
4. Для исследования закритических состояний разработана методика прохождения критических точек на диаграмме "нагрузка-прогиб" на основе метода продолжения по параметру. В качестве этого параметра используется длина отрезка касательной. При надлежащем выборе величины параметра решение получается без итераций на шаге нагружения и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с

матрицей, являющейся суммой матриц жесткости и геометрической жесткости.

5. Разработан алгоритм и создан пакет программ на языке Fortran 77 для транслятора Ms. Power Station 4.0 в среде Windows 95, позволяющие решать задачи указанного класса. Пакет имеет модульную структуру, каждый из модулей выполняет законченный цикл вычислений. В зависимости от поставленной задачи собирается необходимый пакет этих модулей, которые циклически включаются в работу.

6. Приведенные решения задач демонстрируют работоспособность пакета и возможность достижения заданной точности расчетов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. Гурьянова О.Н. Напряженно – деформированное состояние трехслойных пластин с анизотропными несущими слоями // Труды Международной научно – технической конференции “ Молодая наука – новому тысячелетию “. – Набережные Челны. – Ч. 1. – 1996. – С. 50 – 51.
2. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Изгиб трехслойной круглой пластины с ортотропными несущими слоями // Труды II Республиканской научной конференции молодых ученых и специалистов. – Казань. – Кн. 4. – 1996. – С. 28.
3. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. МКЭ в геометрически нелинейных задачах деформирования слоистых анизотропных оболочек // Тезисы доклада на VII Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением“. – Казань. – 1997. – С. 134.
4. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование нелинейного деформирования слоистых оболочек произвольной геометрии МКЭ // Труды XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин. – Саратов. - 1997. – Т. 3. – С. 44 – 48.
5. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Расчет тонкостенных оболочек с учетом больших перемещений методом конечных элементов // Труды VIII Межвузовской конференции “ Математическое моделирование и краевые задачи “. – Самара. – 1998. – Ч. 1. – С. 41 – 43.
6. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Построение разрешающих матриц в шаговой схеме решения геометрически нелинейных задач для слоистых оболочек МКЭ // Труды Международной конференции “Актуальные проблемы механики оболочек“. – Казань. – 1998. – С.47–52.
7. Гурьянова О.Н. Большие прогибы консольной полосы под действием изгибающего момента // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. – Казань. - 1998 – С.99-101.

8. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование больших прогибов слоистых оболочек МКЭ //Труды VII Международной конференции "Математика. Экономика. Экология. Образование". – Ростов-на-Дону. – 1999. - С. 142-143.
9. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. МКЭ в исследовании больших прогибов слоистых оболочек //Тезисы докладов V Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и слоистых сред". – Москва. - 1999. – С.30.
10. Голованов А.И., Гуриелидзе М.Г., Гурьянова О.Н. Расчет однородных и слоистых оболочечных конструкций с учетом больших перемещений МКЭ //Сб. докладов XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. –Нижний Новгород. – 1999. – С. 45-48.
11. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Расчет слоистых конструкций МКЭ в геометрически нелинейной постановке // Тезисы докладов на Международной научно – технической конференции "Технико - экономические проблемы промышленного производства". – Набережные Челны. – 2000 – С. 46-47.
12. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование МКЭ закритической деформации слоистых оболочек // Тезисы докладов VI Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и слоистых сред". – Москва. - 2000 –С.32.
13. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование геометрически нелинейного деформирования произвольных многослойных оболочек малой и средней толщин МКЭ // Известия вузов: Авиационная техника. – Казань. – 2000. - № 2. –С.5-8.



Подписано в печать 10.05.2000 г. Формат 60x90 1/16 Усл. печ. л. 1,2

Заказ 95

Тираж 100

Отпечатано на ризографе в ООО «Варма»
Адрес: г. Казань, ул. Айдарова, 25

200