На правах рукописи

Саранских Ольга Вячеславовна

Неголономные торсы в трехмерном и четырехмерном евклидовых пространствах

Специальность 01.01.04 геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск 2014

Работа выполнена на кафедре геометрии механико-математического факультета Национального исследовательского томского государственного университета.

Научный руководитель: Онищук Надежда Максимовна,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Официальные оппоненты: Смоленцев Николай Константинович,
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой математического анализа, Кемеровский государственный университет

Фомин Виктор Егорович,
кандидат физико-математических наук,
доцент, Казанский федеральный университет

Ведущая организация: Тверской государственный университет (г.Тверь)

Защита диссертации состоится «26» июня 2014 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, КФУ, ауд.610).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан « » апреля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е.К

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию геометрии неголономных торсов в трехмерном и четырехмерном евклидовых пространствах.

Актуальность темы диссертации. Со времен Г.Монжа [17] дифференциальная геометрия развивалась в тесной связи с развитием теории дифференциальных уравнений. Постепенно теория дифференциальных уравнений превратилась в самостоятельную математическую дисциплину, лишь время от времени использующую язык дифференциальной геометрии для придания наглядности определенным результатам. Дифференциальная геометрия также стала самостоятельной дисциплиной, пользующейся теорией дифференциальных уравнений как аппаратом. Не исключение составляет и неголономная геометрия, базу которой составляют не вполне интегрируемые дифференциальные уравнения.

Термин «неголономная геометрия» введен немецким механиком Г. Герцем в 1894 году в работе «Принципы механики» [10], где при решении задачи механического характера он получил не вполне интегрируемые дифференциальные уравнения. Но первая работа, в которой рассматривается геометрия интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

в евклидовом пространстве появилась в 1880 году. Ее автор – немецкий математик и механик А. Фосс [40]. Им было замечено «раздвоение» свойств характерных для неголономной геометрии. Появились линии кривизны 1-го и 2-го рода, геодезические «прямейшие» и «кратчайшие».

До конца 20-х годов XX века количество работ в области неголономной геометрии было незначительным. С 1926 года стали появляться работы Д.М. Синцова, впоследствии вошедшие в сборник [27]. Серьезные результаты по неголономной геометрии в ее связи с механикой принадлежат Г. Врэнчану [41], Дж. Сингу [39], И.А. Схоутену [38], В.В. Вагнеру [6], [7], Каратеодори [37] и другим выдающимся математикам и физикам предвоенного времени. В СССР в те годы неголономную проблематику пропагандировал В.Ф. Каган. Он предложил в 1937 году тему, связанную с неголономной геометрией на премию им. Н.И. Лобачевского. Премия была присуждена В.В. Вагнеру. Но в 1948 году П.К. Рашевский, высоко оценив работу В.В. Вагнера, говорил о необходимости заполнения общей теории конкретным содержанием [25]. Заметим, что работы по неголономной геометрии 40-х годов XX века (см. например, [6], [7]) трудно читаемы в силу отсутствия в то время ясных понятий, относящихся к данной области математики. Да и методы исследования были слишком громоздки. Методы, разработанные Э. Картаном [13] и С.П. Финиковым [33] позволили сделать доказательства более прозрачными. Начиная с шестидесятых годов прошлого столетия появилось довольно много работ, относящихся к неголономной геометрии (см., например, [16], [26], [4], [5], [1], [21], [31], [29]). Достаточно полный перечень работ, относящихся к линейчатой неголономной геометрии содержится в [35].

С течением времени менялась терминология. Совокупность интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа Э. Бортолотти [36] назвал неголономной поверхностью. Этот термин использовали после него и другие авторы (см., например, [26]), понимая, что «неголономная поверхность» не является поверхностью, даже если уравнение Пфаффа вполне интегрируемо. Но в последнем случае пространство расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей. Использовался также термин «Пфаффово многообразие» (см. [29]).

Изменилась терминология в связи с использованием идей неголономной геометрии на n-мерных гладких многообразиях $\mathfrak{M}_n$. Появилось понятие k – мерного распределения как гладкого отображения, сопоставляющее всякой точке $x \in \mathfrak{M}_n$ k-мерное подпространство касательного пространства $T_x\mathfrak{M}_n$ ([9], [12], [16], [31], [32]).

По k-мерному распределению однозначно определяется система из *(n-k)* независимых уравнений Пфаффа. Распределение называется голономным, если система уравнений Пфаффа вполне интегрируема [23], то есть если через каждую точку $x \in \mathfrak{M}_n$ проходит k-мерное интегральное многообразие, которое в каждой своей точке касается плоскости распределения. В этом случае на $\mathfrak{M}_n$ возникает k-мерное слоение [12], то есть через каждую точку $x \in \mathfrak{M}_n$ проходит одно k-мерное многообразие, гладко зависящие от точки многообразия (см. классическую теорему Фробениуса [23], [34]).

Если система из *(n-k)* уравнений Пфаффа, связанная с распределением, не является вполне интегрируемой, то есть не имеет интегральных многообразий размерности k, то распределение называется неголономным.

Неголономная геометрия это геометрия гладкого многообразия, на котором задано неголономное распределение [9].

Заметим, что в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ геометрия гладкого *(n-1)*-мерного распределения тесно связана с геометрией векторного поля. Действительно, если задано гладкое векторное поле без особых точек (то есть задано гладкое отображение, сопоставляющие каждой точке $M \in \mathbb{E}_n$

вектор $\bar{v}$), то по нему определяется единственное *(n-1)*-мерное распределение, сопоставляющее точке M гиперплоскость π_{n-1} ортогональную вектору $\bar{v}$ в этой точке. И наоборот, по распределению определяется векторное поле, где – единичный вектор, ортогональный π_{n-1} . Таким образом, существует тесная связь между неголономной геометрией и геометрией векторного поля. Эта связь хорошо прослеживается в работах [2] и [29].

Одна из областей применения неголономной геометрии – это динамика механических систем с неголономными связями. Они появляются в виде не вполне интегрируемых дифференциальных уравнений, например, при описании качения твердого тела по поверхности другого тела с учетом трения. Неголономная геометрия используется в термодинамике (геодезические кратчайшие в [37]).

Векторные поля находят свое приложение при изучении поля скоростей потоков жидкости [28]. Они появились в общей теории относительности. Векторные поля постоянной длины используются при описании жидких кристаллов и ферромагнетиков [2], [18].

Все больше появляется работ по механике, нуждающихся в неголономной геометрии [3], [11], [22] и др. Их больше в последнее время чем математических работ в этой ветви геометрии. Особенно не хватает детальных исследований частных видов неголономных распределений.

Таким образом, все вышеизложенное позволяет считать исследование конкретных неголономных распределений актуальной задачей неголономной геометрии.

Цель работы. Исследовать геометрию неголономных торсов всех видов в трех- и четырехмерном евклидовых пространствах. Дать классификацию этих торсов (подобно тому как в голономном случае мы имеем торсы общего вида, конусы и цилиндры). Определить для каждого класса значение основных инвариантов, его определяющих. Исследовать свойства линий кривизны 1-го и 2-го рода, асимптотических, эквидирекционных и геодезических линий. Доказать теоремы о существовании некоторых частных видов неголономных торсов. Дать сравнение свойств инвариантных кривых, проходящих через точку, в неголономном случае с их голономным аналогом. Исследовать линии тока векторных полей нормалей для неголономных торсов разного вида.

Методы исследования. Работа выполнена методом внешних форм Картана с использованием подвижного репера [33].

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. К ним можно отнести следующие.

- Дана классификация неголономных торсов 1-го и 2-го рода в $\mathbb{E}_3$ и $\mathbb{E}_4$ в зависимости от значений главных кривизн 1-го и 2-го рода.

- Исследованы свойства линий кривизны 1-го и 2-го рода, асимптотических линий, эквидирекционных линий для каждого класса неголономных торсов.

- Доказаны теоремы о существовании ряда частных видов неголономных торсов. Некоторые из этих теорем являются теоремами в целом.

- Исследованы линии тока векторного поля нормалей неголономных торсов.

- Дано сравнение геометрии неголономных торсов разных видов с геометрией их голономного аналога в соответствующих точках.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Могут быть использованы при исследовании векторных полей и в прикладных задачах, приводящих к не вполне интегрируемым дифференциальным уравнениям. Например при изучении динамических систем с неголономными связями частного вида, а также при изучении поля скоростей потоков жидкостей и при описании жидких кристаллов и ферромагнетиков.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Научной студенческой конференции, посвященной 130-летию Томского гос. ун-та и 60-летию механико – математического факультета (Томск, 2008); на Молодежной научной конференции Томского гос. ун-та (Томск, 2010); на Студенческой конференции ММФ ТГУ (Томск, 2010); на Научной конференции с международным участием: Геометрия многообразий и ее приложения (г. Улан-Удэ, БГУ, 2010г.); на Всероссийской школе – конференции по геометрии и анализу (г.Кемерово, 2011г.); на Всероссийской научной школе – конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2011); на Всероссийском конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук. (Ульяновск, 2012). Кроме того, все основные результаты докладывались неоднократно и обсуждались на семинарах кафедры геометрии Томского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации имеется 12 публикаций, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 146 страниц. Список литературы содержит 53 наименования.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования, постановку рассматриваемой задачи, краткое изложение основных резкльтатов.

Первая глава посвящена изучению геометрии неголономных торсов 2-го рода (НТ-2) в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_3$. К ним относятся торсы, для которых равна нулю полная кривизна 2-го рода $(K_2 = 0)$.

НТ-2 в $\mathbb{E}_3$ делится на два класса: 1) торсы, для которых только одна из главных кривизн 2-го рода равна нулю; 2) торсы, для которых обе главные кривизны 2-го рода равны нулю. Так как во втором случае средняя кривизна H равна нулю, то их можно назвать минимальными неголономными торсами 2-го рода (МНТ-2). Кроме того, каждый из этих классов (аналогично голономному случаю) делится на три вида: НТ-2 общего вида, неголономные конусы и цилиндры.

Заметим, что для произвольного двумерного распределения $\Delta: M \to \pi_2$ в $\mathbb{E}_3$ множество плоских элементов (M, π_2) («график» распределения) представляет собой трехмерное многообразие и, следовательно, множество плоскостей π_2 зависит от трех параметров. Однако для НТ-2 множество плоскостей π_2 зависит лишь от двух параметров. Для НТ-2 общего вида множество плоскостей огибают гладкую двумерную поверхность, состоящую из особых точек M_0 распределения. Для неголономного конуса все плоскости π_2 проходят через одну точку M_0

(особую точку). Для неголономного цилиндра плоскости π_2 параллельны одной прямой, неголономный цилиндр особых точек не имеет.

Для всякого НТ-2 через каждую точку M (кроме особой M_0) проходит две асимптотические линии, угол α между которыми определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{2H}{\sqrt{4H^2+\rho^2}}$$

(где H – средняя кривизна, ρ - скаляр неголономности), из которой следует: для МНТ-2 асимптотические ортогональны, а совпадают лишь в голономном случае.

- Для НТ-2 общего вида одна асимптотическая – плоская линия (лежит в плоскости π_2), вторая – пространственная кривая. Для НТ-2 общего вида через точку M проходит две линии кривизны 2-го рода, одна из которых совпадает с плоской асимптотической и с эквидирекционной линией, вторая ортогональна второй асимптотической. Угол β между линиями кривизны 2-го рода определяется формулой

$$\cos\beta = \frac{\rho}{\sqrt{4H^2+\rho^2}}.$$

Откуда следует, что для МНТ-2 через точку M проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода, а в голономном случае линии кривизны ортогональны.

Для НТ-2 общего вида через каждую точку M проходит две линии кривизны 1-го рода, делящие пополам углы между асимптотическими линиями.

- Для неголономного конуса асимптотическая линия, не совпадающая с линией кривизны 2-го рода, является прямой, проходящей через вершину конуса (M_0). А линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, является пространственной кривой, лежащей на сфере с центром в точке M_0.
- Для неголономного цилиндра через каждую точку проходит эквидирекционная поверхность, пересекающая плоскость π_2 по линии, являющейся одновременно асимптотической линией и линией кривизны 2-го рода. Асимптотическая линия неголономного цилиндра, не совпадающая с линией кривизны 2-го рода, представляет собой прямую линию, параллельную неподвижной прямой цилиндра. Линия кривизны 2-го рода неголономного цилиндра, не совпадающая с асимптотической линией является геодезической прямейшей линией.

- Для всех видов МНТ-2, кроме исследования поведения инвариантных кривых, доказаны теоремы о существовании. Особенно важной является теорема (доказанная в целом) для минимального неголономного цилиндра с постоянным скаляром неголономности ρ. **Существует единственный минимальный неголономный цилиндр с постоянным скаляром неголономности.** Уравнение Пфаффа для него имеет вид

$$\sin(\rho z)dx - \cos(\rho z)dy = 0.$$

Через каждую точку M проходит две линии кривизны 1-го рода, представляющие собой винтовые линии, лежащие на двух цилиндрах одинакового радиуса с общей образующей, проходящей через M . Плоскость π_2 - это общая касательная плоскость цилиндров.

Эквидирекционная плоскость ортогональна общей образующей цилиндров. Асимптотические линии – прямые линии. Одна из них – это образующая цилиндров. Вторая ортогональна ей и вектору поля нормалей.

- Со всяким минимальным неголономным конусом $\Delta: M \to \pi_2$ инвариантно связаны два распределения: 1) $\Delta^{'}: M \to \pi_2^{'}$, 2) $\Delta^{''}: M \to \pi_2^{''}$, где $\pi_2^{'}$ и $\pi_2^{''}$ - плоскости, проходящие через касательные к асимптотическим линиям распределения Δ ортогонально π_2. При этом $\pi_2^{''}$ проходит через касательную к той асимптотической, которая совпадает с линией кривизны 2-го рода. Доказано, что $\Delta^{''}$ голономно и определяет на $\mathbb{E}_3$ слоение, слоями которого являются сферы с центром в вершине конуса M_0. Распределение $\Delta^{'}$ представляет собой неголономный конус, не являющейся минимальным.

Вторая глава посвящена изучению геометрии неголономных торсов 1-го рода (НТ-1) в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_3$. К ним относятся торсы, для которых равна нулю полная кривизна 1-го рода $(K_1 = 0)$.

НТ-1 в $\mathbb{E}_3$ (также как и НТ-2) делятся на два класса: 1) торсы, для которых только одна главная кривизна 1-го рода равна нулю; 2) торсы, для которых обе главные кривизны 1-го рода равны нулю.

В первом случае будем говорить о НТ-1 общего вида, во втором – о минимальных НТ-1 (МНТ-1), так как для них равна нулю средняя кривизна.

Доказаны следующие основные свойства НТ-1 общего вида.

- Через каждую точку M для НТ-1 общего вида проходят две взаимно ортогональные линии кривизны 1-го рода.

- Через каждую точку M для НТ-1 общего вида проходит только одна асимптотическая линия, совпадающая с линией кривизны 1-го рода и представляющая собой пространственную кривую с кручением равным половине скаляра неголономности. Нормали НТ-1 вдоль асимптотической линии образуют косую линейчатую поверхность, для которой данная асимптотическая линия является горловой линией.

- Через каждую точку M для НТ-1 проходят две линии кривизны 2-го рода действительные, мнимые или совпадающие. Это зависит от значения инварианта $4H^2 - \rho^2$. В частности, если через M проходят лишь одна линия кривизны 2-го рода, то эта линия делит пополам один из углов между линиями кривизны 1-го рода.

  (Заметим, что в голономном случае $(\rho = 0)$ через точку M проходит две линии кривизны $(при\, H \neq 0)$ или бесконечно много $(при\, H = 0)$.

- Через каждую точку M для НТ-1 общего вида проходит только одна эквидирекционная линия, не являющаяся линией распределения.

Переходим к рассмотрению второго класса НТ-1 для которого обе главные кривизны 1-го рода нули, который мы назвали минимальным из-за того, что средняя кривизна $H = 0$. Но не менее удачным его можно назвать неголономной плоскостью, так как в голономном случае этот класс представляет собой слоение, состоящее из параллельных плоскостей.

- Неголономная плоскость не имеет линий кривизны 2-го рода.

- Всякое направление в плоскости π_2 является главным направление 1-го рода, то есть через точку проходит бесконечно много линий кривизны 1-го рода.

- Всякая линия плоскости π_2 является асимптотической линией.

- Важнейший результат, для неголономной плоскости – это следующая теорема (в целом).

  Теорема 1. *В $\mathbb{E}_3$ существует единственная неголономная плоскость.*

- Неголономная плоскость – это распределение $\Delta: M(x,y,z) \to \pi_2$, где π_2 имеет уравнение

$$2y(X-x)-2x(Y-y)-Z+z=0.$$

  Оно определено во всем пространстве $\mathbb{E}_3$ и не имеет особых точек.

- Линии тока нормалей неголономной плоскости лежат на цилиндрах $x^2+y^2=a^2$ с общей осью l и представляют собой винтовые линии (см.рис.1). Эквидирекционные линии поля нормалей $\overline{N}$ - прямые, параллельные l.
- С полем $\overline{N}$ инвариантно связаны векторные поля: а) векторное поле $\overline{n}$ главных нормалей линий тока поля $\overline{N}$; б) векторное поле $\overline{b}$ бинормалей линий тока поля $\overline{N}$. Для каждого из этих полей прямая l – особая прямая.

- Обозначим Δ_1 распределение ортогональное полю $\bar{n}$, а Δ_2 распределение ортогональное полю $\bar{b}$. Для них доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Распределение Δ_1 голономно и определяет слоение, слоями которого являются круговые цилиндры с общей осью l. (см.рис.3).*

Теорема 3. *Распределение Δ_2 голономно и определяет слоение, слоями которого являются геликоиды (см. рис 4).*

Третья глава посвящена изучению геометрии неголономных торсов 2-го рода (НТ-2) в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_4$. К ним относятся торсы, для которых равна нулю полная кривизна 2-го рода $(K_2 = 0)$.

- НТ-2 в $\mathbb{E}_4$ делится на три класса: I) НТ-2, для которых только одна главная кривизна второго рода равна нулю ($k_1^{(2)} \neq 0$, $k_2^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0$); II) НТ-2, для которых две главные кривизны 2-го рода нули, а третья отличная от нуля ($k_1^{(2)} \neq 0$ $k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$); III) НТ-2, для которых все три главные кривизны 2-го рода имеют нулевое значение ($k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$).

- Для всех классов НТ-2 в $\mathbb{E}_4$ множество касательных плоскостей π_3 зависит от трех параметров. При этом плоскости π_3 могут огибать трехмерную поверхность (M_0), могут проходить через одну точку M_0, могут быть параллельны одной прямой. Согласно этому каждый класс, в свою очередь, делится на три вида: 1) НТ-2 общего вида в $\mathbb{E}_4$, 2) неголономные конусы в $\mathbb{E}_4$, 3) неголономные цилиндры в $\mathbb{E}_4$.

- Для НТ-2 класса ($k_1^{(2)} \neq 0,\ k_2^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0$) через $\forall M \in \mathbb{E}_4$ проходит по крайне мере одна линия кривизны 2-го рода, она соответствует кривизне $k_3^{(2)} = 0$. Эта линия лежит в плоскости π_3 и совпадает с эквидирекционной линией. Касательные к асимптотическим линиям, проходящие через точку M, образуют конус второго порядка. Из всех асимптотических линий, проходящих через M, выделяются две: одна из них лежит в плоскости π_3 и совпадает с линией кривизны второго рода, вторая – пространственная кривая, касательная к которой проходит через точку M_0 огибающей плоскостей π_3.

- Для неголономного конуса класса ($k_1^{(2)} \neq 0,\ k_2^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0$) все плоскости π_3 проходят через одну точку M_0. Асимптотическая линия, касающаяся прямой MM_0, является прямой линией. Вектор нормали неголономного конуса при движении по асимптотической MM_0 меняет свое направление, а, следовательно, меняет свое положение и касательная плоскость π_3.

- Для неголономного цилиндра класса ($k_1^{(2)} \neq 0,$ $k_2^{(2)} \neq 0,\ k_3^{(2)} = 0$) одна из асимптотических линий, проходящих через M, является прямой линией, параллельной неподвижной прямой, которой параллельны все плоскости π_3. Вдоль этой асимптотической (как и для неголономного конуса) меняет свое положение плоскость π_3.

- Для НТ-2 класса ($k_1^{(2)} \neq 0,\ k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$) через каждую точку M проходит две линии кривизны 2-го рода, угол α между которыми вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{2\rho^2}{\sqrt{4(\rho^2)^2 + (k_1^{(2)})^2}}.$$

Отсюда следует, что в голономном случае линии кривизны ортогональны.

Касательные к асимптотическим линиям проходящим через точку M, образуют конус 2-го порядка, лежащий в трехмерной плоскости π_3. Линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ является асимптотической линией, лежащей в плоскости π_3. Линия кривизны 2-го рода, соответствующая кривизне $k_1^{(2)} \neq 0$, является пространственной кривой (не лежащей в плоскости π_3).

- Для неголономного конуса класса $k_1^{(2)} \neq 0,\ k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ асимптотическая линия, касающаяся в точке M прямой MM_0, является прямой. Касательная плоскость π_3 вдоль этой прямой меняет свое положение.

- Для неголономного цилиндра класса $k_1^{(2)} \neq 0,\ k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ асимптотическая линия с касательной, параллельной неподвижной прямой, является прямой линией. Касательная плоскость π_3 вдоль нее меняет свое положение.

- Для неголономных торсов класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ через каждую точку M проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода, лежащая в плоскости π_3 и совпадающая с одной из асимптотических. Конус касательных к асимптотическим линиям, проходящим через M, лежит в плоскости π_3. Характеристическая точка M_0 плоскости π_3 принадлежит конусу касательных к асимптотическим линиям. Асимптотическая линия, касающаяся MM_0, представляет собой пространственную кривую.

- Для неголономного конуса класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ асимптотическая линия, касающаяся прямой MM_0, сама является прямой, а касательная плоскость π_3 вдоль нее меняет свое положение.

- Для неголономного цилиндра класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ в общем случае, как и для неголономного конуса, через каждую точку M проходят асимптотические линии, касательные которых образуют конус 2-го порядка, лежащий в плоскости π_3. Единственная линия кривизны 2-го рода является одновременно асимптотической линией и эквидирекционной.

Но для неголономного цилиндра в $\mathbb{E}_4$ важной является следующая теорема в целом.

Теорема. *Существует единственный неголономный цилиндр класса* $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ *с постоянным тензором неголономности и прямыми линиями тока нормалей.*

Уравнение Пфаффа, соответствующее данному неголономному цилиндру, в некоторой неподвижной системе координат имеет вид

$$\sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z)dx - \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z)dt = 0,$$

$$\rho^3 = const,\ \rho^2 = const,\ \rho^1 = 0.$$

Замечание. Для данного неголономного цилиндра имеем $K_1 = K_2 = 0$ и тем не менее (в отличие от $\mathbb{E}_3$) распределение остается неголономным. Это объясняется тем, что в $\mathbb{E}_4$ зависимость между полными кривизнами 1-го и 2-го рода имеет вид

$$K_2 = K_1 - (\rho^1)^2 k_1^{(1)} - (\rho^2)^2 k_2^{(1)} - (\rho^3)^2 k_3^{(1)},$$

где $\rho^1,\ \rho^2, \rho^3$ - компоненты тензора неголономности. То есть, если распределение голономно, то $K_1 = K_2$ (как и в $\mathbb{E}_3$). Но если $K_1 = K_2$, то это не является признаком голономности распределения в $\mathbb{E}_4$.

Подробно исследована геометрия неголономного цилиндра, о котором идет речь в теореме.

- Дано сравнение геометрии НТ-2 в $\mathbb{E}_4$ с геометрией его голономного аналога.

Четвертая глава посвящена изучению геометрии неголономных торсов 1-го рода (НТ-1) в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_4$. К ним относятся торсы, для которых равна нулю полная кривизна 1-го рода ($K_1 = 0$).

- НТ-1 в $\mathbb{E}_4$ (также как и НТ-2 в $\mathbb{E}_4$) делятся на три класса: I) НТ-2, для которых только одна главная кривизна второго рода равна нулю ($\mathrm{k}_1^{(1)} \neq 0,\ \mathrm{k}_2^{(1)} \neq 0, \mathrm{k}_3^{(1)} = 0$); II) НТ-2, для которых две главные кривизны 2-го рода нули, а третья отличная от нуля ($\mathrm{k}_1^{(1)} \neq 0\ \ \mathrm{k}_2^{(1)} = \mathrm{k}_3^{(1)} = 0$); III) НТ-2, для которых все три главные кривизны 2-го рода имеют нулевое значение ($\mathrm{k}_1^{(1)} = \mathrm{k}_2^{(1)} = \mathrm{k}_3^{(1)} = 0$).

- Класс I) содержит три вида НТ-1: a) $\mathrm{k}_3^{(1)} = 0, \mathrm{k}_1^{(1)} \neq \mathrm{k}_2^{(1)}$, $sign\, \mathrm{k}_1^{(1)} \neq sign\, \mathrm{k}_2^{(1)}$; b) $\mathrm{k}_3^{(1)} = 0, \mathrm{k}_1^{(1)} \neq \mathrm{k}_2^{(1)},\ sign\, \mathrm{k}_1^{(1)} = sign\, \mathrm{k}_2^{(1)}$; c) $\mathrm{k}_3^{(1)} = 0, \mathrm{k}_1^{(1)} = \mathrm{k}_2^{(1)} \neq 0$.

- В случае a) через каждую точку M проходит три взаимно ортогональных линий кривизны 1-го рода. Конус касательных к асимптотическим линиям распадается на пару двумерных плоскостей, пересекающихся по прямой L, совпадающей с касательной к одной из линий кривизны 1-го рода. Две другие линии кривизны 1-го рода делят пополам углы между асимптотическими линиями, касательные к которым лежат в двумерной плоскости π_2, проходящей через M ортогонально L. Нормали НТ-1 меняют своё направление при движении точки по
прямой L.

- В случае b) через точку M проходит только одна вещественная асимптотическая линия, нормали НТ-1 вдоль которой меняет свое направление.

- В случае c) через точку M (как и в случае b) проходит одна асимптотическая, совпадающая с одной из линий кривизны 1-го рода. Нормали НТ-1 вдоль этой линии меняют сове направление. однако случай c) отличается от случая b) прежде всего тем, что через точку M проходят не три линии кривизны 1-го рода, а бесконечно много. Они заполняют двумерную плоскость, ортогональную асимптотической линии.

- Класс II) характеризуется тем, что через каждую точку M НТ-1 проходит множество асимптотических линий, касательные которых заполняют 2-мерную плоскость, совпадающую с плоскостью касательных к линиям кривизны 1-го рода. Нормаль НТ-1 при движении точки вдоль данной плоскости меняют сове направление.

- Для НТ-1 классов I и II дана сравнительная характеристика неголономной геометрии с ее голономным аналогом.

- Класс III) можно назвать неголономной гиперплоскостью, так как в голономном случае мы имеем слоение, слоями которого будут параллельные гиперплоскости.

Для этого класса доказана теорема о существовании в целом.

Теорема. *В четырехмерном евклидовом пространстве существует единственная (с точностью до постоянной) неголономная гиперплоскость.*

Уравнение Пфаффа, определяющее кривые неголономной гиперплоскости в некоторой неподвижной декартовой системе координат имеет вид

$$dy_4 = c(y_3 dy_2 - y_2 dy_3),$$

где $c = const \neq 0$.

Всякая кривая неголономной гиперплоскости является асимптотической линией, а всякое направление плоскости π_3 - главным направление 1-го рода. Через каждую точку М проходит одна линия кривизны 2-го рода, представляющая собой прямую линию. Линии тока векторного поля нормалей неголономной гиперплоскости – это винтовые линии, лежащие в трехмерной плоскости π_3^*, ортогональной линии кривизны 2-го рода.

- Распределения, ортогональные векторным полям главных нормалей и бинормалей винтовых линий, голономны. А потому в первом случае $\mathbb{E}_4$ расслаивается на семейство трехмерных цилиндров $y_2^2 + y_3^2 = b^2$ с 2-мерными плоскостными образующими. Во втором случае $\mathbb{E}_4$ расслаивается на семейство трехмерных цилиндров $y_3 = y_2 tg(cy_4 - m)$,

Образующими которых являются прямые, параллельные оси

Oy_1, а направляющими служат геликоиды

$$y_3 = y_2 tg(cy_4 - m),$$

$$y_1 = b_1.$$

Основные результаты работы

Исследована геометрия неголономных торсов в трехмерном и четырехмерном евклидовых пространствах.

1. Понятия неголономных торсов 1-го и 2-го рода в трехмерном и четырехмерном евклидовых пространствах.
2. Классификация неголономных торсов 1-го и 2-го рода в $\mathbb{E}_3$ и $\mathbb{E}_4$.
3. Особенности геометрии инвариантных линий для каждого класса неголономных торсов.
4. Теоремы о существовании частных видов неголономных торсов, в том числе и теоремы, определяющие некоторые виды неголономных торсов в целом.

Благодарности

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту кафедры геометрии ТГУ Онищук Надежде Максимовне. Благодарю за чуткое руководство, незаменимую помощь и моральную поддержку при написании диссертационной работы, что позволило мне в достаточно сжатые сроки провести большой объем работ, результат которых представлен на защиту.

Литература

1. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве.// Тр.геометр. семинара. – ВИНИТИ АН СССР. 1974. Т.5. С.169-193.
2. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
3. Афонин А.А., Козлов В.В. Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. №1. С. 7-13.
4. Близникас В.И. Дифференциальная геометрия неголономной гиперповехности риманова пространства // Liet. Mat. Rinkinys, Лит. Мат.сб. 1971. Т.11. №1. С.63-74.
5. Близникас В.И. О неголономной поверхности трехмерного пространства проективной связности. // Тр. Геометр. Семинара. ВИНИТИ АН СССР. 1971. Т.3. С.115-124.
6. Вагнер В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий // VIII-ой Международный конкурс на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (1937). Отчет. Казань: Казанское физ.-мат. Общество. 1940.
7. Вагнер В.В. Геометрическая интерпретация неголономных динамических систем.// Тр.семинара по векторному и тензорному анализу. ОГИЗ, 1941. Вып.V. С. 301-327.
8. Васильева О.В. Неголономные поверхности двойного вращения в четырехмерном евклидовом пространстве.// Изв. Вузов. Математика. Казань. Изд-во КГУ. 2006. №6 (529). С.3-13.
9. Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1987. Т.16. С.13.

10. Герц Г.Р., Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: АН СССР, 1959, 386с.
11. Денева Соня. О неголономной задаче качения твердого тела по поверхности.// Гос. Софийский ун-т. Фак. Мат. Инф. Мех-ки. 1988 (1992). №82. С. 111-134.
12. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. С.683.
13. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. М.: МГУ, 1963. 367с.
14. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии.М., 1981. Т.1 347с.
15. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погружных многообразий // Труды Московского математического общества. М: ГИТТЛ.1953. Т.2 355с.
16. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов. // Труды геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР. 1971. Т.3. С.29-48.
17. Монж Г. Приложения анализа к геометрии. М.; Л.: Объединенное научно-техническое изд-во, 1936.699с.
18. Мясников В.П., Гузев М.А. Геометрическая структура поля равновесных напряжений сплошной среды. Модели механики сплошной среды: Тр. Математического центра им.Н.И. Лобачевского. Казань, 2002. Т.15.С.126-151.
19. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве.// Междунар. Конф. По математике и механике: Избр. доклады. Томск, 2003. С.60-68.

20. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве.// Вестник Томского гос. ун-та (Математика и Механика), №3(4), 2008. С.10-21.
21. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве// Тр. Геометр. Семинара. ВИНИТИ АН СССР 1973. Т.4. с. 71-120.
22. Павлов Г.В., Бородин В.С. Движение диска по внутренней поверхности неподвижного вертикального цилиндра.// Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2000. Т.4, №4. С. 82-92, 162.
23. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. –Л.: ГИТТЛ, 1947. 354с.
24. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. 4-ое изд. ГИТТЛ: Москва, 1956, 420с.
25. Рашевский П.К. Тензорная дифференциальная геометрия.// Математика в СССР за 30 лет 1917-1947. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. С.883-918.
26. Роговой М.Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n-мерном пространстве.// Укр. Геом. Журнал. 1968. №5-6. С. 126-138.
27. Синцов. Д.М. Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972. 296с.
28. Слухаев В.В. Двойное поле и цилиндрическое течение жидкости// Сиб. Матем. журнал. 1966. Т.VII/ №5. С. 1115-1129.
29. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. Томск, 1982.96с.
30. Степанов С.Е. Сферическое распределение в евклидовом пространстве// Известия вузов. Математика, КГУ. С. 76-78. 1986, №9.

31. Столяров А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности.// Известия вузов. Математика. 1980. №1 С. 79-82; II Известия вузов. Математика 1980. №2 С. 84-87.
32. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 304с.
33. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана М.- Л. ГИТТЛ, 1948. 432с.
34. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МИР, 1970, 720с.
35. Щербаков Р.Н., Щербаков Н.Р. Неголономная геометрия. Томск: томский университет, 2005.115с.
36. Bortolotti E. Geomempua proiettiva differenziale della superficial anholonome.// Atti dei Congresso dele' Unione Matem. Jtaliana. Firenze. 1937. P.305-311.
37. Carateodory C. Untersudungen über die Grundlagen der Thermodinamic// Math. Ann. 1909. Bd 67. S. 355-386.
38. Schouten J. A. Zur Einbettung und Krummungstheorie nichtholonomer Gebilde// Math.Ann.1930. №103. S.752-783.
39. Synge J.-L. Geometrische in non-holonomic geometry//Math.Ann.1928.№99. P.738-751.
40. Voss A. Geometrische Interpretation der Differentialgleichung Pdx+Qdy+Rdz=0// Math.Ann. 1880.№16. S. 556-570.
41. Vranceanu G.Les espaces non holonomes et leurs applications mechaniques.// Met. Sci math. 1936.№76. P. 1-70.

Статьи автора в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Онищук Н.М., Цоколова (Саранских) О.В. Минимальные неголономные торсы 2-го рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2009. – № 3(7). – С. 42-55. – 1,05 п.л.

[2] Онищук Н.М., Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 2-го рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 1(13). – С. 31-43. – 0,97 п.л.

[3] Онищук Н.М., Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 1-го рода в четерехмерном евклидовом пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 3(15). –С. 32-40. – 0,6 п.л.

[4] Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 1-го рода // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2012. – № 3. – С. 51-61. – 0,8 п.л.

[5] Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 2-го рода в четырехмерном евклидовом пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2012. – № 2(18). – С. 33-51. – 1,5 п.л.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно практических конференциях

[6] Цоколова (Саранских) О.В. О неголономных торсах второго рода // Научная студенческая конференция, посвященная 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета. – Томск: ТГУ, 2008. – С. 33-34. – 0,08 п.л.

[7] Цоколова (Саранских) О.В. Классификация неголономных торсов 2-го рода // Молодежная научная конференция Томского государственного университета. – Томск: ТГУ, 2010. – С. 345-347. – 0,1 п.л.

[8] Цоколова (Саранских) О.В. Двумерные неголономные распределения в трехмерном евклидовом пространстве // Студенческая конференция механико-математического факультета Томского государственного университета. – Томск: ТГУ, 2010. – С. 10-12. – 0,1 п.л.
[9] Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 1-го рода // Научная конференция с международным участием «Геометрия многообразий и её приложения». – Улан-Удэ: БГУ, 2010. – С. 50-57. – 0,6 п.л.
[10] Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные конусы и цилиндры // Всероссийская школа-конференция по геометрии и анализу. – Кемерово: КГУ, 2011. – С. 1-3. – 0,1 п.л.
[11] Цоколова (Саранских) О.В. Неголономные торсы 1-го рода в четырехмерном евклидовом пространстве // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения, 2011. – Казань, 2011. – Т. 44. – С. 314-316. – 0,2 п.л.
[12] Саранских О.В. Неголономные торсы // Всероссийский конкурс научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук: сборник работ победителей. – Ульяновск, 2012. – С. 30-33. – 0,2 п.л.