На правах рукописи

Сидоров Станислав Николаевич

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена на кафедре математического анализа Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет» и в отделе физико-математических и технических наук ГАНУ «Институт прикладных исследований Республики Башкортостан»

Научный руководитель: **Сабитов Камиль Басирович**
доктор физико-математических наук,
профессор, чл.-корр. АН РБ,
директор ГАНУ "Институт прикладных исследований РБ"

Официальные оппоненты: **Пулькина Людмила Степановна**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры уравнений математической физики ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет»

Капустин Николай Юрьевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМиК
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

Защита состоится «19» марта 2015 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «   » января 2015 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Краевые задачи для уравнений смешанного типа являются одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Особое место занимают исследования вырождающихся параболических и гиперболических уравнений, а так же уравнений смешанного типа, которые имеют не только теоретический интерес получаемых результатов, но и практическую необходимость в газовой динамике, в магнито и гидродинамических течениях с переходом через скорость звука, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и других областях.

В последнее время в теории дифференциальных уравнений с частными производными бурно развивается направление теории нелокальных задач. Это объясняется тем, что проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования новых задач, например, математическими моделями различных физических, химических, биологических и других процессов являются задачи, в которых задается определенная связь значений искомой функции или ее производных на части границы области со значениями внутри или на границе этой области.

Нелокальные задачи для различных классов дифференциальных уравнений изучались Ф.И. Франклем, В.И. Жегаловым, J.R. Cannon, А.В. Бицадзе, А.А. Самарским, А.М. Нахушевым, А.П. Солдатовым, Н.И. Ионкиным, А.Л. Скубачевским, В.А. Ильиным, Е.И. Моисеевым, М.Е. Лернером, О.А. Репиным, Н. Попивановым, Л.С. Пулькиной, В.А. Нахушевой, З.А. Нахушевой, А.И. Кожановым, К.Б. Сабитовым, М.С. Салахитдиновым, М. Мирсабуровым, Л.И. Сербиной, Е.А. Уткиной и другими авторами.

В трансзвуковой газовой динамике Ф.И. Франкль впервые для уравнения Чаплыгина $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия $u(0,y) - u(0,-y) = f(y)$, $0 < y < a$, является часть границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. При этом на ней задается производная по нормали искомой функции $u_x(0,y)$.

В.И. Жегаловым впервые для уравнения Лаврентьева-Бицадзе изучен аналог задачи Трикоми с нелокальным условием, связывающим значение искомого решения на обеих характеристиках (задача со смещением).

А.В. Бицадзе и А.А. Самарским для уравнения Лапласа были предложены задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения во внутренних точках области со значениями на границе.

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое, можно отнести работу И.М. Гельфанда. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина, Я.С. Уфлянд, Л.А. Золина показали другие применения этих задач.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

После этих статей появилось множество работ, где изучаются задача Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе-Самарского и другие нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Достаточно полный обзор этих работ приведен в монографиях Т.Д. Джураева, А.М. Нахушева, М.С. Салахитдинова, М. Мирсабурова, А.Л. Скубачевского, докторской диссертации Н.Ю. Капустина.

Далее остановимся на работах, близких к нашей теме исследований.

К.Б. Сабитов исследовал задачу с граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ -\alpha \le t \le \beta, \ \ u(x,-\alpha) = \psi(x), \ \ 0 \le x \le 1,$$

для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | \ 0 < x < 1, \ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b \ge 0$ – заданные действительные числа. Методом спектрального анализа при некоторых условиях на α и β установлен критерий единственности и решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

К.Б. Сабитовым изучена задача с граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ -\alpha \le t \le \beta, \ \ u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le 1,$$

для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0, \end{cases}$$

в области $D = \{(x,t) | \ 0 < x < 1, \ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа. Установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье. Доказана устойчивость решения по нелокальному условию $\varphi(x)$.

В работах Сабитова К.Б. и Рахмановой Л.Х. исследованы начально-краевые и нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, в прямоугольной области D.

Данная диссертационная работа посвящена изучению нелокальных прямых и обратных краевых задач для двух классов вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа: для уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью и для уравнения смешанного типа со степенным вырождением.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина, А.С. Леонова, А.Г. Яголы, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского, К.Г. Резницкой, В.Г. Яхно, В.К. Иванова, В.В. Васина, В.П. Танана, С.И. Кабанихина, Алексеева А.С., Бубнова Б.А., А.В. Баева, А.И. Прилепко, А.М. Денисова, А.И. Кожанова и других.

А.Н. Зарубин, М.В. Бурцев исследовали обратные начально-краевые задачи для дифференциально-разностных дробного диффузионно-волновых уравнений с дробной производной и запаздыванием по различным переменным.

В работах К.Б. Сабитова, Э.М. Сафина впервые изучены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области D с граничными условиями первого – третьего родов, где неизвестными являются функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$. Установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений рассматриваемых задач.

К.Б. Сабитовым, Г.Р. Юнусовой для уравнения (1) изучены прямые задачи (при $f_1(x) = f_2(x) = 0$) и обратные задачи в случаях, когда $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ и $f_1(x) \neq f_2(x)$, с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам данного уравнения. Решения задач построены в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлены критерии единственности каждой из задач и доказана устойчивость решения по краевым данным в нормах пространств L_2 и $C(\overline{D})$.

В отличие от этих исследований в данной работе рассматриваются прямые и обратные задачи для двух классов **вырождающихся** уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальными граничными условиями, которые связывают значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащих разным типам уравнения. Решения задач строятся в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости построенных рядов возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Цель и задачи диссертационного исследования. В данной работе рассматриваются прямые и обратные задачи с нелокальными граничными условиями для вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u = f_1(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 0$, $m > 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа. Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений прямых и обратных задач для уравнения (2) в области D.

Объектом исследования являются прямые и обратные задачи для вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типов.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности, существования и устойчивости решений прямых и обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типов с нелокальными граничными условиями составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения прямых задач для двух классов вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам

рассматриваемого уравнения. Для каждой из задач установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, установлена устойчивость решения по граничным данным.

2. На основании прямых задач впервые поставлены и исследованы на корректность обратные задачи по отысканию правых частей для двух классов вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Решения поставленных задач построены в виде сумм рядов по собственным функциям, установлены критерии единственности и доказана устойчивость решений по граничным данным.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории обратных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, лаборатории прикладной математики и информатики отдела физико-математических и технических наук Института прикладных исследований Республики Башкортостан (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов, 2011 – 2014 гг.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях, семинарах, симпозиумах: **1.** X школа молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики"(г. Нальчик, 28 мая – 1 июня, 2012 г.); **2.** XI Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2012"(г. Казань, 1 – 6 ноября, 2012 г.); **3.** Международня конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Белгород, 26 – 31 мая, 2013 г.); **4.** Фестиваль "Молодежь. Прогресс. Наука"(г. Стерлитамак, 25 марта – 6 апреля, 2013 г.); **5.** Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 26 – 30 июня, 2013 г.); **6.** XII Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2013"(г. Казань, 24 – 29 октября, 2013 г.); **7.** Республиканская научная конференция с участием ученых из стран СНГ "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения"(г. Ташкент, Узбекистан, 21 – 23 ноября, 2013 г.); **8.** Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ – 2014 (г. Воронеж, 26 – 31 января, 2014 г.); **9.** VII Международная конференция по математическому моделированию (г. Якутск, 30 июня – 4 июля, 2014 г.); **10.** Четвертая международная конференция "Математическая физика и ее приложения"(г. Самара, 25 августа – 1 сентября, 2014 г.). **11.** Международная научная конференция "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций"(г. Казань, 29 сентября – 1 октября, 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [14] общим объемом 4,96 п.л. При этом статьи [1] – [4] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместных работах [2, 4] постановка задач и идея доказательств теорем единственности, существования и устойчивости принадлежит научному руководителю К.Б. Сабитову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 114 наименований. Общий объем диссертации – 139 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дается обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1**, состоящей из четырех параграфов, для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа исследуются прямые задачи с нелокальными граничными условиями, связывающими значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащих разным типам изучаемого уравнения. Методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Рассмотрим однородное уравнение смешанного типа

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) |\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 0$, $m > 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа. Для уравнения (3) в этой области поставлены и решены следующие нелокальные задачи.

Задача 1.1. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+), \tag{4}$$

$$L_{n,m}u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{6}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Задача 1.2. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (4)–(6) *и*

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{8}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

В §§1.1 и 1.2 изучаются задачи 1.1 и 1.2 соответственно для уравнения (3) при $n = 0$, а параграфы 1.3 и 1.4 посвящены изучению этих задач для уравнения (3) при всех $n > 0$.

Для примера здесь приведем результаты по **задаче 1.1** для уравнения (3) при $n > 0$. Методом спектрального анализа решение задачи (4)–(7) построено в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \tag{9}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k(\delta_3(k))^{-1} e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}, & t > 0, \\ \varphi_k(\delta_3(k))^{-1}\gamma_k \sqrt{-t}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q), & t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\lambda_k^2 = q p_k = b^2 + (\pi k)^2, \;\; q = (m+2)/2 \;\; \gamma_k = (p_k/2)^{1/(2q)}\Gamma(1 - 1/(2q)),$$

$$\varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\, \sin \pi k x \, dx,$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_3(k) = \gamma_k \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) - e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} \ne 0. \tag{11}$$

Если при некоторых α, β, b, m, n и $k = l$ нарушено условие (11), т.е. $\delta_3(l) = 0$, то однородная задача (4)–(7) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,t) = u_l(t) \sin \pi l x, \tag{12}$$

где

$$u_l(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_l^2 t^{n+1}/(n+1)}, & t > 0, \\ \gamma_l \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_l(-t)^q), & t < 0. \end{cases}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 0.1.1. *При любых фиксированных* $\beta > 0$, $b \geq 0$, $m > 0$, $n > 0$ *и достаточно больших* k *уравнение* $\delta_3(k) = 0$ *имеет счетное множество нулей относительно* $\alpha_q = \alpha^q/q$.

Теорема 0.1.1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (4) – (7), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (11) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство единственности решения проводится на основе полноты системы синусов в пространстве $L_2[0,1]$.

Поскольку α, β, b, m и n – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\delta_3(k)$, которое входит в знаменатели коэффициентов ряда (10), может стать достаточно малым, то есть возникает проблема "малых знаменателей". В связи с этим, для обоснования существования решения надо показать существование чисел α, β, b, m и n, таких, что при достаточно больших k выражение $\delta_3(k)$ отделено от нуля.

Справедлива следующая

Лемма 0.1.2. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\alpha_q = \alpha^q/q$ *– любое натуральное число;* 2) $\alpha_q = p/t$ *– любое дробное число, где* p *и* t *– взаимно-простые натуральные числа и* $r/t \neq (3q-1)/(4q)$, *где* $r = \overline{0, t-1}$, *то существуют положительные постоянные* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* C_0, *такие, что при любых* $k > k_0$ *и фиксированных* $\beta > 0$, $b \geq 0$, $m > 0$ *и* $n > 0$ *справедлива оценка*

$$|k^{\lambda}\delta_3(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \tag{13}$$

Отметим, что условие $r/t \neq (3q-1)/(4q)$ в лемме 0.1.2 существенно, так как в противном случае можно показать, что оценка (13) не имеет место.

Если для указанных в лемме 0.1.2 значений α_q при некоторых $k = l = k_1, k_2, ..., k_m$, где $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq k_0$, где k_n, $n = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta_3(l) = 0$, то для разрешимости задачи (4) – (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m. \tag{14}$$

Тогда решение задачи (4) – (7) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \cdots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} \right) u_k(t) \sin \pi k x + \sum_{l} A_l u_l(x,t), \tag{15}$$

где функции $u_k(t)$ и $u_l(x,t)$ определяются соответственно по формулам (10) и (12), в последней сумме l принимает значения $k_1, k_2, ..., k_m$, A_l – произвольные постоянные, в последней сумме l принимает значения $k_1, k_2, ..., k_m$. Конечные суммы в (15) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 0.1.2. *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^{3+\alpha}[0,1]$, $\lambda < \alpha < 1$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ *и выполнена оценка* (13) *при* $k > k_0$. *Тогда если* $\delta_3(k) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (4) – (7) *и оно определяется рядом* (9); *если* $\delta_3(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, ..., k_m \leq k_0$, *то задача* (4) – (7) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (14) *и решение в этом случае определяется рядом* (15).

Теорема 0.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 0.1.2 *и* $\delta_3(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$. *Тогда для решения задачи* (4) – (7) *имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2[0,1]} \leq N_{01}||\varphi'(x)||_{L_2[0,1]}, \;\; ||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leq N_{02}||\varphi''(x)||_{C[0,1]},$$

где постоянные N_{01} *и* N_{02} *не зависят от* $\varphi(x)$.

Аналогично установлены критерии единственности, доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач 1.1 и 1.2 для уравнения (3) при $n = 0$ и $n > 0$.

Глава 2 посвящена изучению обратных задач с нелокальными граничными условиями для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся гиперболической частью, т.е. для уравнения (2) при $n = 0$. Также методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Для уравнения (2) при $n = 0$ в прямоугольной области D поставлены и исследованы следующие обратные задачи.

Задача 2.1. *Найти в области* D *функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+), \tag{16}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \tag{17}$$

$$L_{0,m}u(x,t) \equiv f(x), \;\; (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{18}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{19}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \tag{20}$$

$$u_t(x,-\alpha) = \psi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \tag{21}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– достаточно гладкие функции,* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Задача 2.2. *Найти в области* D *функции* $u(x,t)$ *и* $f(x)$, *удовлетворяющие условиям* (16) – (19) *и*

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \varphi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \tag{22}$$

$$u(x,-\alpha)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{23}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– достаточно гладкие функции,* $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$, $D_-=D\cap\{t<0\}$, $D_+=D\cap\{t>0\}$.

Задача 2.3. *Найти в области* D *функции* $u(x,t)$ *и* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

$$u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_-)\cap C^2_x(D_+), \tag{24}$$

$$f_i(x)\in C(0,1)\cap L_2[0,1],\ \ i=1,2, \tag{25}$$

$$L_{0,m}u(x,t)\equiv f_i(x),\ \ (x,t)\in D_-\cup D_+, \tag{26}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ \ -\alpha\le t\le\beta, \tag{27}$$

$$u(x,-\alpha)-u(x,\beta)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{28}$$

$$u_t(x,-\alpha)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{29}$$

$$u_t(x,\beta)=g(x),\ \ 0\le x\le 1. \tag{30}$$

$g(x)$ *– заданная достаточно гладкая функция, причем* $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=g(0)=g(1)=0$.

Задача 2.4. *Найти в области* D *функции* $u(x,t)$ *и* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяющие условиям* (24) – (27) *и*

$$u_t(x,-\alpha)-u_t(x,\beta)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{31}$$

$$u(x,-\alpha)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{32}$$

$$u(x,\beta)=g(x),\ \ 0\le x\le 1. \tag{33}$$

В задачах 2.1 и 2.2 условия (21) и (23) являются дополнительными условиями для определения функции $f(x)$. А в задачах 2.3 и 2.4 исследуется уравнение с разными неизвестными правыми частями, не зависящими от времени, поэтому в данных задачах задаются дополнительные условия (29), (30) и (32), (33) соответственно.

В работах К.Б. Сабитова и Э.М. Сафина для уравнения (2) при $n=0$ и $m=0$ в прямоугольной области D изучены обратные задачи 2.1 и 2.3, в которых вместо нелокальных условий (20), (21) и (28) заданы локальные условия $u(x,-\alpha)=\varphi(x)$ и $u(x,\beta)=\varphi(x)$, $0\le x\le 1$.

Рассмотрим здесь **задачу 2.2** для уравнения (2) при $n=0$ и $f_1(x)=f_2(x)$, решение которой построено в виде сумм рядов

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin\pi kx, \tag{34}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin \pi k x, \tag{35}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k}{\lambda_k^2 \Delta_1(k)} \left(\lambda_k^2 D'_{1k}(-\alpha) e^{-\lambda_k^2 t} + C'_{1k}(-\alpha) + \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \beta} \right) - \\ \qquad - \dfrac{\psi_k}{\lambda_k^2 \Delta_1(k)} \left(\lambda_k^2 D_{1k}(-\alpha) e^{-\lambda_k^2 t} + C_{1k}(-\alpha) \right), \qquad t > 0, \\ \dfrac{\varphi_k}{\Delta_1(k)} \left(D'_{1k}(-\alpha) C_{1k}(t) + (C'_{1k}(-\alpha) + \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \beta}) D_{1k}(t) \right) - \\ \qquad - \dfrac{\psi_k}{\Delta_1(k)} \left(D_{1k}(-\alpha) C_{1k}(t) + C_{1k}(-\alpha) D_{1k}(t) \right), \quad t < 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$f_k = \frac{\varphi_k (C'_{1k}(\alpha) + \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \beta}) - \psi_k C_{1k}(-\alpha)}{\Delta_1(k)}, \tag{37}$$

$$C_{1k}(t) = \lambda_k^2 \sqrt{-t} \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + \sqrt{-t} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q),$$

$$D_{1k}(t) = \frac{\sqrt{-t}}{\lambda_k^2} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) + w_k(t),$$

$$w_k(t) = \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s}\, ds -$$

$$- \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s}\, ds, \tag{38}$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_1(k) = -\lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s}\, ds +$$

$$+ \gamma_{-1/(2q)}(k) \int_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s}\, ds + 1 - \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 \beta} D_{1k}(-\alpha) \neq 0. \tag{39}$$

Если при некоторых α, β, b, m и $k = l$ нарушено условие (39), то однородная задача (16) – (21) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_l(x, t) = u_l(t) \sin \pi l x, \tag{40}$$

где

$$u_l(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_l^2 t} + \dfrac{f_l}{\lambda_l^2}, & t > 0, \\ C_{1l}(t) + f_l D_{1l}(t), & t < 0, \end{cases}$$

$$f_l(x) = f_l \sin \pi l x, \;\; f_l = \frac{\lambda_l^2 C_{1l}(-\alpha)}{D_{1l}(-\alpha)}, \;\; D_{1l}(-\alpha) \neq 0. \tag{41}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 0.2.1. *При любых фиксированных $\beta > 0$, $b \geq 0$, $m > 0$ и достаточно больших k выражение $\Delta_1(k)$ имеет счетное множество нулей относительно $\alpha_q = \alpha^q/q$.*

Теорема 0.2.1. *Если существует решение $u(x,t)$ и $f(x)$ задачи* (16) – (21), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (39) *при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Выражение $\Delta_1(k)$ входит в знаменатели коэффициентов рядов (36) и (37), определяющих решение задачи. В связи с этим необходимо ответить на вопрос при каких α, β, b и m выражение $\Delta_1(k)$ отделено от нуля.

Лемма 0.2.2. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\alpha_q\theta$ $(0 < \theta < 1)$ *– любое натуральное число;* 2) $\alpha_q\theta = p/t$ *– любое дробное число, где p и t – взаимно-простые натуральные числа и $r/t \neq (3q+1)/(4q)$, где $r = \overline{0, t-1}$, то существуют положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0, такие, что при любых $k > k_0$ и фиксированных $\beta > 0$, $b \geq 0$, $m > 0$ справедлива оценка*

$$|k^{-1-\lambda}\Delta_1(k)| \geq C_0 > 0, \lambda = 1/2 - 1/(2q). \tag{42}$$

Отметим, что условие $r/t \neq (3q+1)/(4q)$ в лемме 0.2.2 существенно, так как в противном случае можно показать, что оценка (42) не имеет место.

Если при указанных α, β, b, m и α_q при некоторых $k = l = k_1, k_2, ..., k_m$, где $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq k_0$, где k_n, $n = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, $\Delta_1(l) = 0$, то для разрешимости задачи (16) – (21) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x \, dx = \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi l x \, dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m. \tag{43}$$

Тогда решение задачи (16) – (21) определяются в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \cdots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} \right) u_k(t) \sin \pi k x + \sum_l A_l u_l(x,t), \tag{44}$$

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \cdots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty} \right) f_k \sin \pi k x + \sum_l A_l f_l(x), \tag{45}$$

где функции $u_k(t)$, f_k, $u_l(x,t)$ и $f_l(x)$ определяются соответственно по формулам (36), (37), (40) и (41), A_l – произвольная постоянная, в суммах $\sum_l$ индекс l

принимает значения $k_1, k_2, ..., k_l$, конечные суммы выражений (44), (45) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 0.2.2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$ *и выполнена оценка* (42) *при* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta_1(k) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (16) – (21) *и это решение определяется рядами* (34), (35); *если* $\Delta_1(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, ..., k_m \leq k_0$, *то задача* (16) – (21) *разрешима тогда, когда выполняются условия* (43) *и решение в этом случае определяется рядами* (44), (45).

Теорема 0.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 0.2.2 *и* $\Delta_1(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$. *Тогда для решения* (34), (35) *задачи* (16) – (21) *имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2[0,1]} \leq K_{01} \left(||\varphi'(x)||_{L_2[0,1]} + ||\psi(x)||_{L_2[0,1]}\right),$$

$$||f(x)||_{L_2[0,1]} \leq K_{02} \left(||\varphi'(x)||_{L_2[0,1]} + ||\psi(x)||_{L_2[0,1]}\right),$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leq K_{03} \left(||\varphi''(x)||_{C[0,1]} + ||\psi'(x)||_{C[0,1]}\right),$$

$$||f(x)||_{C(\overline{D})} \leq K_{04} \left(||\varphi''(x)||_{C[0,1]} + ||\psi'(x)||_{C[0,1]}\right)$$

где постоянные K_{0i}, $i = \overline{1, 4}$, *не зависят от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Отметим, что аналогичные результаты получены для остальных задач этой главы, а именно, установлены критерии единственности, решения построены в виде сумм рядов, обоснована сходимость рядов в соответствующих классах функций и доказана устойчивость решений.

Глава 3 посвящена изучению обратных задач 2.1 – 2.4 для уравнения (2) при всех $n > 0$ и $m > 0$.

Рассмотрим **задачу 2.3.** Решение данной задачи построено в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \tag{46}$$

$$f_i(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ik} \sin \pi k x, \quad i = 1, 2, \tag{47}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} I_k(t), & t > 0, \\ a_k F_{1k}(t) - f_{1k} F_{2k}(t) + f_{2k} w_k(t), & t < 0, \end{cases} \tag{48}$$

$$a_k = (\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1} \varphi_k \Big[-\lambda_k^2 \beta^n I_k(\beta) w_k'(-\alpha) + w_k'(-\alpha) \Big] -$$

$$-(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\psi_k\Big[-\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha)+w_k(-\alpha)\Big]+$$

$$+(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}g_k\Big[F_{2k}(-\alpha)-I_k(\beta)w_k'(-\alpha)-F_{2k}'(-\alpha)w_k(-\alpha)\Big], \tag{49}$$

$$f_{1k}=-(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\varphi_k\Big[\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k'(-\alpha)\Big]+(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\psi_k\Big[\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha)\Big]-$$

$$(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\psi_k\Big[F_{1k}(-\alpha)w_k'(-\alpha)-e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}w_k'(-\alpha)-F_{1k}'(-\alpha)w_k(-\alpha)\Big], \tag{50}$$

$$f_{2k}=-(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\varphi_k\Big[-F_{1k}'(-\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)+$$

$$+F_{1k}'(-\alpha)+F_{1k}'(-\alpha)\lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\Big]-$$

$$-(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}\psi_k\Big[-F_{1k}(-\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)+$$

$$+F_{1k}(-\alpha)-e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}+\lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}F_{2k}(-\alpha)\Big]+$$

$$+(\widetilde{\Delta}_3(k))^{-1}g_k\Big[F_{1k}(-\alpha)F_{2k}'(-\alpha)-F_{2k}'(-\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}-$$

$$-F_{1k}'(-\alpha)F_{2k}(-\alpha)+F_{1k}'(-\alpha)I_k(\beta)\Big], \tag{51}$$

$$I_k(t)=e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}\int\limits_0^t e^{\lambda_k^2 s^{n+1}/(n+1)}\,ds,$$
$$F_{1k}(t)=\gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q),$$
$$F_{2k}(t)=-\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q),$$

$w_k(t)$ определяется по формуле (38), при условии, что при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\widetilde{\Delta}_3(k)=-\lambda_k^2\gamma_{-1/(2q)}(k)\beta^n I_k(\beta)\int\limits_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds+$$

$$+\gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds-$$

$$-e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\Big[\lambda_k^2\beta^n\gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds-w_k'(-\alpha)\Big]\neq 0. \tag{52}$$

Если при некоторых α, β, b, m, n и $k=l$ нарушено условие (52), то однородная задача 2.3 (где $\varphi(x)=\psi(x)=g(x)\equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_l(x,t)=u_l(t)\sin\pi lx, \tag{53}$$

где

$$u_l(t)=\begin{cases} e^{-\lambda_l^2t^{n+1}/(n+1)}+f_le^{-\lambda_l^2t^{n+1}/(n+1)}\int\limits_0^t e^{\lambda_l^2s^{n+1}/(n+1)}\,ds, & t>0,\\ F_{1l}(t)+f_{1l}(F_{2l}(t)-w_l(t))+f_{2l}w_l(t), & t<0,\end{cases}$$

$$f_{1l}(x)=f_{1l}\sin\pi lx,\;\; f_{1l}=-\frac{\lambda_k^2\beta^ne^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}}{\lambda_k^2\beta^nI_k(\beta)+1}, \tag{54}$$

$$f_{2l}(x)=f_{2l}\sin\pi lx,\;\; f_{2l}=-\frac{F'_{1l}(-\alpha)+f_{1l}F'_{2l}(-\alpha)}{w'_l(-\alpha)},\;\; w'_l(-\alpha)\neq 0. \tag{55}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 0.3.1. *При любых фиксированных $\beta>0$, $b\geq 0$, $m>0$, $n>0$ и достаточно больших k выражение $\widetilde{\Delta}_3(k)$ имеет счетное множество нулей относительно $\alpha_q=\alpha^q/q$.*

Теорема 0.3.1. *Если существует решение $u(x,t)$ и $f_i(x)$ $(i=1,2)$ задачи* 2.3*, то оно единственно только тогда, когда при всех $k\in\mathbb{N}$ выполнены условия* (52)*.*

Так как выражение $\widetilde{\Delta}_3(k)$ находится в знаменателе функций $u_k(t)$ то при достаточно больших k оно может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема "малых знаменателей". Покажем, что при достаточно больших k выражение $\widetilde{\Delta}_3(k)$ отделено от нуля.

Лемма 0.3.2. *Если выполнено одно из условий:* 1) *$\alpha_q\theta$ – любое натуральное число;* 2) *$\alpha_q\theta=p/t$ – любое дробное число, где p и t – взаимно-простые натуральные числа и $r/t\neq(3q+1)/(4q)$, где $r=\overline{0,t-1}$, то существуют положительные постоянные $k_0\in\mathbb{N}$ и C_0, такие, что при любых $k>k_0$ и фиксированных $\beta>0$, $b\geq 0$, $m>0$ и $n>0$ справедлива оценка*

$$|k^{2+\lambda}\widetilde{\Delta}_3(k)|\geq C_0>0,\;\; \lambda=1/2-1/(2q). \tag{56}$$

Отметим, что условие $r/t\neq(3q+1)/(4q)$ в лемме 0.3.2 существенно, так как в противном случае можно показать, что оценка (56) не имеет место.

Если при некоторых $k=l=k_1,k_2,...,k_m$, где $1\leq k_1<k_2<...<k_m\leq k_0$, где k_n, $n=\overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\widetilde{\Delta}_3(l)=0$, то для разрешимости задачи 2.3 достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^1\varphi(x)\sin\pi lx\,dx=\int\limits_0^1\psi(x)\sin\pi lx\,dx=\int\limits_0^1 g(x)\sin\pi lx\,dx=0,\;\; l=k_1,...,k_m. \tag{57}$$

Тогда решение задачи 2.3 определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t)=\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\cdots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)u_k(t)\sin\pi kx+\sum_l A_l u_l(x,t), \quad (58)$$

$$f_i(x)=\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\cdots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right)f_{ik}\sin\pi kx+\sum_l A_{il} f_{il}(x), \ \ i=1,2, \quad (59)$$

где функции $u_k(t)$, f_{ik}, $u_l(x,t)$ и $f_{il}(x)$ определяются соответственно по формулам (48), (50), (51), (53) – (55). A_{il} – произвольная постоянная, в суммах $\sum_l$ индекс l принимает значения $k_1,k_2,...,k_l$, конечные суммы выражений (58), (59) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 0.3.2. *Пусть функции $\varphi(x)\in C^6[0,1]$, $\psi(x)\in C^5[0,1]$, $g(x)\in C^{5+\mu}[0,1]$, $\lambda<\mu<1$, $\varphi^i(0)=\varphi^i(1)=\psi^i(0)=\psi^i(1)=g^i(0)=g^i(1)=0$, $i=1,2$, и выполнена оценка* (56) *при $k>k_0$. Тогда если $\widetilde{\Delta}_3(k)\neq 0$ при всех $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* 2.3 *и это решение определяется рядами* (46), (47)*; если $\widetilde{\Delta}_3(k)=0$ при некоторых $k=k_1,...,k_m\le k_0$, то задача* 2.3 *разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности* (57) *и решение в этом случае определяется рядами* (58), (59).

Теорема 0.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 0.3.2 *и $\widetilde{\Delta}_3(k)\neq 0$ при всех $k\le k_0$. Тогда для решения* (46), (47) *задачи* 2.3 *имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2[0,1]}\le M_{01}\left(||\varphi'''(x)||_{L_2[0,1]}+||\psi''(x)||_{L_2[0,1]}+||g'''(x)||_{L_2[0,1]}\right),$$

$$||f_1(x)||_{L_2[0,1]}\le M_{02}\left(||\varphi''(x)||_{L_2[0,1]}+||\psi'(x)||_{L_2[0,1]}+||g'(x)||_{L_2[0,1]}\right),$$

$$||f_2(x)||_{L_2[0,1]}\le M_{03}\left(||\varphi'''(x)||_{L_2[0,1]}+||\psi''(x)||_{L_2[0,1]}+||g'''(x)||_{L_2[0,1]}\right),$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})}\le M_{04}\left(||\varphi^{IV}(x)||_{C[0,1]}+||\psi'''(x)||_{C[0,1]}+||g^{IV}(x)||_{C[0,1]}\right),$$

$$||f_1(x)||_{C(\overline{D})}\le M_{05}\left(||\varphi'''(x)||_{C[0,1]}+||\psi''(x)||_{C[0,1]}+||g''(x)||_{C[0,1]}\right),$$

$$||f_2(x)||_{C(\overline{D})}\le M_{06}\left(||\varphi^{IV}(x)||_{C[0,1]}+||\psi'''(x)||_{C[0,1]}+||g^{IV}(x)||_{C[0,1]}\right),$$

где постоянные M_{0i} не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Сидоров, С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / С.Н. Сидоров // Доклады АМАН. – 2012. – Т. 14. – № 3. – С. 34 – 44. – 0,69 п.л.

2. Сидоров, С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / К.Б. Сабитов, С.Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 3. – С. 356 – 365. – 0,63 п.л.

3. Сидоров, С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / С.Н. Сидоров // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – № 25 (196) – Вып. 37. – С. 45 – 57. – 0,81 п.л.

4. Сидоров, С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием / К.Б. Сабитов, С.Н. Сидоров // Известия Вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46 – 59. – 0,69 п.л.

Публикации в других изданиях

5. Сидоров, С.Н. Критерий единственности решения одной нелокальной задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / С.Н. Сидоров // Материалы X школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". – Нальчик: КБНЦ РАН. – 2012. – С. 96 – 99. – 0,31 п.л.

6. Сидоров, С.Н. Существование и единственность решения одной нелокальной задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / С.Н. Сидоров // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы XI молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2012". – Казань: Казан. матем. об-во. – 2012. – Т. 45. – С. 180 – 184. – 0,31 п.л.

7. Сидоров, С.Н. Критерий единственности решения одной обратной задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / С.Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции. – Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – 2013. – С. 208 – 209. – 0,06 п.л.

8. Сидоров, С.Н. Критерий единственности решения обратной задачи для вырождающегося параболо-гиперболи-ческого уравнения / С.Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2 т. – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2013. – Т.I. – С. 272 – 277. – 0,38 п.л.

9. Сидоров, С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения / С.Н. Сидоров // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Двенадцатой молодежной школы-конференции

"Лобачевские чтения - 2013". – Казань: Казан. матем. об-во. – 2013. – Т. 47. – С. 160 – 163. – 0,25 п.л.

10. Сидоров, С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с неизвестной правой частью, неявно зависящей от времени / С.Н. Сидоров // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: материалы республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ – Узбекистан: Изд-во Нац.университета Узбекистана. – 2013. – С. 103 – 104. – 0,13 п.л.

11. Сидоров, С.Н. Нелокальная задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии / С.Н. Сидоров // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ 2014". – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". – 2014. – С. 313 – 316. – 0,19 п.л.

12. Сидоров, С.Н. Нелокальная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / С.Н. Сидоров // Материалы Четвертой международной конференции "Математическая физика и ее приложения". – Самара: СамГТУ. – 2014. – С. 327 – 328. – 0,13 п.л.

13. Сидоров, С.Н. Краевая задача для вырождающегося уравнения смешанного типа с неизвестными правыми частями / С.Н. Сидоров // VII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. – Якутск: ООО "Компания "Дани-Алмас". – 2014. – С. 70 – 71. – 0,13 п.л.

14. Сидоров, С.Н. Задача по определению правой части вырождающегося уравнения смешанного типа / С.Н. Сидоров // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014". – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2014. – Т. 49. – С. 304 – 307. – 0,25 п.л.