На правах рукописи

Заикина Светлана Михайловна

ОБОБЩЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета

Научный руководитель:	**Репин Олег Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО СамГТУ
Официальные оппоненты:	**Денисов Василий Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова **Логинов Борис Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО УлГТУ
Ведущая организация:	Федеральное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Орловский государственный университет

Защита состоится «18» июня 2015 года в часов минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд.610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан « » 2015 года и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д.212.081.10,
к.ф.-м.н., доцент — Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исторические сведения. Интегральные преобразования появились впервые в начале XIX века в трудах Фурье, Лапласа, Пуассона, Коши. В последние десятилетия резко возрос интерес к теории интегральных преобразований, так как интегральные преобразования применяются в прикладных задачах физики, механики и других естественных науках. Они являются одним из наиболее эффективных и широко используемых аналитических методов решения различных практических задач.

Многие задачи математической физики, астрофизики, термодинамики, механики и других естественных наук приводят к необходимости применения теории интегральных преобразований. Разработкой теории интегральных преобразований занимались Г. Бейтмен, В.А. Диткин, П.П. Забрейко, А.А. Килбас, А.П. Прудников, С.М. Ситник, А. Эрдейи, M. Saigo, I.N. Sneddon, H.M. Srivastava, O. Yurekli, L. Debnath, C.J. Tranter и многие другие. Часто решения дифференциальных уравнений в частных производных, обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений удобно получить, применяя метод интегральных преобразований. Он помог решить много новых сложных задач, которые до этого времени считались неразрешимыми. Метод интегральных преобразований обладает доступной, простой, стройной схемой применения.

Преимущества метода интегральных преобразований заключаются в том, что он даёт возможность

1. сведения сложных задач к менее сложным; (Например, решения дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка сводятся к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений; а решения обыкновенных дифференциальных уравнений сводятся к решениям алгебраических уравнений.)

2. получения окончательного результата в явном виде.(Для этого необходимо иметь формулы обращения для интегральных преобразований. Для рассмотренных нами интегральных преобразований получены формулы обращения, которые в дальнейшем применяются для нахождения решений поставленных задач в явном виде.)

Метод интегрального преобразования Лапласа удобен также при решении систем, состоящих из вышеперечисленных типов уравнений. Он позволяет решать большой круг задач нестационарной теплопроводности.

Начиная с 70-х годов XX века решение различных прикладных задач привело к представлению их решений в виде интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах. Изучение интегральных уравнений первого рода и так называемых парных, тройных, N-арных интегральных уравнений, которые часто встречаются в приложениях, приводит к необходимости рассматривать интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах. Эти вопросы рассмотрены в работах Вирченко Н.А., Килбаса А.А., Маричева О.И., Самко С.Г., Уфлянда Я.Г.. Равенства Парсеваля-Гольдштейна дают возможность широкого применения новых интегральных преобразований в прикладном математическом анализе, математической физике и других областях науки. Развитие теории интегральных преобразований имеет и большое перспективное значение.

Интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах позволяют решать интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма, содержащие в ядре специальные функции, которые другими методами решить не удаётся.

Решение многих задач математической физики, электротехники, радиотехники, теории вероятностей и математической статистики, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории аэромеханики, квантовой механики, теплопроводности и других приводит к специальным функциям. Особо важную роль в теории и в приложениях (при решении многих задач прикладной математики и физики) играют гипергеометрические функции. В последнее время возрос интерес к обобщенным гипергеометрическим функциям Райта, обобщенным конфлюэнтным гипергеометрическим функциям. Важные результаты в этом направлении получили Вирченко Н.А., Джрбашян М.М., Псху А.В., Репин О.А., Самко С.Г., Chaudhry M.A., Srivastava H.M., Saigo M., Kalla S.L. и другие. Обобщенные конфлюэнтные гипергеометрические функции находят широкое применение в математической физике, атомной физике, астрофизике, теории вероятностей.

Целью диссертационной работы является

–изучение новых обобщенных интегральных преобразований, в ядрах которых содержатся обобщенная вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ и функция Райта.

– развитие аналитических методов решения и анализа краевых задач для дифференциальных уравнений на основе новых интегральных преобразований.

Методы исследования. Основные результаты работы получены с помощью теории функций действительной и комплексной переменных, теории специальных функций. Решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений получены методом интегральных преобразований.

Научная новизна состоит в следующем:

- введена в рассмотрение (τ, β) - обобщенная вырожденная конфлюэнтная гипергеометрическая функция ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$, для неё доказаны основные дифференциальные, интегральные, функциональные соотношения;

- исследованы (τ, β) - обобщенные гамма- и бета- функции: ${}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma;w;b)$, ${}_{\tau,\beta}B_a^c(\alpha;\beta;w;\gamma;b)$ и изучены их свойства, получены дифференциальные, интегральные соотношения; рассмотрена неполная (τ, β)-обобщённая бета-функция и изучены её свойства;

- введены и изучены новые обобщенные интегральные преобразования $\widetilde{\mathcal{L}}\{f(x);y\}$, $\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\{f(x);y\}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(x);y\}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_m\{f(x);y\}$, $\mathcal{P}^{a_1,a_2,c,\tau,\beta,\gamma,b}_{1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\}$, $\mathcal{P}^{a_1,a_2,c,\tau,\beta,\gamma,b}_{2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\}$, содержащие в ядрах обобщенную вырожденную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ и функцию Райта ${}_p\Psi_q \equiv {}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c|c} (a_i,\alpha_i)_{1,p} & \multirow{2}{*}{z} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} & \end{array}\right]$;

- даны применения новых обобщенных интегральных преобразований к решению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных; получены решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются обобщением известных уравнений Бесселя и Куммера;

- найдены решения интегральных уравнений, содержащих в ядрах обобщенную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$

- для новых интегральных преобразований доказаны равенства типа Парсеваля-Гольдштейна и формулы обращения;

Практическая и теоретическая значимость полученных результатов. Научные результаты носят теоретической характер, но могут быть использованы при решении различных задач математической физики, электротехники, радиотехники, теории вероятностей и математической статистики. Полученные в диссертации результаты могут представлять научный интерес для широкого круга математиков и специалистов, работающих в области дифференциальных уравнений, краевых задач.

Положения, выносимые на защиту.

- Доказательства свойств, функциональных, дифференциальных и интегральных соотношений для введённых новых обобщённых специальных функций ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$, ${}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma;w;b)$, ${}_{\tau,\beta}B_a^c(\alpha;\beta;w;\gamma;b)$.

- Доказательства свойств, равенств типа Парсеваля-Гольдштейна, формул обращения для новых обобщённых интегральных преобразований, содержащих в ядрах специальные функции $\widetilde{\mathcal{L}}\left\{f(x);y\right\}$, $\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{f(x);y\right\}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_m\left\{f(x);y\right\}$, $\mathcal{P}^{a_1,a_2,c,\tau,\beta,\gamma,b}_{1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\left\{f(u);x\right\}$, $\mathcal{P}^{a_1,a_2,c,\tau,\beta,\gamma,b}_{2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\left\{f(u);x\right\}$.

- Доказательства существования и единственности решения некоторых краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Решения представлены в явном виде с помощью введённых обобщённых интегральных преобразований.

- Полученные методом интегральных преобразований решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются обобщением известных уравнений Бесселя и Куммера.

- Полученные решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода и Фредгольма, содержащих в ядрах функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ и

  $${}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a;\tau);(\nu,\gamma)\\(c;\beta)\end{array}\middle|-bz\right].$$

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность достигается использованием классических методов теории интегральных преобразований и уравнений в частных производных. Результаты диссертации согласуются с ранее известными частными случаями. Также достоверность полученных результатов обусловлена их широкой апробацией.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации докладывались на XI Международной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2006 г.), одиннадцатой региональной конференции молодых исследователей Волгоградской области (г. Волгоград, 2006 г.), XII и XIII Международных научных конференциях им. академика М.Кравчука (г. Киев, 2008 г., 2010 г.), восьмой всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(г. Самара, 2011 г.), XIV Международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2012 г.), II Международной конференции молодых учёных "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики"(Терскол, 2012 г.), десятой всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(г. Самара, 2013 г.), научном семинаре кафедры ПМиИ СамГТУ (научный руководитель - д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко, г. Самара, январь, 2014 г.), XV Международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2014 г.), IV Международной конференции "Математическая физика и её приложения"(г. Самара, 2014 г.), научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (научный руководитель - д.ф.-м.н., проф. В.И. Жегалов, г. Казань, ноябрь, 2014 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[22]. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Работы [2],[16]-[20], [22] опубликованы в соавторстве, и их результаты принадлежат авторам в равной мере. Работы [1]-[3] опубликованы в изданиях входящих в список научных журналов, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 129 наименований. Общий объем диссертации 122 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении диссертации обоснована актуальность темы, дается обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы и сформулированы основные результаты.

Глава 1. «Некоторые обобщённые специальные функции»

В главе 1 вводится обобщенная конфлюэнтная гипергеометрическая функция

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (c;\tau) \\ (c;\beta) \end{array} \middle| zt^{\tau} \right] dt, $$

где $Re\ c > Re\ a > 0, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \tau - \beta < 1$,
${}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (c;\tau) \\ (c;\beta) \end{array} \middle| zt^{\tau} \right]$- частный случай обобщённой функции Райта.

Получен ряд формул и соотношений для функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$, которые являются обобщением известных формул для классической функции $\Phi(a;c;z)$, приведённых в монографии Бейтмен Г., Эрдейи А.[1]

Теорема 1.1.1. *Если выполняются условия* $Re\ c > Re\ a > 0, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \tau - \beta < 1$, *то имеет место формула*

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \cdot \frac{z^n}{n!}. $$

[1]Бейтмен Г., Эрдейи А."Высшие трансцендентные функции том 1, 1973г., с. 242-243.

Доказано, что функция ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;vz)$ является решением дифференциального уравнения

$$\tau z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+vz(a+\tau)\frac{\partial u}{\partial z}-vz\tau\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}-v[(a+\tau)v-\tau]\frac{\partial u}{\partial v}=0.$$

Для функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ доказаны некоторые дифференциальные и интегральные соотношения.

В дальнейшем с помощью функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ строятся обобщенные гамма и бета - функции.

В §1.2 рассмотрена обобщенная гамма- функция

$${}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma,w;b)=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t^w}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{b}{t^\gamma}\right)dt,$$

где $Re\, c>Re\, a>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \tau>0,\ \beta\in\mathbb{R},\ \beta>0, b\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 1,\ w>0.$

Получены некоторые формулы и соотношения для неё.

В частном случае при $b=0, w=1$ введённая гамма функция совпадает с известной классической гамма-функцией и все доказанные свойства и равенства совпадают с известными равенствами для классической гамма-функции.

В §1.3 рассмотрена обобщённая бета-функция

$${}_{\tau,\beta}\mathcal{B}_a^c(x,y;b,\delta,\gamma)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{b}{t^\delta(1-t)^\gamma}\right)dt,$$

где x,y- произвольные комплексные числа; $Re\ b>0;\ \tau,\beta\in\mathbb{R};\ \tau>0;\ \beta>0;$ $\delta>0;\ \gamma>0.$

Заметим, что при $a=c, \delta=\gamma=1$ имеем бета-функцию $\mathcal{B}(x,y;b)$, рассмотренную в работе M.A. Chaudhry [2].

При $b=0$ для $Re\ x>0$ и $Re\ y>0$ функция ${}_{\tau,\beta}\mathcal{B}_a^c(x,y;b,\delta,\gamma)$ сводится к классической бета-функции $\mathcal{B}(x,y)$. При $\beta=1$ получим функции, рассмотренные в работах Вирченко Н.А. Получены ряд формул и соотношений для обобщенной бета-функции, которые являются обобщением соответствующих формул для классической бета-функции.

В §1.4 рассмотрена обобщённая неполная бета-функция.

Глава 2. «Новые обобщенные интегральные преобразования»

[2] M.A. Chaudhry, S.M. Zubair / On a class of incomplete gamma functions with applications //Chapman and Hall/ CRC.–2000.–494 p.

В §2.1 приводится краткий обзор сведений по интегральным преобразованиям. Приведены классические преобразования Фурье, Лапласа, Стилтьеса, потенциала.

Вводятся новые обобщенные интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах, являющиеся обобщением некоторых классических интегральных преобразований и преобразований, рассмотренных в работах H.M. Srivastava, O. Yürekli, N. Dernek и других авторов.

В §2.2 рассмотрены обобщенные интегральные преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}_m\{f(t);x\} = \int\limits_0^\infty t^{m-1}e^{-(xt)^m}f(t)dt \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\{f(t);x\} = \int_0^\infty t^{\gamma_2}e^{-(xt)^{\gamma_1}}f(t)dt \tag{2}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(t);x\} = \int_0^\infty t^{\gamma_2}e^{-(xt)^{\gamma_1}}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a,c;-b(xt)^{\gamma\gamma_1})f(t)dt, \tag{3}$$

где $t \geqslant 0$, $\gamma \in C$, $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, b \geqslant 0, f(t) \equiv 0$ при $t < 0$; $|f(t)| \leqslant ct^{\gamma_1-1-\gamma_2}e^{s_0t^{\gamma_1}}$; c, s_0- постоянные числа (при $t > 0$).

Заметим, что при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, b = 0$ преобразования (2), (3) совпадают с классическим преобразованием Лапласа. При $m = 2$ преобразование (1) совпадает с преобразованием $\mathcal{L}_2\{f(t);x\}$, рассмотренным в работах H.M. Srivastava, O. Yürekli [3], A. Aghili [4].

Для введенных интегральных преобразований доказаны свойства линейности, подобия. Вычислены образы для некоторых функций:

$$f(t) = t^k;\ f(t) = e^{-kt^{\gamma_1}};\ f(t) = t^{\nu-1}e^{-\alpha t^{\gamma_1}}.$$

Лемма 1. *При* $Re\, x^{\gamma_1} > s_0$ *интеграл* $\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(t);x\}$ *абсолютно сходится, если* $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, b \geqslant 0, \tau - \beta < 1, Re\, c > Re\, a > 0, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$, $|f(t)| \leqslant Ct^{\gamma_1-1-\gamma_2}e^{s_0t^{\gamma_1}}$, *где* C, s_0- *постоянные числа(при* $t > 0$*).*

В §2.3 рассмотрены обобщенные интегральные преобразования Стилтьеса.

$$\mathcal{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(t);x\} = \widetilde{\mathcal{P}_1}\{f(t);x\} =$$

[3]O. Yürekli/ New identities involving the Laplace and the L_2-transforms and their applications // Appl.Mathem. and Computation.–1999.–99.–P. 141-151

[4]A. Aghili, A. Ansari, A. Sedghi/ An Inversion Technique for l2-transforms with Applications // Int. J. Contemp.Math.Sciences.– Vol.2.–2007.–28.–p.1387-1394

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{\gamma_2} f(t)}{(t^{\gamma_1}+x^{\gamma_1})^{\gamma_3}} \, {}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a_1,\tau);(a_2,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b \left(\frac{t^{\gamma_1}}{t^{\gamma_1}+x^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_4} \right] dt, \qquad (4)$$

$$\mathcal{P}_2^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(t);x\} = \widetilde{\mathcal{P}_2}\{f(t);x\} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{\gamma_2} f(t)}{(t^{\gamma_1}+x^{\gamma_1})^{\gamma_3}} \, {}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a_1,\tau);(a_2,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b \left(\frac{x^{\gamma_1}}{t^{\gamma_1}+x^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_4} \right] dt, \qquad (5)$$

где $Re\, a_1 > 0, Re\, a_2 > 0, Re\, c > 0, \gamma_i > 0, i = \overline{1,4}; \tau, \beta \subset \mathbb{R}, \tau > 0,$ $\beta > 0, \tau - \beta < 1,$

$${}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a,\tau);(b,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+\tau n)\Gamma(b+\gamma n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^n}{n!}$$

- функция Райта.

Если положить в (4) и (5) $b = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = p$, то получим известное классическое преобразование Стилтьеса.

Вычислены образы этих преобразований для функций

$$f(t) = t^{\nu-1},\ f(t) = t^{\nu-1}\left(t^{\gamma_1}+y^{\gamma_1}\right)^{\alpha}.$$

Теорема 2.3.1. *Если функции $f(x) \in L(0;+\infty); g(x) \in L(0;+\infty)$, то справедливы равенства типа Парсеваля-Гольдштейна*

$$\int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} \widetilde{\mathcal{P}_1}\{f(t);x\}\, g(x)dx = \int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} \widetilde{\mathcal{P}_2}\{g(t);x\}\, f(x)dx.$$

$$\int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} \mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\{f(y);x\}\, \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{g(u);x\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right) \int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} f(x) \mathcal{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\{g(u);x\}\, dx$$

$$\int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(y);x\}\, \mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\{g(u);x\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\gamma_1}\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right)\int\limits_0^\infty x^{\gamma_2} f(x)\mathcal{P}_2^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\left\{g(u);x\right\}dx$$

при условии абсолютной сходимости интегралов.

В §2.4 рассмотрены композиции введенных обобщенных преобразований

$$\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\}\right\},\ \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{f(x);y\right\}\right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}^3_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\} = \mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\right\}\right\}.$$

Для них доказаны некоторые композиционные соотношения.

Теорема 2.4.3. *Если $f(x) \in L(0;+\infty)$, то справедливы равенства*

$$\mathcal{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\left\{\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{f(x);u\right\};y\right\} = \mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{\mathcal{P}_2^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\left\{f(x);u\right\};y\right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}^3_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\} = \frac{1}{\gamma_1}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\widetilde{\mathcal{E}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\} = \int\limits_0^\infty x^{2\gamma_2-\gamma_1}e^{(xy)^{\gamma_1}}f(x)\cdot\widetilde{E}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left((xy)^{\gamma_1}\right)dx,$$

$$\widetilde{E}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}(x) = \int\limits_1^\infty z^{-1}(z-1)^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}-1}e^{-zx}{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a_1,\tau);(a_2,\gamma)\\(c,\beta)\end{array}\middle| -b\left(\frac{z-1}{z}\right)^\gamma\right]dz$$

при условии абсолютной сходимости интегралов.

В §2.5 получены формулы обращения введенных новых интегральных преобразований.

Теорема 2.5. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то справедливы формулы обращения интегральных преобразований $\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);y\right\}$,*
$\mathcal{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\left\{f(x);y\right\}$:

$$f(u) = \gamma_1\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}u^{-\gamma_2}\int\limits_0^\infty(ux)^{-1}g(x)\mathcal{K}(ux)dx, \tag{6}$$

$$f(y) = \widetilde{\mathcal{L}}^{-1}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{\mathcal{L}^{-1}_{\gamma_1,\gamma_1a_2-1}\left\{\frac{\Gamma(a_2)}{\gamma_1}g_1(z);x\right\};y\right\}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\xi(s)} ds,$$

$$g(y) = \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma} \left\{ f(x); y \right\},$$

$$\xi(s) = {}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a,\tau); (\frac{s}{\gamma_1}, \gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b \right],$$

$$g_1(z) = \mathcal{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4} \left\{ f(u); z \right\}; \gamma_4 = \gamma, \gamma_3 = a_2.$$

Глава 3. «Применение обобщенных интегральных преобразований» В главе 3 даются некоторые применения обобщенных интегральных преобразований к решению краевых задач для дифференциальных уравнений и решению интегральных уравнений, содержащих в ядре функцию ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a, c; z)$.

В §3.1 вводятся дифференциальные операторы

$$\delta_{m,t} = \frac{1}{t^{m-1}} \frac{d}{dt}, \;\; \delta^2_{m,t} = (1-m) \frac{1}{t^{2m-1}} \frac{d}{dt} + \frac{1}{t^{2m-2}} \frac{d^2}{dt^2}.$$

Доказаны теоремы, в частности:

Теорема 3.1.1. *Если $f, f', ..., f^{(n-1)}$-непрерывны, а $f^{(n)}$-кусочно непрерывна при $t \geqslant 0$, и если функция f имеет вид $e^{c^m t^m}$ при $t \to \infty$, то*

$$\mathcal{L}_m \left\{ \delta^n_{m,t} f(t); s \right\} = m^n s^{mn} \mathcal{L}_m \left\{ f(t); s \right\} - m^{n-1} s^{m(n-1)} f(0^+) -$$

$$- m^{n-2} s^{m(n-2)} (\delta_{m,t} f)(0^+) - ... - (\delta^{n-1}_{m,t} f)(0^+),$$

$\mathcal{L}_m \left\{ t^{mn} f(t); s \right\} = \frac{(-1)^n}{m^n} \delta^n_{m,t} \mathcal{L}_m \left\{ f(t); s \right\}$ *для* $n = 1, 2, ...$

В §3.2 для уравнений параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{t^{m-1}} \frac{\partial u}{\partial t} + bu, \tag{8}$$

$$t^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} + b t^{m-1} u + f(x,t), \tag{9}$$

где $a, b, m \geqslant 1$-вещественные константы

нами решены некоторые краевые задачи, в частности

Задача 3.1. *Найти решение уравнения (8) в области*

$D: \left\{ 0 < t < \infty, 0 < x < l \right\}$ *, удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x; +0) = \lim_{t \to 0} u(x,t) = 0, 0 < x < l$$

и граничным условиям

$$u(+0;t)=\lim_{x\to+0}u(x,t)=a_0(t), 0<t<\infty, u(l-0;t)=\lim_{x\to l-0}u(x,t)=a_1(t),$$

где $a_0(t), a_1(t)$ - достаточно гладкие функции при $0<t<\infty$.

Задача 3.2. *Найти решение уравнения (9) в области $D_1:\{x>0,t>0\}$, удовлетворяющее начальному условию*

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=0$$

и граничному условию

$$u(+0;t)=\lim_{x\to+0}u(x,t)=a_0(t),$$

где $a_0(t)$-достаточно гладкая функция при $t>0$.

Решения получены в явном виде с помощью обобщенного интегрального преобразования Лапласа $L_m\{f(t),s\}$.

Применяя интегральное преобразование $\mathcal{L}_m$, решения краевых задач сводятся к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображения $U(x,s)=\mathcal{L}_m\{u(x,t);s\}$. Искомую функцию $u(x,t)$ находим, используя формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{L}_m$. Решения получены в явном виде.

В §3.3 для уравнений гиперболического типа

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(1-m)\frac{\partial u}{\partial t}-t^{2m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t^m x. \tag{10}$$

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(1-m+bt^m)\frac{\partial u}{\partial t}=t^{2m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t^\alpha x \tag{11}$$

доказаны существование и единственность решения следующих краевых задач:

Задача 3.4. *Найти решение уравнения (10) в области $D:\{x>0,t>0\}$, удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x,+0)=\lim_{t\to 0}u(x,t)=0,$$

$$\frac{1}{t^{m-1}}u'_t(x;+0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{m-1}}u'_t(x;t)=0$$

и граничному условию

$$u(+0,t)=a(t),$$

где $a(t)$ - достаточно гладкая функция при $t>0$.

Задача 3.5. *Найти решение уравнения (11) в области* $D : \{0 < x < l; 0 < t < +\infty\}$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x, +0) = \lim_{t\to 0} u(x, t) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{m-1}} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и граничным условиям

$$u(+0, t) = \lim_{x\to 0+} u(x, t) = a_0(t),$$

$$u(l - 0; t) = \lim_{x\to l-0} u(x, t) = a_1(t),$$

где $a_0(t), a_1(t)$ *- достаточно гладкие функции при* $0 < t < +\infty$.

Если в уравнении (10) положить $m = 2$, то получим уравнение, для которого аналогичная краевая задача решена в работе A. Aghili, A. Ansari, A. Sedghision с помощью интегрального преобразования L_2. Нами получено решение краевой задачи, применяя интегральное преобразование $\mathcal{L}_m$.

В §3.4 решены обыкновенные дифференциальные уравнения

$$t^2y'' + t(3 - m)y' + \left(t^m - \nu^2 + \nu(2 - m)\right) y = 0, \tag{12}$$

$$ty'' + (c - t^m)y' - at^{m-1}y = 0, \tag{13}$$

которые являются соответственно обобщением уравнения Бесселя и уравнения Куммера.

В работе O.Yürekli, S. Wilson [5] дан новый метод решения уравнения Бесселя с помощью интегрального преобразования L_2. Если в уравнении (12) положим $m = 2$, то получим уравнение Бесселя. Нами решено уравнение (12) с помощью интегрального преобразования $\mathcal{L}_m$.

В §3.5, применяя интегральные преобразования $\mathcal{L}_m$, $\mathcal{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}$, $P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$ и формулы их обращения, получены решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода и уравнений Фредгольма, которые содержат в ядрах обобщенные функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z)$ и ${}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a,\tau); (b,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| z \right]$. Например, доказана теорема

Теорема 3.5.2. *При условиях* $Rec > Rea > 0, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \tau - \beta < 1, h(x) \in L(0; +\infty)$ *интегральное уравнение Вольтерра первого рода*

$$\int_0^x g(t)(x - t)^{\nu-1} e^{-\alpha(x-t)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left(a; c; -b(s(x - t))^\gamma\right) dt = h(x)$$

[5] O.Yürekli, S. Wilson /A new method of solving Bessel's differential equation using the L_2-transform// Appl. Math. and Computation, 130, 2002, P. 587-591

имеет единственное решение

$$g(t)=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(s+\alpha)^{\nu}\times$$
$$\times\left({}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a;\tau);(\nu,\gamma)\\(c;\beta)\end{array}\middle|-b\left(\frac{s}{s+\alpha}\right)^{\gamma}\right]\right)^{-1}\cdot\mathcal{L}\left\{h(x);s\right\}\cdot e^{ts}ds.$$

Получено решение интегрального уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^x g(t)(x-t)^{\nu-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{b}{s^{\gamma}(x-t)^{\gamma}}\right)dt=h(x),$$

которое выражается через введенную нами в первой главе обобщенную гамма-функцию.

В заключение, хотела бы выразить огромную благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору, Олегу Александровичу Репину, за его учебно-методическое мастерство и индивидуальный подход в подготовке данной дисертационной работы. А также доктору физико-математических наук, профессору, Нине Афанасьевне Вирченко за внимательное отношение и энергичную поддержку.

Публикации по теме диссертации

[1] *Заикина С.М.* Применение обобщенного интегрального преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений / С.М. Заикина // Самара: Вестник Сам.гос.техн.ун-та. Сер. Физ.-мат.науки.– 2011.– №4(25).– С. 165-168.

[2] *Заикина С.М.* Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений / О.А. Репин, С.М. Заикина //Вестник Сам.гос.техн.ун-та. Сер. Физ-мат. науки .–2011.– №2(23).– С. 8-16.

[3] *Заикина С.М.* Обобщённое интегральное преобразование Лапласа и его применение к решению некоторых интегральных уравнений / С.М. Заикина // Вестник СамГТУ, серия "Физико-математические науки".–2014 .– №1(34).– С. 19-24.

[4] *Заикина С.М.* Некоторые соотношения для обобщенной бета-функции / С.М. Заикина // Матеріали XI Міжнародної наукової конференції ім.акад. М. Кравчука.-К.: Задруга.–2006 .– С. 424.

[5] *Заикина С.М.* Обобщения некоторых специальных функций / С.М. Заикина //Конференция молодых исследователей волгоградской области 8-10 ноября 2006 г.-Волгоград,-Изд.ВолГУ.–2007 .– С. 91-92.

[6] *Заикина С.М.* Некоторые интегральные соотношения для функции ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$-обобщенной вырожденной гипергеометрической функции / С.М. Заикина //Матеріали XII Міжнародноі науковоі конференціі ім.акад. М. Кравчука.-К.: Задруга.–2008 .– С. 619.

[7] *Заикина С.М.* Некоторые равенства типа Парсеваля-Гольдштейна для обобщенных интегральных преобразований / С.М. Заикина // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Збірник наукових праць. Чернівці.–в.18.–2009.– С. 240-245.

[8] *Заикина С.М.* Некоторые обобщенные интегральные преобразования и их обращения / С.М. Заикина // Волгоград: Вестник ВолГУ, сер.1.Математика и Физика.–№12 – 2009.– №12.– С. 29-32.

[9] *Заикина С.М.* Формула обращения обобщенного интегрального преобразования Лапласа / С.М. Заикина //Матеріали XIII Міжнародноі науковоі конференціі ім.акад. М. Кравчука.-К.: Задруга. – 2010.– Ч.2.– С. 120.

[10] *Заикина С.М.* Применение интегральных преобразований к решению дифференциальных уравнений / С.М. Заикина // Самара: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи".– СамГТУ– 2011.– Ч.3.– С. 68-70.

[11] *Заикина С.М.* Решение обобщенного уравнения Бесселя, используя интегральное преобразование $\mathcal{L}_m$ / С.М. Заикина // Киів: матеріали XIV міжнародн. конференц. ім. ак. М. Кравчука 19-21 квітня 2012 р.– Т.1.– С. 185-186.

[12] *Заикина С.М.* Применение обобщенного интегрального преобразования Лапласа к решению уравнения гиперболического типа / С.М. Заикина //Материалы II межд.конфер.молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики".– 28 ноября-1декабря 2012 г.,Терскол. – С. 101-102.

[13] *Заикина С.М.* Применение интегрального преобразования к решению дифференциального уравнения в частных производных / С.М. Заикина //

Самара: Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи".– СамГТУ– 2013.– Ч.3.– С. 21-23.

[14] *Заикина С.М.* Решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода со специальной функцией в ядре / С.М. Заикина // Київ: матеріали XV міжнародн. конференц. ім. ак. М. Кравчука 2014 р.– Т.1.– С. 185-186.

[15] *Заикина С.М.* Формула обращения для обобщённого интегрального преобразования Лапласа и её применение / С.М. Заикина // Самара: материалы Четвёртой международной конференции "Математическая физика и её приложения"25 августа - 1 сентября 2014 г.–СамГТУ.– С. 172-173.

[16] *Заикина С.М.* Про нове узагальнення В-функціі та іі застосування/ Н.О. Вірченко, Заікіна С.М. // Наукові вісті Національного технічного у-ту Украіни "КПИ".– 2007. –№5(55).–С. 136-141.

[17] *Заикина С.М.* Узагальнені інтегральні перетворення і іх застосування/ Н.О. Вірченко, Заікіна С.М. // Наукові вісті Національного технічного у-ту Украіни "КПИ".– 2008. –№6(62).–С. 133-137.

[18] *Заикина С.М.* Некоторые интегральные преобразования для функций, содержащих ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ / С.М. Заикина, Т.Б. Заикина //Матеріали XII Міжнародноі науковоі конференціі ім.акад. М. Кравчука.-К.: Задруга.–2008 .– С. 620.

[19] *Заикина С.М.* Новые интегральные преобразования в экономике, технике / Н.А. Вирченко, С.М. Заикина // Саратов:Актуальные проблемы и перспективы инновационной агроэкономики.– 2009. – С.58-62.

[20] *Заикина С.М.* Про нові узагальнені інтегральні перетворення / Н.О. Вірченко, Заікіна С.М. // Доповіді НАН Украіни.– 2010. –№5.–С. 11-17.

[21] *Zaikina S.M.* Principal affinities generalized confluent hypergeometric function / S.M. Zaikina //Матеріали XI Міжнародноі науковоі конференціі ім.акад. М. Кравчука.–К.: Задруга.– 2006.–С.425

[22] *Zaikina S.M.* On some generalized integral transforms / N.O. Virchenko, S.L. Kalla , S.M. Zaikina // Handronic Journal– v.32.–2009.–P.539-548.