КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ГАЙСИН ТАГИР ИЛЬШАТОВИЧ

КОМПЛЕКСЫ ФОРМ НА МНОГООБРАЗИЯХ НАД АЛГЕБРАМИ И СЛОЕНИЯХ

(01. 01. 04. - геометрия и топология)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2000

Работа выполнена на кафедре геометрии Казанского государственного университета.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Малахальцев М. А.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Игошин В.А.
кандидат физико-математических наук, доцент
Антонова А.В.

Ведущая организация — Московский государственный университет.

Защита состоится "25" 05 2000 г. в 14 часов на заседании диссертационного Совета по математике К 053.29.05 Казанского государственного университета по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, аудитория 217.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке университета / Казань, ул. Кремлевская, 18 /.

Автореферат разослан "18" 04 2000 г

Ученый секретарь
диссертационного Совета
профессор

/Шурыгин В.В./

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Естественность и плодотворность изучения многообразий над алгебрами, была подтверждена работами многих математиков. Родоначальником данного направления стал А.П. Котельников [4]. В этой области работал немецкий математик Штуди. П.А. Широков с учениками В.Г. Коппом и П.И. Петровым продолжили исследования многообразий над алгебрами. Естественные связи с локальными алгебрами возникают в дифференциальной геометрии высшего порядка, как было показано В.В. Вагнером [1], в данной области также работали А. Вейль и А. Моримото.

Многие работы А.П. Нордена посвящены изучению многообразий со структурами, связанными с алгебрами. Ученики А.П. Нордена: В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин, Э.Г. Нейфельд и другие глубоко развили данное направление. В работах этих геометров установлена тесная связь между структурами многообразий над локальными алгебрами и касательными структурами высших порядков. В.В. Вишневским введены и изучены новые классы структур, названные полукасательными, подробно изучены полиаффинорные структуры, возникающие на многообразиях над алгеброй. Геометрия расслоения струй с помощью теории многообразий над алгебрами изучались в работах А.П. Широкова [10] и В.В. Шурыгина [12]. В.В. Шурыгиным построена теория когомологий пучков на многообразиях над алгебрами [11] и указаны ее применения.

Необходимо сказать, что с теорией многообразий над алгебрами непосредственно связаны исследования многих математиков, отметим здесь лишь Г.И. Кручковича, Б.А. Розенфельда.

Поскольку на многообразии над локальной алгеброй естественно задается слоение, называемое каноническим, аппарат теории слоений используется в теории многообразий над алгебрами. Результаты о канонических слоениях на многообразиях над локальной алгеброй были получены М.А. Малахальцевым [7], В.В. Шурыгиным [11].

Теория слоений, ведущая свое начало с работ Ж.Риба и Ш.Эресмана, в настоящее время представляет собой развитую область, в которой получено много глубоких результатов. Имеется ряд монографий и обзоров, посвященных различным аспектам теории слоений, например [14]. Важные результаты в теории слоений принадлежат С.П.Новикову. Слоения активно изучались нижегородскими геометрами, отметим работы Я.Л. Шапиро [9], В.А. Игошина [5], Н.И.Жуковой [6].

Каноническое слоение многообразия над локальной алгеброй несет слоевую (X, G)-структуру [12]. В частности, для многообразия над алгеброй дуальных чисел каноническое слоение является аффинным. В работе И.Вайсмана [15] рассматривается пучок функций аффинных вдоль слоев, и пучки аффинных форм, то есть форм, компоненты которых лежат в пучке функций аффинных вдоль слоев. Показано, что морфизм аффинных слоений индуцирует морфизм пучков, а группы когомологий с коэффициентами в пучке аффинных форм являются глобальными инвариантами аффинного слоения. Кольцо аффинных функций аффинного слоения на двумерном торе изучается в работе Т.Инабы и К.Масуды [13].

Цель работы состоит в изучение комплексов форм на многообразиях над локальными алгебрами и многообразиях со слоениями, естественно определяемых на таких многообразиях.

Метод исследования. Исследование проводится методами дифференциальной топологии, теории слоений и гомологической алгебры.

Научная новизна и основные результаты диссертации. Основные результаты, полученные в работе, являются новыми. Приведем из них следующие:

1) Построен P-комплекс Спенсера для структуры многообразия над локальной алгеброй, и найдена связь этого комплекса с комплексами Вайсмана-Молино.

2) Найден вид глобальных $\mathbb{R}(\epsilon)$-дифференцируемых форм на компактном одномерном многообразии над $\mathbb{R}(\epsilon)$. Вычислены когомологии комплекса $\mathbb{R}(\epsilon)$-дифференцируемых форм на таком многообразии.

3) Для проектируемого отображения f компактного многообразия со слоением такого, что на компактных в индуцированной топологии слоях слоения ранг f строго меньше коразмерности слоения, доказано, что ранг f во всех точках многообразия меньше коразмерности слоения. Для слоений коразмерности один на компактном многообразии, число компактных слоев которого не более чем счетно, доказано, что все глобальные базовые функции постоянны, а размерность пространства глобальных базовых 1-форм ограничена размерностью первой группы когомологий комплекса де Рама данного многообразия.

4) Доказано, что не существует $\mathbb{A}$-дифференцируемого погружения компактного многообразия над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ в свободный $\mathbb{A}$-модуль произвольной размерности. Для одномерного многообразия $\mathbb{M}$ над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ доказано, что вещественные части глобальных $\mathbb{A}$-дифференцируемых функций постоянны, а пространство вещественных частей глобальных $\mathbb{A}$-дифференцируемых 1-форм конечномерно, и его размерность ограничена размерностью первой группы когомологий комплекса де Рама $\mathbb{A}$-значных форм многообразия $\mathbb{M}$.

Теоретическое значение. Диссертация носит теоретический характер. Материалы диссертации могут войти в содержание спецкурсов по этой тематике.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

1) Международный геометрический семинар им. Н. И. Лобачевского «Современная геометрия и теория физических полей», Казань, 4-6 февраля 1997 г.

2) Международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга-11», Казань, 5-16 июля 1999 г.

3) Школа-конференция, посвященная 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 13-18 сентября 1999 г.

4) Международная конференция «Геометризация физики-4», Казань, 4-8 октября 1999 г.

5) Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики», Москва, 25-30 октября 1999 г.

6) Научный семинар кафедры геометрии КГУ под руководством Б. Н. Шапукова (1999 г.).

7) Итоговые научные конференции Казанского университета (1996, 1997, 1999 гг.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 6 публикациях. Работы выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, включающих в себя 13 параграфов, и списка литературы, содержащего 99 работ. Объем диссертации 80 страниц. Нумерация лемм и теорем в главах изолирована. Нумерация формул сквозная.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ.

Введение диссертации содержит историю вопроса, в нем формулируются цели и задачи работы. Приводится краткое содержание диссертации.

Первая глава содержит сведения из теории пространств над алгебрами, теории расслоений струй, гомологической алгебры, используемые в диссертации. Там же, в качестве примера, строится P-комплекс Спенсера для дифференциального оператора, задающего условие дифференцируемости над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ для функций со значениями в $\mathbb{A}$. Построенный комплекс изоморфен изученному в [12] комплексу дифференциальных форм на многообразии над алгеброй.

Во второй главе, состоящей из двух параграфов, строится дифференциальный оператор первого порядка, ассоциированный с G-структурой, определяемой структурой многообразия над локальной алгеброй $\mathbb{A}$. Вычисляются продолжения этого дифференциального оператора и для него строится P-комплекс Спенсера (F_*, D_*), называемый комплексом Спенсера многообразия над алгеброй. Доказано, что этот комплекс локально изоморфен прямой сумме комплексов $\mathbb{A}$-значных дифференциальных форм, построенных в [11]. Доказано, что оператор D_* в комплексе Спенсера (F_*, D_*) совпадает с оператором, индуцированным внешним дифференциалом.

Третья глава называется «Базовые функции канонического слоения многообразия над алгеброй» и содержит пять параграфов.

Цель данной главы состоит в описании алгебры $\mathbb{A}$-дифференцируемых функций на компактных многообразиях над коммутативной ассоциативной локальной алгеброй $\mathbb{A}$ с единицей.

В девятом параграфе показано, что для произвольного многообразия $\mathbb{M}$ над алгеброй $\mathbb{A}$ группа когомологий $\mathbb{H}^1_{\mathbb{A}}(\mathbb{M})$ комплекса

$\mathbb{A}$-дифференцируемых форм вкладывается в группу когомологий де Рама $\mathbb{A} \otimes \mathbb{H}^1(\mathbb{M})$.

В десятом и одинадцатом параграфах рассматривается структура многообразия над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{R}(\epsilon)$ на двумерном торе, каноническое слоение которой ориентируемо. Найден вид $\mathbb{R}(\epsilon)$-дифференцируемых функций и 1-форм, рассуждения опираются на доказанный в работе результат о последовательности диффеоморфизмов окружности, являющийся следствием теоремы Егорова. Вычисляется первая группа когомологий $\mathbb{H}^1_{\mathbb{R}(\epsilon)}(\mathbb{T}^2)$ комплекса $\mathbb{R}(\epsilon)$-дифференцируемых форм.

В двенадцатом параграфе получена оценка на ранг проектируемого отображения f, определенного на компактном многообразии со структурой слоения, удовлетворяющего дополнительному условию: на компактных в индуцированной топологии слоях слоения ранг данного отображения f должен быть строго меньше коразмерности слоения. Это позволило доказать невозможность голоморфного погружения компактного многообразия над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ в свободный модуль над $\mathbb{A}$ произвольной размерности. Также, для одномерного многообразия $\mathbb{M}$ над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ доказано, что вещественные части глобальных $\mathbb{A}$-дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{M}$, постоянны, а пространство вещественных частей глобальных $\mathbb{A}$-дифференцируемых 1-форм (продолжимые базовые 1-формы) конечномерно. Более того, доказано, что размерность пространства вещественных частей глобальных $\mathbb{A}$-дифференцируемых 1-форм, определенных на $\mathbb{M}$, ограничена размерностью первой группы когомологий комплекса де Рама $\mathbb{A}$-значных форм данного многообразия $\mathbb{M}$.

В тринадцатом параграфе определены некоторые естественные целочисленные инварианты слоений, и для слоений на компактных многообразиях, число компактных в индуцированной топологии слоев которых не более чем счетно, получена оценка этих инвариантов.

Перечислим наиболее важные результаты из главы III.

Лемма 2. (следствие теоремы Егорова) Пусть дана последовательность $\{f_k\}$ диффеоморфизмов окружности $\mathbf{S}^1$, сохраняющих ориентацию. Тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(F_i)'|_x},$$

где $F_i = f_1 \circ \ldots \circ f_i$, расходится почти всюду.

Теорема 4. Пусть η есть $\mathbb{R}(\epsilon)$-дифференцируемая форма на двумерном торе со структурой многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(\epsilon)$, каноническое слоение которой допускает замкнутую трансверсаль. Тогда ее вещественная часть не обращается в нуль ни в одной точке или тождественно равна нулю.

Пусть $\mathbf{A}$ — локальная алгебра, и в $\mathbf{A}$ выбран вещественный базис $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ со следующими свойствами: $e_0 = 1 \in \mathbf{A}$, $(e_1)^S = 0$, $(e_k)^S = 0$ для некоторого натурального S, где $k = 2, .., n-1$, и $\{e_k\}$ — вещественный базис некоторого идеала.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{M}$ — многообразие над алгеброй $\mathbf{A}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{A} = n$, $\dim_{\mathbf{A}} \mathbf{M} = m$. Тогда на компактных в индуцированной топологии слоях естественного слоения, порожденного структурой алгебры $\mathbf{A}$:

1) вещественная часть функции, дифференцируемой над алгеброй $\mathbf{A}$, имеет нулевой дифференциал;

2) компонента $\mathbf{A}$-дифференцируемой функции при e_1 постоянна.

Доказана теорема о проектируемых отображениях слоений на компактных многообразиях, из которой вытекают:

Следствие 3. Пусть $\mathbb{M}$ — компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности 1. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то все базовые функции на $\mathbb{M}$ постоянны. Кроме того,

$$\dim \Omega^1_B \leq \dim \mathbb{H}^1(\mathbb{M}),$$

где Ω^1_B — пространство базовых 1-форм.

Следствие 4. Пусть $\mathbf{M}$ — связное компактное одномерное многообразие над $\mathbf{A}$. Тогда:

1) вещественная часть функции, дифференцируемой над алгеброй $\mathbf{A}$, есть константа;

2) компонента $\mathbf{A}$-дифференцируемой функции при e_1 постоянна на слоях естественного слоения, порожденного структурой алгебры $\mathbf{A}$.

Следствие 5. Пусть $\mathbf{M}$ — компактное одномерное многообразие над $\mathbf{A}$.

Тогда пространство вещественнозначных базовых 1-форм, $\Omega^1_{\mathbf{A}_\mathbb{R}}$, допускающих дифференцируемое над алгеброй $\mathbf{A}$ продолжение, конечномерно и

$$\dim \Omega^1_{\mathbf{A}_\mathbb{R}} \leq \dim \mathbf{A} \otimes \mathbb{H}^1(\mathbb{M}).$$

Следствие 8. $\mathbb{M}$ — компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности q, $\mathbb{N}$ — многообразие произвольной размерности. Пусть отображение $g : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ является проектируемым, то есть постоянным на слоях, и удовлетворяет условию: $rank\{d(g)\}|_L < q$ для любого компактного в индуцированной топологии слоя L. Тогда $rank\{d(g)\} < q$ в каждой точке из $\mathbb{M}$.

Следствие 9. Пусть $\mathbf{M}$ — компактное многообразие со структурой слоения коразмерности q. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то любое проектируемое отображение $g : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^q$ имеет образ меры нуль и $rank\{d(g)\} < q$ в каждой точке из $\mathbb{M}$.

Следствие 10. Пусть $\mathbb{M}$ — компактное многообразие со структурой слоения коразмерности q, $\mathbb{N}$ — многообразие произвольной размерности. Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения на $\mathbb{M}$ не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то любое проектируемое отображение $g : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ имеет $rank\{d(g)\} < q$ в каждой точке из $\mathbb{M}$.

Следствие 12. Пусть $\mathbb{M}$ — компактное многообразие над $\mathbb{A}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A} = n$, $\dim_{\mathbb{A}} \mathbb{M} = q$.

Тогда для функции $f : \mathbb{M} \to \mathbb{A}^q$ дифференцируемой над алгеброй $\mathbb{A}$, образ ее вещественной части имеет меру нуль. Из чего, в свою очередь, следует, что не существует $\mathbb{A}$-дифференцируемого погружения многообразия $\mathbb{M}$ в произвольный свободный модуль $\mathbb{A}^m$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту М. А. Малахальцеву за постановку задачи.

Литература

[1] Вагнер В. В. *Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков.* // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. – 1956. – – Вып. 10. – МГУ – С.31—88.

[2] Вишневский В. В. *Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры.* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. / ВИНИТИ. – М. – 1988. – Т.20. – С.35—74.

[3] Вишневский В.В, Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1985.

[4] Котельников А. П. *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике.* // Казань, 1899.

[5] Игошин В. А. *Теорема разложения для двуслоений совместимых с пульверизацией.* // Мат. заметки. – 1980. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 923 – 934.

[6] Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев.* // Известия вузов. Математика. – 1994. – №2. – С. 79–81.

[7] Малахальцев М.А. *Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе.* // Тр.геом. семинара. – Вып. 22. – 1994. – Казань. – С. 47—62.

[8] Ж.Поммаре *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли.* – М.: Мир, 1983.

[9] Шапиро Я. Л., Игошин В. А. *Стабильность слоев слооения с совместимой с ним метрикой.* // Мат. заметки. – 1980. – Т. 27. – Вып. 5. – С. 767–778.

[10] Широков А. П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами.* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1981. – Т. 12. – С.61—96.

[11] Шурыгин В.В. *О когомологиях многообразий над локальными алгебрами.* // Изв. вузов. – 1996. – №9. – С.71–85.

[12] Шурыгин В.В. *Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй.*// УМН. – 1993. – Т.48. – Вып.2. – С.75–106.

[13] Inaba, T., Masuda, K. *Tangentially affine foliations and leafwise affine functions on the torus*// Kodai Math. J. – 1993. – V. 16. – No 1. – C.32–43.

[14] Molino P. *Riemannian foliations* – Birkhäuser, 1988.

[15] Vaisman I. *d_f -cohomologies of Lagrangian foliations* // Manatschefte fur Mat. – 1988 – V.106. – C.221-244.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гайсин Т.И. Комплекс Спенсера для многообразий над алгебрами. // Труды геометрического семинара. – 1997. – Выпуск 23. – Казань: Издательство Казанского математического общества, – 260 с. – С. 33–41.

2. Гайсин Т.И. Базовые функции канонического слоения многообразия над алгеброй./ Казан. ун-т. – Казань, 1999. – 19 с. Деп. в ВИНИТИ. 04.06.99, N1784-В 99.

3. Гайсин Т.И. Проектируемые отображения слоений. // 11 Петровские чтения-1999. Международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. «Волга-11». Казань, Республика Татарстан, 5-16 июля 1999 г. Тезисы докл. – Изд-во "Хэтер" – Казань, 1999. – 88 с. – С.17.

4. Гайсин Т.И. Дуальная структура на торе. // «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы.» Материалы Всеросийской школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. г. Казань: Изд-во "Казанское математическое общесво" Изд-во ДАС. — 1999. — 265 с. — С.63.

5. Гайсин Т.И. Формы дифференцируемые над алгеброй дуальных чисел на торе. // Труды международной конференции «Геометризация физики-4». Казань 4-8 октября 1999 г. – С.63—68.

6. Гайсин Т.И. Материалы международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики». г. Москва, 25-30 октября 1999 г. – Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ – Москва, 1999. – 62 с. – С.11.

Гайсин

Подписано в печать 17.04.2000 г.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательском комплексе
Управления международных связей КГУ

2-00