

На правах рукописи

Жукова Нина Ивановна

ГЕОМЕТРИЯ СЛОЕНИЙ СО СВЯЗНОСТЯМИ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Казань — 2014

Работа выполнена на кафедре геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета ФГАОУ ВПО „Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Национальный исследовательский университет)“.

Научный консультант: Яковлев Евгений Иванович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Кордюков Юрий Аркадьевич,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник ИМ ВЦ УНЦ РАН

Берестовский Валерий Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник ОФ ИМ СО РАН

Степанов Сергей Евгеньевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Финансовая академия при Правительстве РФ

Ведущая организация: Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится 2014 года в часов на заседании
Диссертационного совета Д.212.081.10 при Казанском (приволжском)
федеральном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18,
корп. 2, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского
(приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию слоений, согласованных со связностями Эресмана и Картана. Картановы связности включают в себя такие обширные классы связностей, как аффинные, проективные, конформные, псевдоримановы и римановы, лоренцевы, вейлевы и параболические. Говорят, что на многообразии задана картанова геометрия, если оно является базой главного расслоения, в котором задана картанова связность.

Блюменталь и Хебда ввели дифференциально-топологическое понятие связности Эресмана для слоений как такое распределение, трансверсальное слоению, для интегральных кривых которого определен перенос вдоль кривых в слоях¹. Если слоение образовано слоями субмерсии, то для него понятие связности Эресмана эквивалентно известному понятию связности Эресмана для субмерсии. Связность Эресмана для слоений является ключевым инструментом исследования в данной работе.

Наличие связности Эресмана у слоений, согласованных с геометрическими структурами, позволило диссертанту с единой точки зрения исследовать их дифференциально-геометрические и топологические свойства и доказать теоремы о глобальной структуре таких слоений.

Актуальность темы Теория связностей в расслоенных пространствах занимает центральное место в дифференциальной геометрии. Основные идеи общей теории связностей восходят к Э.Картану. Современная глобальная форма теории связностей на языке расслоений создана Ш.Эресманом.

После введения Р.А.Блюменталем и Дж.Хебдой гомотопического понятия связности Эресмана для слоений эта тематика привлекла внимание ряда современных математиков, таких как В.В.Шурыгин, Р.А.Волак.

Е.И.Яковлев существенно использовал римановы слоения и их связности Эресмана в разработанном им методе решения вариационной задачи с закрепленными концами для многозначных функционалов действия систем с гироскопическими силами. Это позволило ему свести исходную проблему к

¹Blumenthal, R.A. Ehresmann connections for foliations / R.A.Blumenthal, J.J.Hebda // Indiana Univ. Math. J. - 1984. - V. 33, № 4. - P. 597–611.

аналогичной задаче для однозначных функционалов на пространстве путей, соединяющих фиксированную точку с некоторым слоем риманова слоения.

Слоения со связностями Эресмана естественным образом возникают в дифференциальной геометрии. Каждое приводимое риманово многообразие допускает параллельное слоение с интегрируемой связностью Эресмана. Исследованиям параллельных слоений на приводимых римановых многообразиях посвящены работы Я.Л.Шапиро.

Влияние кривизны на геометрию некоторых классов слоений на римановых многообразиях исследовалось в работах В.Ю.Ровенского и С.Е.Степанова. Слоениям со слоевыми структурами посвящены работы Р.А.Блюменталья и Дж.Хебды, а также М.А.Малахальцева. К слоениям со слоевыми структурами относятся лагранжевы слоения, естественным образом возникающие в симплектической геометрии, которые изучались в работах В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко, И.Вайсмана и других. Несколько статей Ю.А.Кордюкова посвящены эллиптическим операторам на римановых слоениях. Однородные пространства с инвариантными слоениями классифицировались В.Н.Берестовским, а также В.В.Горбачевичем. В работах Ш.Касивабары, В.А.Игошина, Р.А.Блюменталья и Дж.Хебды и других доказаны теоремы о разложении односвязных многообразий с двуслоением $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Слоения, согласованные с геометрическими структурами исследовались многими авторами, в том числе в следующих книгах: Б.Л.Рейнхарта „Дифференциальная геометрия слоений“; Ф.Камбера и Ф.Тондеура „Слоенные расслоения и характеристические классы“; П.Молино „Римановы слоения“; Ф.Тондеура „Слоения на римановых многообразиях“; В. Ровенского „Слоения на римановых многообразиях и подмногообразиях “; И. Моердейка и Я.Мркана „Введение в слоения и Ли группоиды“; А.Бежанку и Х.Р.Фарран „Слоения и геометрические структуры“; а также в работе Р.А.Волака „Геометрические структуры на слоеных многообразиях“.

Связности, введенные Эли Картаном, сейчас называются картановыми связностями. Такие связности определяют картановы геометрии, которые можно рассматривать одновременно как обобщение римановой геометрии и однородных пространств. Они были названы Картаном „*espaces generalites*“.

Среди геометрических структур картановы выделяются благодаря их универсальности, поскольку они включают в себя параболические, проективные, конформные, аффинно-связные, псевдоримановы и римановы структуры на многообразиях. Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним, о чем свидетельствуют статьи Д.В.Алексеевского и П.Михора, Е.Альта, Ш.Франца и других, а также монографии Р.Шарпэ², А.Чапа и Я.Словака³. Исследованию проективных преобразований псевдоримановых многообразий посвящена монография А.В.Аминовой⁴.

Проблема существования и строения минимальных множеств является одной из центральных в теории слоений. А.Х.Арансоном, В.З.Гринесом и Ж.Левиттом получена топологическая классификация нетривиальных минимальных множеств потоков и слоений на замкнутых поверхностях рода $p \geq 2$. Минимальные множества римановых слоений исследовались П.Молино⁵, А.Хефлигером, а затем Э.Салем без использования термина “минимальное множество”. Любое слоение на компактном многообразии имеет минимальное множество. Это неверно для некомпактных многообразий. Слоения без минимальных множеств (на некомпактных многообразиях) построены в работах Ж.Бенье и Г.Мейньеза⁶, а также Т.Инабы, М.Куликова.

Наиболее известными и изученными картановыми геометриями являются римановы и конформные. Напомним, что конформной структурой на многообразии M называется класс конформно эквивалентных римановых метрик $[g]$, то есть метрик, отличающихся друг от друга положительным функциональным множителем. Группа конформных преобразований риманова многообразия (M, g) называется *несущественной*, если она является группой изометрий риманова многообразия (M, h) , где $h \in [g]$.

²Sharpe, R.W. Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Grad. Texts in Math. V. 188 / R.W.Sharpe. - New York: Springer, 1997. - 421 p.

³Cap, A. Parabolic Geometries I: Background and General Theory / A.Cap, J.Slovak // AMS: Publishing House, 2009. - 628 p.

⁴Аминова, А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий / А.В.Аминова. - М.: Янус-К, 2002. - 609 с.

⁵Molino, P. Riemannian Foliations. Progress in Math. / P. Molino. - Boston: Birkhauser, 1988. - 339 p.

⁶Beniere, J.-C. Flows without minimal set / J.-C.Beniere, G.Meigniez // Erg. Th. and Dyn. Sys. - 1999. - V. 19, № 1. - P. 21–30.

Лихнерович выдвинул гипотезу о том, что любое компактное n -мерное риманово многообразие, допускающее существенную группу конформных преобразований, при $n \geq 3$ конформно стандартной n -мерной сфере S^n .

Доказательству этой гипотезы посвящены работы М.Обаты, Д.В.Алексеевского, Ж.Ферранд и других. Д.В.Алексеевский показал, что, если группа конформных преобразований некомпактного риманова многообразия M существенная, то M конформно n -мерному евклидову пространству.

С.Таркини⁷, а затем С.Таркини и Ш.Франц⁸ поставили следующий вопрос о конформных слоениях:

Каждое ли конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ на компактном многообразии либо является римановым, либо — $(Conf(S^q), S^q)$ -слоением?

При $q = 2$ это не верно. Существуют конформные слоения коразмерности два, которые не являются ни римановыми, ни $(Conf(S^q), S^q)$ -слоениями. Положительный ответ на поставленный вопрос Ш.Франц и С.Таркини назвали „Аналогом гипотезы Лихнеровича для конформных слоений“ и дали его при некоторых дополнительных предположениях.

Одной из центральных проблем в дифференциальной геометрии является вопрос о том, когда группа преобразований геометрической структуры является конечномерной группой Ли. Решение этого вопроса для различных геометрических структур на многообразиях содержится в классических работах С.Майерса и Н.Стинрода, К.Номидзу, Дж.Хано и А.Моримото, Ш.Эресмана.

В теории слоений с трансверсальными геометриями под автоморфизмами понимаются диффеоморфизмы, отображающие слои в слои и сохраняющие трансверсальные геометрии. Группа всех автоморфизмов слоения $(M, \mathcal{F})$ с трансверсальной геометрией обозначается через $\mathcal{A}(M, \mathcal{F})$. Пусть $\mathcal{A}_L(M, \mathcal{F})$ — нормальная подгруппа группы $\mathcal{A}(M, \mathcal{F})$, образованная автоморфизмами, отображающими каждый слой в себя. Факторгруппа $\mathcal{A}(M, \mathcal{F})/\mathcal{A}_L(M, \mathcal{F})$ называется *группой базовых автоморфизмов* и обозна-

⁷Tarquini, C. Feuilletages conformes / C.Tarquini // Ann. Inst. Fourier. - 2004. - V.52, №2. - P. 453–480.

⁸Frances, C. Autour du theoreme de Ferrand-Obata / C.Frances, C.Tarquini // Annals of Global Analysis and Geometry. - 2007. - V. 21, № 1. - P. 51–62.

чается через $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F})$.

При исследовании слоений $(M, \mathcal{F})$ с трансверсальной геометрической структурой естественно задать вопрос о существовании структуры (конечномерной) группы Ли в группе базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F})$. Эта проблема поставлена И.В.Белько в статье⁹, где исследуются слоения с трансверсальной проектируемой связностью. Первая известная работа о нахождении достаточных условий для того, чтобы некоторая группа базовых автоморфизмов допускала структуру группы Ли, принадлежит Дж.Лесли.

Орбифолды используются в современной теоретической физике в качестве пространства распространения струн. Они также возникают в теории слоений как пространства слоев. Первые результаты по римановой геометрии орбифолдов принадлежат И. Сатаки и У. Терстону.

Истоком теории слоений считаются основополагающие работы Ш.Эресмана и Ж.Риба середины XX столетия. Ш.Эресманом и Ж.Рибом поставлены проблемы локальной и глобальной устойчивости слоев слоений. Известные теоремы Ж.Риба о локальной и глобальной устойчивости слоев стали классическими и вошли в учебники по теории слоений^{10, 11}. Известны также результаты Ш.Эресмана о локальной устойчивости слоев некоторого класса римановых слоений и Ш.Эресмана и С.Вейшу об устойчивости компактных слоев. Дальнейшее развитие геометрической теории слоений, изучающей свойства слоев, связано прежде всего с известными работами Б.Л.Рейнхарта, А.Хефлигера, С.П.Новикова, П. Швейцера и Х.Винкельнкемпера.

Все вышесказанное говорит об актуальности темы исследования.

Цели диссертационной работы I. Развитие теории слоений со связностями, включающее в себя введение связностей Эресмана и групп голономии для слоений с особенностями, и развитие метода Молино, основанного на конструкции слоеного расслоения, подход к геометрическим структурам на орбифолдах как к трансверсальным для ассоциированных слоений.

⁹Белько, И.В. Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением / И.В.Белько // Матем. сб. - 1982. - Т. 117, № 2. - С. 181–195.

¹⁰Тамура, И. Топология слоений / И.Тамура. - М.: Мир, 1979. - 317 с.

¹¹Candel, A. Foliations I. Graduate Studies in Math. / A.Candel, L.Conlon. - AMS: Publishing House, 2000. - 402 p.

II. Применение разработанных методов к решению проблем геометрической теории слоений таких, как: существование и строение минимальных множеств и аттракторов, возможность введения структуры конечномерной группы Ли в группе базовых автоморфизмов, существование структурно устойчивых слоений.

Методы исследования В диссертации применяются методы локальной и глобальной дифференциальной геометрии; методы топологии слоений, включающие слоенные расслоения; результаты и методы теории динамических систем и действий групп.

Научная новизна Полученные результаты являются новыми. Наиболее значимые из них, выносимые на защиту:

1. Введение понятия связности Эресмана и группы $*\mathfrak{M}$ -голономии для слоений с особенностями и доказательство теорем о глобальной устойчивости компактных слоев с конечными группами $*\mathfrak{M}$ -голономии и конечными фундаментальными группами. Критерий изоморфности ростковых групп голономии группам $\mathfrak{M}$ -голономии для регулярных слоений со связностями Эресмана $\mathfrak{M}$.
2. Построение и исследование ассоциированного слоения с особенностями, названного автором ореольным, на многообразии с полным картановым слоением произвольной коразмерности. С помощью ореольных слоений сведение задач о существовании и строении минимальных множеств картанова слоения типа (G, H) к аналогичным задачам о минимальных множествах индуцированного действия группы Ли H . Описание минимальных множеств картановых слоений типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ с компактно вложенной подалгеброй $\mathfrak{h}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, допускающих связность Эресмана.
3. Критерий римановости конформного слоения коразмерности $q \geq 3$. Для неримановых конформных слоений коразмерности $q \geq 3$ — существование аттрактора, являющегося минимальным множеством, и доказательство аналога гипотезы Лихнеровича.

4. Для полных конформных слоений коразмерности $q \geq 3$ – существование глобального аттрактора и описание строения в целом таких слоений. Реализуемость любой счетной подгруппы конформной группы Ли $Conf(S^q)$ в качестве глобальной группы голономии некоторого полного конформного слоения.
5. Построение алгебраического инварианта $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ слоения $(M, \mathcal{F})$ с трансверсальной жесткой геометрией (кратко ТЖГ) в категории $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ слоений с ТЖГ, где изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и трансверсальную геометрию. Доказательство существования и единственности структуры конечномерной группы Ли в группе базовых автоморфизмов произвольного слоения $(M, \mathcal{F}) \in Ob(\mathfrak{F}\mathfrak{E})$ при равенстве нулю его структурной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.
6. Применение слоений со связностями:
 - Приложение результатов о группах базовых автоморфизмов картановых слоений к группам автоморфизмов картановых орбифолдов.
 - Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактными группами изометрий.
 - Два критерия локальной устойчивости компактных слоений. Теорема о глобальной устойчивости компактных слоев конформных слоений.
 - Теоремы о достаточных условиях существования структурно устойчивых надстроечных слоений с заданными компактными слоями.

Практическая и теоретическая значимость Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в фундаментальных исследованиях по геометрии и топологии слоений, согласованных с различными трансверсальными и слоевыми геометрическими структурами: картановыми, включающими в себя параболические, проективные, конформные, римановы, псевдоримановы геометрии, линейные связности и G -структуры конечного типа; а также при исследовании геометрии в целом многообразий, наделенных указанными геометрическими структурами.

Результаты диссертации и разработанные в ней методы могут быть использованы в учебных курсах по геометрии и топологии слоений на механико-математическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского и на физико-математических факультетах других ВУЗов (при чтении спецкурсов, при подготовке бакалаврских и магистерских работ).

Структура и содержание работы Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на разделы (или части) и подразделы, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 279 страниц, включая 4 рисунка. Список литературы состоит из 235 наименований.

В **Главе 1** вводятся и исследуются связности для слоений с особенностями, названные связностями Эресмана или обобщенными связностями Эресмана ([16], [29]). При этом слоения без особенностей называются регулярными.

Для слоения $(M, \mathcal{F})$ с особенностями в смысле Сусмана и Стефана мы определяем связность Эресмана как некоторое обобщенное распределение $\mathfrak{M}$ на многообразии M , позволяющее переносить интегральные кривые распределения $\mathfrak{M}$, называемые горизонтальными, вдоль кривых в слоях слоения, называемых вертикальными. В отличие от регулярного случая такие переносы являются многозначными отображениями. Поэтому мы определяем группу $*\mathfrak{M}$ -голономии $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ произвольного слоя L слоения $(M, \mathcal{F})$ как группу преобразований некоторого фактормножества Ω_a/ρ множества Ω_a горизонтальных кривых с началом в точке a . Слоение $(M, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ называются эресмановыми. Мы предполагаем, что эресманово слоение $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ удовлетворяет условиям:

(C_0) объединение M^0 слоев максимальной размерности является связным подмножеством в M ;

(C_1) для любого особого слоя L существует такой горизонтальный путь $\sigma \in \Omega_a$, $\sigma(0) = a \in L$, что $\sigma(s) \in M^0$ при всех $s \in (0, 1]$;

(C_2) распределение $\mathfrak{M}$ обладает свойством локальной трансверсальной проектируемости.

Нами доказана следующая

Теорема 1.2.3. Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — эресманово слоение с особенностями, удовлетворяющее условиям $(C_0) - (C_2)$. Если существует компактный слой L максимальной размерности с конечной группой голономии $*H_{\mathfrak{M}}(L, x_0)$ (или конечной фундаментальной группой), то все слои этого слоения компактны и имеют конечные группы $*\mathfrak{M}$ -голономии (соответственно, конечные фундаментальные группы).

Теорема 1.2.3 является аналогом известной теоремы Рибба о глобальной устойчивости компактного слоя с конечной фундаментальной группой для слоений класса C^r , $r \geq 2$, коразмерности один на компактных многообразиях.

Нами показано, что римановы и вполне геодезические слоения с особенностями на полных римановых многообразиях обладают естественной обобщенной связностью Эресмана, образованной дополнительным по ортогональности обобщенным распределением. Доказано также, что орбиты любого собственного гладкого действия группы Ли на многообразии образуют слоение с особенностями, допускающее связность Эресмана.

Если $(M, \mathcal{F})$ — регулярное слоение, то введенное нами понятие связности совпадает с понятием связности Эресмана для $(M, \mathcal{F})$, а группа $*\mathfrak{M}$ -голономии $*H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ совпадает с группой $\mathfrak{M}$ -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$, введенной Р.А.Блюменталем и Дж.Хебдой. Поэтому из теоремы 1.2.3 вытекает теорема Р.А.Блюменталю и Дж.Хебды о глобальной устойчивости компактного слоя с конечной группой $\mathfrak{M}$ -голономии для регулярного слоения со связностью Эресмана $\mathfrak{M}^{12}$. Другое доказательство указанной теоремы Р.А.Блюменталю и Дж.Хебды мы получили в качестве применения введенного нами графика $G_{\mathfrak{M}}(M, \mathcal{F})$ слоения $(M, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ ([16], [21]).

Для регулярных слоений нами доказан следующий критерий изоморфности ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$, общепринятой в теории слоений, группе $\mathfrak{M}$ -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$.

Теорема 1.4.1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Для того, чтобы естественный эпиморфизм групп голономии

$$\chi_a: H_{\mathfrak{M}}(L, a) \rightarrow \Gamma(L, a)$$

¹²Blumenthal, R. Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations / R.Blumenthal, J.Hebda // Quarterly J. Math. Oxford. - 1984. - V. 35. - P. 383-392.

был изоморфизмом для любой точки $a \in M$, необходимо и достаточно, чтобы псевдогруппа голономии слоения $(M, \mathcal{F})$, была квазианалитической.

Из теорем 1.2.3 и 1.4.1 вытекает

Следствие 1.4.3. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение, принадлежащее по крайней мере одному из следующих классов: 1) полные слоения с трансверсальной жесткой геометрической структурой в смысле главы 4; 2) трансверсально голоморфные слоения со связностью Эресмана; 3) трансверсально действительные аналитические слоения со связностью Эресмана; 4) G -слоения со связностью Эресмана, включающие в себя симплектические и трансверсально эллиптические слоения со связностью Эресмана. Тогда, если существует компактный слой с конечной ростковой группой голономии, то все слои этого слоения компактны и имеют конечные группы голономии.

Следствие 1.4.3 содержит известные теоремы для различных трансверсальных геометрий, полученные ранее несколькими авторами, в том числе П.Молино, Р.А.Блюменталем, Р.А.Волаком.

Интегрируемые связности Эресмана Здесь все слоения предполагаются регулярными, то есть, без особенностей. Приведем обзор некоторых работ по слоениям с интегрируемой связностью Эресмана, в том числе и диссертанта.

Сохраняя терминологию, предложенную Я.Л. Шапиро, пара трансверсальных слоений дополнительной размерности $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ на многообразии M называется *двуслоением*, если эти слоения образованы слоями субмерсий, то говорят о *двурасслоении*.

Пусть $k : \widetilde{M} \rightarrow M$ — универсальное накрывающее отображение многообразия M с заданным на нем двуслоением $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Если $\widetilde{M} = M_1 \times M_2$, причем индуцированные слоения на $\widetilde{M}$ совпадают с тривиальными слоениями этого произведения, то говорят, что двуслоение $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ *накрыто произведением*. Я.Л.Шапиро назвал такие многообразия S -приводимыми. Любое полное приводимое риманово многообразие допускает пару ортогональных слоений дополнительной размерности и, в силу теоремы Де Рама о разложении, является S -приводимым многообразием. Исследованию геометрии в целом приводимых римановых многообразий посвящены работы Я.Л.Шапи-

ро¹³, ¹⁴, а также Я.Л.Шапиро и диссертанта¹⁵.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$, причем распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо, то есть существует слоение $(M, \mathcal{F}^t)$ такое, что $\mathfrak{M} = T\mathcal{F}^t$. Тогда говорят, $\mathfrak{M}$ — *интегрируемая связность Эресмана* для $(M, \mathcal{F})$. Согласно теореме Ш.Касивабары о разложении односвязных многообразий с двуслоением в произведение¹⁶, если $(M, \mathcal{F})$ — слоение с интегрируемой связностью Эресмана $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = T\mathcal{F}^t$, то двуслоение $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^t)$ накрыто произведением.

Исследованию двуслоений, накрытых произведением, посвящена кандидатская диссертация автора (1976 г.). Описанию глобального строения двуслоений, накрытых произведением, согласованных с дополнительными структурами, образующими некоторую категорию, посвящена статья диссертанта¹⁷. В¹⁸ Я.Л.Шапиро, диссертант и В.А.Игошин указали двуслоения на полных римановых многообразиях, накрытые произведением, и получили теоремы об их строении в целом. Структура многообразий с набором из $k \geq 2$ слоений, накрытых произведением, изучается в статье Я.Л.Шапиро и диссертанта¹⁹ и диссертанта [23].

Глава 2 посвящена исследованию минимальных множеств картановых слоений со связностями Эресмана ([13], [11], [3]).

В разделе 2.1 мы даем новое определение картанова слоения. Такой подход необходим для корректного определения слоеного расслоения, одной из основных конструкций, используемых при изучении картановых слоений. В случае эффективности трансверсальной картановой геометрии, наше опре-

¹³Шапиро, Я.Л. О приводимых римановых пространствах и двулистных структурах на них / Я.Л.Шапиро // ДАН СССР. - 1972. - Т. 206, № 4. - С. 831–833.

¹⁴Шапиро, Я.Л. О приводимых римановых многообразиях в целом / Я.Л.Шапиро // ДАН СССР. - 1972. - Т. 206, № 6. - С. 1305–1308.

¹⁵Шапиро, Я.Л. Глобальная структура приводимых римановых многообразий / Я.Л.Шапиро, Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1980. - № 10. - С. 60–62.

¹⁶Kashiwabara, S. The decomposition of differential manifolds and its applications / S.Kashiwabara // Tohoku Math. J. - 1959. - V. 11. - P. 43–53.

¹⁷Жукова, Н.И. О некоторой категории приводимых двулистных структур / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1976. - № 3. - С. 103–105.

¹⁸Шапиро, Я.Л. Слоения на некоторых классах римановых многообразий / Я.Л.Шапиро, Н.И.Жукова, В.А.Игошин // Изв. вузов. Матем. - 1979. - № 7. - С. 93–96.

¹⁹Шапиро, Я.Л. О приводимых k -листных структурах / Я.Л.Шапиро, Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1977. - № 1. - С. 144–147.

деление эквивалентно определению Р.А. Блюментала²⁰.

Нами показано (предложение 2.1.1), что любое слоение с неэффективной трансверсальной картановой геометрией допускает также эффективную картанову геометрию. Таким образом, исследование топологии указанных слоений сводится к эффективным трансверсальным геометриям.

Основным методом исследования в этой главе является конструкция слоеного расслоения над данным картановым слоением $(M, \mathcal{F})$, содержащая информацию как о трансверсальной геометрии этого слоения, так и о его группах голономии. Впервые конструкция слоеного расслоения была применена в работах П.Молино, а также Ф.Камбера и Ф.Тондеура. Мы существенно используем результаты П. Молино для ϵ -слоений при исследовании слоения $(\mathcal{R}, F)$, полученного поднятием картанова слоения $(M, \mathcal{F})$ на пространство слоеного расслоения $\pi: \mathcal{R} \rightarrow M$.

Мы доказываем существование связности Эресмана для полного картанова слоения (предложение 2.2.2). Показываем, что для неримановых конформных слоений коразмерности $q \geq 3$ полнота эквивалентна существованию связности Эресмана (теорема 3.10.1).

Для картанова слоения $(M, \mathcal{F})$, допускающего связность Эресмана, на том же многообразии M нами построено (теорема 2.6.1) слоение с особенностями $(M, \mathcal{O})$, названное *ореольным*. Слои слоения $(M, \mathcal{O})$, названные *ореолами*, представляют собой объединения слоев слоения $\mathcal{F}$, причем каждый слой $L \in \mathcal{F}$ всюду плотен в содержащем его ореоле. Описано строение слоений, индуцированных на ореолах (теорема 2.6.2).

Напомним, что слой L слоения $(M, \mathcal{F})$ называется собственным, если L — вложенное подмногообразие в M . Слоение называется собственным, если все его слои — собственные.

Картановы слоения образуют категорию $\mathfrak{CF}$, морфизмами которой являются диффеоморфизмы, переводящий слои — в слои, локально сохраняющие трансверсальную картанову структуру.

Для картановых слоений, допускающего связность Эресмана, введена структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ и показано, что она является инвариантом

²⁰Blumenthal, R. Cartan submersions and cartan foliations / R.Blumenthal // Illinois J. Math. - 1987. - V. 31. - P. 327–343.

в категории картановых слоений $\mathfrak{CS}$ (предложение 2.5.1). Для римановых слоений $(M, \mathcal{F})$ на компактных многообразиях алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ совпадает с инвариантом, введенным Молино. При равенстве $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ нулю ореольное слоение сливается с исходным, что всегда выполняется для собственных слоений (предложение 2.6.3).

Напомним, что подмножество многообразия M называется насыщенным, если оно является объединением некоторых слоев слоения $(M, \mathcal{F})$. Непустое, замкнутое, насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в M называется *минимальным множеством* слоения $(M, \mathcal{F})$, если каждый слой из $\mathcal{M}$ всюду плотен в $\mathcal{M}$. Минимальные множества для групп диффеоморфизмов многообразий определяются аналогично слоениям с той разницей, что слои заменяются орбитами группы.

С помощью ореольного слоения показано, что задачи существования и строения минимальных множеств полного картанова слоения сводятся к аналогичным задачам о минимальных множествах индуцированной группы Ли диффеоморфизмов базового многообразия W (теорема 2.7.1).

Установлено, что существование минимальных множеств слоений с особенностями является трансверсальным свойством (следствие 2.7.1).

Рассматриваются картановы слоения $(M, \mathcal{F})$ типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ с компактно вложенной подалгеброй Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, когда группа Ли H имеет конечное число компонент связности. Предполагается существование связности Эресмана для $(M, \mathcal{F})$. Доказано, что такие слоения являются римановыми, а замыкание любого слоя совпадает с ореолом и образует минимальное множество (теорема 2.8.1). Структура таких слоений коразмерности $q = 1$ описывается теоремой 2.8.2.

Глава 3 посвящена конформным слоениям ([8], [4], [11]). Мы показываем, что группа голономии произвольного слоя конформного слоения изоморфна некоторой подгруппе группы Ли $H = CO(q) \ltimes R^q$, причем эта подгруппа определена с точностью до сопряженности (предложение 3.1.1). Поэтому корректно следующее определение. Группа голономии слоя конформного слоения называется нами *несущественной*, если соответствующая ей подгруппа в группе Ли H относительно компактна. В противном случае группа

голономии слоя называется *существенной*.

Прежде всего мы доказываем следующий критерий римановости конформного слоения.

Теорема 3.2.1. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, моделируемое на конформной геометрии $(N, [g])$. Тогда для существования римановой метрики $d \in [g]$ такой, что $(M, \mathcal{F})$ — риманово слоение, моделируемое на (N, d) , необходимо и достаточно, чтобы все группы голономии этого слоения были несущественными.*

Непустое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, для которого существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$, что замыкание произвольного слоя из $\mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$ содержит множество $\mathcal{M}$, называется *аттрактором* этого слоения, а окрестность $\mathcal{U}$ называется бассейном аттрактора $\mathcal{M}$ и обозначается через $Attr(\mathcal{M})$. Если, более того, $Attr(\mathcal{M}) = M$, то аттрактор $\mathcal{M}$ называется *глобальным*.

Аналогично определяются аттракторы и глобальные аттракторы для групп диффеоморфизмов.

Применение теоремы 3.2.1, введенных автором нехаусдорфовых конформных многообразий и предложения Алексеевского-Йошимацу-Ферранд позволило нам доказать следующее свойство конформных слоений. Подчеркнем, что при этом компактность слоеного многообразия M не предполагается.

Теорема 3.5.1. *Любое конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ либо является римановым, либо имеет аттрактор, являющийся замыканием слоя с существенной группой голономии, причем сужение слоения на бассейн аттрактора есть $(Conf(S^q), S^q)$ -слоение.*

Слой L называется *замкнутым*, если L является замкнутым подмножеством многообразия M .

Следствие 3.9.1. *У любого собственного нериманова конформного слоения коразмерности $q \geq 3$ существует замкнутый слой с существенной группой голономии, являющийся аттрактором.*

Теорема 3.6.1 описывает структуру конформных слоений на компакт-

ных многообразиях.

Теорема 3.6.1. *Любое конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ на компактном многообразии M либо риманово; либо $(Conf(S^q), S^q)$ -слоение. В последнем случае оно имеет конечное число минимальных множеств, все они — аттракторы, образованы замыканиями слоев с существенными группами голономии, причем каждый слой слоения принадлежит бассейну по крайней мере одного из них.*

Из теоремы 3.6.1 следует положительный ответ на сформулированный выше вопрос С.Таркини и Ш.Франца о конформных слоениях коразмерности $q \geq 3$ на компактных многообразиях, названный ими „Аналогом гипотезы Лихнеровича для конформных слоений“.

Теорема 3.6.1 при $q \geq 3$ усиливает первую часть основной теоремы Б.Диройна и В.Клепцына²¹, согласно которой любое конформное слоение на компактном многообразии либо допускает трансверсальную инвариантную меру, либо имеет конечное число минимальных множеств с вероятностными мерами, обладающими некоторыми свойствами. Как отмечено во введении указанной работы, Э.Жисом была высказана гипотеза о том, что в отсутствие аттракторов инвариантная мера задается римановой метрикой. Из теоремы 3.6.1 диссертанта вытекает, что эта гипотеза Э.Жиса верна.

Разработанные нами методы и развитие некоторых идей Ш.Франца позволяют нам обобщить все указанные выше результаты для конформных слоений на слоения с трансверсальными параболическими геометриями ранга один [1].

Далее мы доказываем теорему 3.8.1 о строении (G, N) -слоений, допускающих связность Эресмана. Для таких слоений определена глобальная группа голономии $\Psi = \Psi(M, \mathcal{F})$.

Как известно, группа $Conf(S^q)$ изоморфна мебиусовой группе $Mob(q)$. Пусть E^q — q -мерное евклидово пространство, $Sim(E^q)$ — группа Ли всех подобий E^q . Она представляет собой полупрямое произведение $Conf(E^q) = CO(q) \ltimes R^q$ конформной группы $CO(q) = R^+ \cdot O(q)$ и абеле-

²¹Deroïn, B. Random Conformal Dynamical Systems / B.Deroïn, V.Kleptsyn // Geometric And Functional Analysis. - 2007. - V. 17, № 4. - P. 1043–1105.

левой нормальной подгруппы R^q . Любое $(\text{Sim}(E^q), E^q)$ -слоение называется *трансверсально подобным* [13]. Мы доказали (теорема 3.9.1), что любое полное трансверсально подобное слоение коразмерности $q \geq 1$, не являющееся римановым, имеет глобальный аттрактор, а также указали достаточное условие для регулярности этого аттрактора (теорема 3.9.2).

Следующая теорема описывает структуру конформных слоений со связностями Эресмана.

Теорема 3.11.1 *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, допускающее связность Эресмана. Тогда выполняется одно из следующих трех утверждений:*

1) *либо $(M, \mathcal{F})$ — риманово слоение со связностью Эресмана и замыкание каждого слоя образует регулярное минимальное множество;*

2) *либо $(M, \mathcal{F})$ — полное трансверсально подобное слоение с единственным минимальным множеством $\mathcal{M}$, являющимся глобальным аттрактором;*

3) *либо $(M, \mathcal{F})$ накрыто расслоением $r : \widehat{M} \rightarrow S^q$, где $f : \widehat{M} \rightarrow M$ — некоторое регулярное накрытие, и определена глобальная группа голономии $\Psi = \Psi(M, \mathcal{F})$, подгруппа группы Ли $\text{Conf}(S^q)$. Кроме того, в случае 3) выполняется одно из следующих двух утверждений:*

1. *Слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет либо один замкнутый слой, являющийся глобальным аттрактором, либо два замкнутых слоя L_1 и L_2 , объединение которых — глобальный аттрактор.*

2. *Существует единственное нетривиальное минимальное множество $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, совпадающее с замыканием любого слоя с существующей группой голономии и являющееся глобальным аттрактором этого слоения, причем $\mathcal{M} = f(r^{-1}(\Lambda(\Psi)))$, где $\Lambda(\Psi)$ — минимальное множество глобальной группы голономии Ψ .*

В случаях 2) и 3) индуцированное слоение $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ на дополнении $M_0 := M \setminus \mathcal{M}$ является римановым слоением со связностью Эресмана, замыкание слоев которого в M_0 образует риманово слоение с особенностями, причем замыкание $\bar{L}$ в M любого слоя $L \in \mathcal{F}$ из M_0 равно $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, где $\mathcal{L}$ — вложенное подмногообразие в M , совпадающее с замыканием слоя L в

открытом подмногообразии M_0 .

Следствие 3.11.1 У произвольного конформного слоения коразмерности $q \geq 3$ со связностью Эресмана существует минимальное множество.

Следствие 3.11.2 Любое полное конформное слоение коразмерности q , где $q \geq 3$, либо является римановым, либо — $(Conf(S^q), S^q)$ -слоением.

Согласно теореме 3.11.1, трансверсальное строение глобальных аттракторов полных конформных слоений полностью определяется строением аттракторов глобальных групп голономии этих слоений.

Следствие 3.12.1 Полное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор, являющийся исключительным (или экзотическим) минимальным множеством тогда и только тогда, когда его глобальная группа голономии Ψ имеет глобальный аттрактор, являющийся исключительным (соответственно, экзотическим) минимальным множеством.

Применяя теорему 3.11.1, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3.12.2 Любое собственное конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$, допускающее связность Эресмана, имеет строение одного из следующих трех типов:

- 1) слоение $(M, \mathcal{F})$ является римановым со связностью Эресмана, каждый его слой замкнут, а пространство слоев гладкий q -мерный орбифолд;
- 2) слоение $(M, \mathcal{F})$ является полным трансверсально подобным неримановым слоением на некомпактном многообразии M , имеет единственный замкнутый слой L_0 , представляющий собой глобальный аттрактор;
- 3) $(M, \mathcal{F})$ является полным (Ψ, S^q) -слоением, накрытым расслоением $r : \widehat{M} \rightarrow S^q$, где Ψ — элементарная дискретная подгруппа конформной группы $Conf(S^q)$. Либо существует один замкнутый слой, являющийся глобальным аттрактором, либо существуют два замкнутых слоя L_1 и L_2 , объединение которых — глобальный аттрактор.

Более того, в случаях 2) и 3) объединение M_0 незамкнутых слоев представляет собой открытое связное всюду плотное подмногообразие, причем $(M_0, \mathcal{F}_{M_0})$ — риманово слоение со связностью Эресмана, пространство слоев

которого есть гладкий q -мерный орбифолд, а замыкание $\bar{L}_\alpha$ в M произвольного слоя L_α из M_0 равно $L_\alpha \cup \mathcal{M}$.

Следствие 3.11.3 Каждое полное собственное нериманово конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ имеет один или два замкнутых слоя.

Теорема 3.12.1 о реализации доказана нами конструктивным путем.

Теорема 3.12.1 Любая счетная подгруппа Ψ группы $Conf(S^q)$, где $q \geq 3$, реализуется в качестве глобальной группы голономии некоторого двумерного конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ коразмерности q . Если группа Ψ имеет конечное число образующих, то такое слоение $(M, \mathcal{F})$ существует на замкнутом многообразии M размерности $q + 2$.

Построены примеры полных конформных слоений, глобальные аттракторы которых являются регулярными, исключительными и экзотическими минимальными множествами (раздел 3.13).

В Главе 4 ([12], [28]) мы вводим понятие жестких геометрий. При этом жесткие геометрии в смысле М. Громова²² также, как картановы геометрии, входят в этот класс. Слоения, допускающие в качестве трансверсальной структуры эффективную жесткую геометрию, называются нами для краткости *слоениями с ТЖГ*. По аналогии с картановыми слоениями определяются полнота и структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ таких слоений.

Через $\mathfrak{F}_{TRG}$ обозначается категория слоений с трансверсальными жесткими геометриями. Автоморфизмом слоения $(M, \mathcal{F})$ в категории с $\mathfrak{F}_{TRG}$ является диффеоморфизм многообразия M , переводящий слои — в слои и сохраняющий трансверсальную геометрию (определение 4.4.1). Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение с фиксированной трансверсальной жесткой геометрией, $\mathcal{A}(M, \mathcal{F})$ — группа его автоморфизмов в категории $\mathfrak{F}_{TRG}$. Факторгруппа $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F}) := \mathcal{A}(M, \mathcal{F}) / \mathcal{A}_L(M, \mathcal{F})$, где $\mathcal{A}_L(M, \mathcal{F}) := \{f \in \mathcal{A}(M, \mathcal{F}) \mid f(L) = L \quad \forall L \in \mathcal{F}\}$ — нормальная подгруппа слоевых автоморфизмов, называется *группой базовых автоморфизмов слоения $(M, \mathcal{F})$* . Из теоремы 4.8.1 вытекает

²²Gromov M. *Rigid transformations groups* // Geometrie differentielle (Paris, 1986), Travaux en Cours, 33. Paris: Hermann. 1988. P. 65–139.

Теорема. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — полное слоение с трансверсальной жесткой геометрией (N, ξ) , где $\xi = (P(N, H), \omega)$. Если структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, \mathcal{F})$ равна нулю, то группа всех базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F})$ является группой Ли, причем ее размерность удовлетворяет неравенству

$$\dim \mathcal{A}_B(M, \mathcal{F}) \leq \dim P. \quad (1)$$

Кроме того, топология и структура группы Ли в $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F})$ определены однозначно, а оценка (1) точная.

Нами найдены также некоторые топологические условия, достаточные для выполнении условий данной теоремы, в частности, для собственных слоений эти условия заведомо выполняются. Рассмотрено приложение к картановым слоениям (теорема 4.10.1). Построены примеры вычисления групп базовых автоморфизмов (раздел 4.11).

Глава 5 посвящена приложениям слоений со связностями.

В части 1 мы исследуем геометрические структуры на орбифолдах. Результаты этого раздела опубликованы в [30], [14], [27].

Ассоциированным слоением с орбифолдом $\mathcal{N}$ мы называем любое слоение $(M, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана, пространство слоев которого $M/\mathcal{F}$ совпадает с $\mathcal{N}$. При исследовании групп преобразований q -мерных орбифолдов $\mathcal{N}$ естественно применить каноническое ассоциированное слоение $(M, \mathcal{F})$, являющееся главным $GL_e(R, q + 1)$ -расслоением над $\mathcal{N}$, как это сделано нами в этой главе. Мы замечаем, что картанова геометрия на орбифолде является трансверсальной геометрией для ассоциированного слоения, доказываем, что группа автоморфизмов $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \xi)$ орбифолда, наделенного картановой геометрией, канонически изоморфна группе базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B(M, \mathcal{F})$ указанного ассоциированного картанова слоения. Поскольку структурная алгебра Ли любого ассоциированного картанова слоения равна нулю, то, применяя результаты главы 4 для групп базовых автоморфизмов этих слоений, мы получаем, что группа всех автоморфизмов картанова орбифолда допускает единственную структуру группы Ли и находим оценки размерности этой группы (теорема 5.1.2).

Применение индуцированной группы автоморфизмов страты орбифолда, введенной диссертантом в работе с А.В.Багаевым [31], позволяет получить

более точные оценки размерности группы автоморфизмов геометрической структуры орбифолда, учитывающие его стратификацию.

Полученные результаты применены к известным классам картановых связностей: аффинным, проективным и псевдоримановым геометриям на орбифолдах и диссертантом получены теоремы 5.1.3 — 5.1.5.

Часть 2 **Главы 5** посвящена классификации лоренцевых метрик с некомпактными группами изометрий на двумерных компактных орбифолдах. Результаты этой части опубликованы совместно с Е.А.Рогожиной в [5].

Как известно, среди замкнутых лоренцевых поверхностей только плоские торы могут допускать некомпактную полную группу изометрий. Кроме того, для любого $n \geq 3$ стандартный плоский n -мерный тор с канонической метрикой имеет некомпактную полную группу Ли изометрий. Нами показано, что при $n = 2$ это не верно (пример 5.2.1).

М.Деффаф, К.Мельник и А.Зегхиб²³ поставили проблему классификации замкнутых лоренцевых многообразий с некомпактными полными группами Ли изометрий. Естественно поставить эту проблему для более широкого класса объектов — лоренцевых орбифолдов.

Эта задача решена нами в размерности $n = 2$ для поверхностей (теорема 5.2.2) и для двумерных орбифолдов (теоремы 5.2.3–5.2.4), не являющихся многообразиями.

Диссертантом доказано, что любой двумерный собственный компактный лоренцев орбифолд с некомпактной полной группой Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ изоморфен в категории **Orb** стандартной подушке, т.е., $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$, где $\Psi_0 = \langle \psi_0 \rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\} \rangle$. Показано, что группа сохраняющих ориентацию изометрий лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ изоморфна полупрямому произведению групп $\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ (теорема 5.2.3).

Пусть $\mathbb{K}$ — множество упорядоченных четверок целых чисел (a, b, c, d) , удовлетворяющих соотношениям

$$ad - bc = 1, \quad a + d > 2 \quad (3)$$

и обладающих свойством:

²³Deffaf, M. Actions of noncompact semisimple groups on Lorentz manifolds / M.Deffaf, K.Melnick, A.Zeghib // GAFA. - 2008. - V. 18. - P. 463–488.

(S) не существует такого, отличного от ± 1 , общего делителя k трех чисел $(a - d)$, b , c , что целые числа a_1, b_1, c_1, d_1 , где $a - d = k(a_1 - d_1)$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, удовлетворяют соотношениям (3).

Равенство $s(a, b, c, d) = (d, -b, -c, a)$ определяет инверсию $s : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Рассмотрим группу S с образующей s , изоморфную $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{K}/S$ — пространство орбит группы S , а $\mu : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — факторотображение. Обозначим орбиту точки $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}$ через $[a, b, c, d]$. Тогда $\mathcal{K} = \{[a, b, c, d] \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{K}\}$.

Напомним, что две лоренцевы метрики g_1 и g_2 на многообразии M называются *подобными*, если они отличаются постоянным множителем, т.е., если существует число $\lambda \neq 0$ такое, что $g_2 = \lambda g_1$. Подобие — отношение эквивалентности на множестве всех лоренцевых метрик многообразия M . Класс эквивалентности, содержащий g , обозначается через $[g]$. Подобные лоренцевы метрики имеют равные полные группы изометрий.

Диссертантом получена следующая классификация лоренцевых метрик на замкнутых 2-орбифолдах с некомпактной полной группой изометрий [5].

Теорема 5.2.4. *Рассмотрим орбифолд $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$, где $\Psi_0 = \langle \psi_0 \rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\} \rangle$, именуемый стандартной подушкой, и факторотображение $r : M \rightarrow \mathcal{N}$. Обозначим через $\mathcal{L} = \{[g_{\mathcal{N}}]\}$ множество классов подобных лоренцевых метрик на орбифолде $\mathcal{N}$ с некомпактной полной группой изометрий. Тогда определена биекция*

$$\alpha : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L} : [a, b, c, d] \mapsto [g_{\mathcal{N}}],$$

причем лоренцева метрика $g = r^*g_{\mathcal{N}}$ на торе $\mathbb{T}^2$ является полной, плоской и в стандартном базисе задана матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -2c & a - d \\ a - d & 2b \end{pmatrix}.$$

Следствие 5.2.3. *Полная некомпактная группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ является счетной.*

В части 3 **Главы 5** ([3], [21], [25]) автором доказаны следующие два критерия локальной устойчивости слоев (в смысле Эресмана и Роба) для

компактных слоений без предположения компактности слоеных многообразий.

Теорема 5.3.1. *Компактное слоение $(M, \mathcal{F})$ произвольной коразмерности q локально устойчиво тогда и только тогда, когда псевдогруппа голономии этого слоения является полной и квазианалитической.*

Следствие 5.3.1. *Любое компактное (G, X) -слоение локально устойчиво.*

Теорема 5.3.2. *Для локальной устойчивости компактного слоения $(M, \mathcal{F})$ произвольной коразмерности q необходимо и достаточно выполнения двух условий: существования связности Эресмана и квазианалитичности псевдогруппы голономии этого слоения.*

В качестве приложения результатов главы 3 мы получаем следующую теорему о глобальной устойчивости компактного слоя для конформных слоений без предположения существования связности Эресмана.

Теорема 5.3.4. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение $q \geq 3$ на компактном многообразии M . Если существует компактный слой с конечной ростковой группой голономии, то каждый слой этого слоения компактен, имеет конечную группу голономии, а слоение $(M, \mathcal{F})$ локально устойчиво.*

Аналогичная теорема для голоморфных слоений на компактных кэлеровых многообразиях доказана Д.В.Перейра²⁴.

В части 4 **Главы 5** исследуются вопросы структурной устойчивости слоений. Основные результаты этого раздела опубликованы в статье автора [6].

Мы рассматриваем категорию $\mathcal{Fol}^0$ гладких слоений класса C^r , $r \geq 1$, в которой морфизмом двух слоений $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ является непрерывное отображение $d : M \rightarrow M'$, переводящее слои слоения $\mathcal{F}$ в слои слоения $\mathcal{F}'$.

Пусть M — C^r -гладкое многообразие, компактность которого не предполагается. Через $Fol_q(M)$ обозначается множество гладких слоений $(M, \mathcal{F})$ класса C^r , коразмерности q с топологией Хирша-Эпштейна Θ^r ²⁵.

²⁴Pereira, J.V. Global stability for holomorphic foliations on Kaehler manifolds / J.V.Pereira // Qual. Theory Dyn. Syst. - 2001. - V. 2. - P.381–384.

²⁵Epstein D.B.A. A topology for the space of foliation // Geometry and Topology, Lecture Notes in Math.

Определение 5.4.2. Слоение $(M, \mathcal{F})$ называется структурно устойчивым, если для любой окрестности $U = U(\text{Id}_M)$ в $\text{Homeo}(M)$ существует такая окрестность $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{F}, U)$ слоения $\mathcal{F}$ в $\text{Fol}_q(M)$, что для каждого слоения $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}$ найдётся гомеоморфизм $d \in U$, который является изоморфизмом слоений $(M, \mathcal{F})$ и $(M, \mathcal{F}')$ в категории Fol^0 .

Качественная теория слоений является новой мало изученной областью математики. Как отмечено М.Брунеллой²⁶, в настоящее время имеется мало примеров структурно устойчивых слоений.

Целью данного раздела работы является исследование вопроса:

Какие многообразия могут быть компактными слоями структурно устойчивого слоения на компактном многообразии?

Для доказательства существования структурно устойчивого слоения с данным компактным слоем применяем надстроечные слоения, введенные А.Хефлигером, которые образуют подкласс слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Как известно из работ Дж.Палиса²⁷, диссертанта и Г.И.Чубарова [9], структурная устойчивость слоения, полученного надстройкой гомоморфизма

$$\rho : G = \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Diff}(T),$$

обозначаемого через $(M, \mathcal{F}) = \text{Sus}(T, B, \rho)$, эквивалентна структурной устойчивости представления ρ . В [9] нами предполагаются: компактность многообразия T и конечная порожденность группы G .

Находим достаточные условия для структурной устойчивости некоторых представлений групп (теорема 5.4.1, следствия 5.4.1–5.4.2), доказываем реализуемость этих условий и, применяя их к надстроечным слоениям, мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.4.5. Пусть T и L — компактные C^∞ -многообразия. Предположим, что фундаментальная группа $G := \pi_1(L, b_0)$ имеет абелеву

1976. V. 597. P. 132–150.

²⁶Brunella M. *Remarks on structure stable proper foliations* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1994. V. 115, №1. 111–120.

²⁷Palis, J. Rigidity of centralizers of diffeomorphisms and structural stability of suspended foliations / J.Palis // Lect. Notes in Math. - 1978. - V. 652. - P. 114–121.

нормальную подгруппу G_0 положительного ранга. Тогда существует такое представление $\rho : G \rightarrow \text{Diff}^\infty(T)$, что $(M, \mathcal{F}) = \text{Sus}(T, L, \rho)$ — C^∞ -структурно устойчивое слоение на компактном многообразии M , имеющее компактный слой L и трансверсальное многообразие T .

Благодаря следствиям 5.4.1, 5.4.2, из теоремы 5.4.1 вытекают соответствующие утверждения о структурной устойчивости слоений, полученных надстройками гомоморфизмов $\rho : G = \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Diff}(T)$ разрешимых, в частности, нильпотентных и абелевых групп G .

Построены серии примеров структурно устойчивых слоений с компактными слоями. Нами выделен класс структурно устойчивых слоений, все слои которых компактны и устойчивы в смысле Эресмана и Роба (теорема 5.4.6). Показано, в частности, что любое компактное многообразие с конечной фундаментальной группой реализуется в качестве слоя структурно устойчивого слоения на некотором компактном многообразии (следствие 5.4.4).

Апробация работы Результаты диссертационной работы докладывались более, чем на 40 международных конференциях, в том числе: на международной конференции “Актуальные проблемы математики и механики” (Казань, КГУ, 2004); на международной конференции “Неевклидова геометрия в современной физике и математике”, (Н.Новгород, ННГУ, 2004), на международной конференции „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“, посвященной 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского (Москва, МГУ, 2004), на международной конференции „Топология, анализ и приложение в математической физике“ (Москва, 2005), на международной конференции „Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ“, посвященной столетию С.М.Никольского (Москва, 2005), на „5th International Conference BGL: Methods of Non-Euclidian Geometry in Modern Physics“ (Минск, Беларусь, 2006), на международной конференции на международной конференции „Операторная алгебра и топология“ (Москва, 2007), на международной конференции „Laminations and group actions in dynamics“(Москва, 2007), на международной конференции „Неевклидова геометрия и ее приложения“(Венгрия, г.

Дебрецен, 2008), на международной конференции Центра Эдуарда Чеха (Чешская республика, г.Трешт, 2008), на международной конференции „Нелинейные уравнения и комплексный анализ“ (оз. Банное, Южный Урал, 2009), на „Международной конференции по C^* -алгебрам и эллиптической теории.“ (Польша, Центр Банаха, Бедлево, 2009), на международной конференции „Дифференциальные уравнения и топология“, посвященной 100-летнему юбилею Л.С. Понтрягина (Москва, 2009), на международных конференциях “VII, VIII Колмогоровские чтения“ (Ярославль, 2009, 2010), на 8 Международном Конгрессе „ISAAC-2011“ (Москва, РУДН, 2011), на международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2006, 2008, 2010, 2012); на международных конференциях (Russian-Germann Geometry Meetings) „Alexandroff Readings“ (Санкт-Петербург, 2007, 2012), на международной конференции „Foliations 2012“ (Польша, г. Лодзь, 2012), на международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», посвященной памяти проф. Л.П.Шильникова (Н.Новгород, ННГУ, 2013).

По теме диссертации были также сделаны два доклада на геометрическом семинаре в Гумбольдтском университете в Берлине (1987, руководитель проф. Р.Зуланке); на научном семинаре кафедры дифференциальной геометрии Нижегородского государственного педагогического университета (1994, руководитель доц. Н.А.Степанов); на геометрическом семинаре в Казанском государственном университете (2004, руководитель проф. Б.Н.Шалуков; 2013, руководитель проф. В.В.Шурыгин); на геометрическом семинаре в Московском государственном университете (2004, 2013, руководитель академик А.Т.Фоменко); на заседании Нижегородского математического общества (Н.Новгород, 2004); на геометрическом семинаре в Масарик университете г. Брно, Чешская республика (2008, руководитель проф. Я.Словак); многократно на геометрических семинарах в Нижегородском государственном университете (2001–2013), руководитель проф. Е.И.Яковлев).

Гранты Работа автора по теме диссертации на протяжении ряда лет поддерживалась следующими грантами: грант Международного Научного Фонда (№NP 4000)(Руководитель); грант Международного Научного Фонда и Правительства РФ (№NP 4300)(Руководитель); 1994–1995 гг. Грант РФФИ № 94-01-00492-а (Руководитель); грант Конкурсного Центра Фундаментального Естествознания № 95-0-1.3-87; 1998–1999 гг. Грант РФФИ № 98-01-01148-а (Руководитель); 1999 г. Грант РФФИ № 99-01-10849-з (Руководитель); 2001–2003 гг. Грант РФФИ № 01-01-590-а (Исполнитель, руководитель проф. Е.И.Яковлев); 2004 г. Грант Конкурсного Центра Фундаментального Естествознания № А03-2.8-480 (Руководитель); 2005г. Ведомственная программа "Развитие научного потенциала высшей школы"Грант № 6403 (Руководитель); 2006-2008гг. Грант РФФИ № 06-01-00331-а (Исполнитель, руководитель проф. Е.И.Яковлев); 2008 г. Грант РФФИ № 06-01-08299-а (Руководитель); 2009-2011 гг. ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы“, контракт №П495 (Исполнитель, руководитель проф. Е.И.Яковлев); 2010-2012 гг. Грант РФФИ № 10-01-00457-а (Исполнитель, руководитель проф. Е.И.Яковлев); 2012-2013 гг. ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2012-2013 годы“, контракт № 14.В37.21.0361 (Исполнитель, руководитель проф. А.Д.Морозов); 2012-2013 гг. НИР по заданию Минобрнауки РФ, шифр заявки 1.1907.2011 (Исполнитель, руководитель проф. М.И.Сумин).

Конкретное личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации По теме диссертации опубликовано 35 статей, из которых 24 – в изданиях, рекомендованных ВАК.

9 работ написаны со своими учениками: 4 с А.В.Багаевым, защитившим кандидатскую диссертацию в 2007 г., 3 с Г.В.Чубаровым, защитившим кандидатскую диссертацию в 2013 г., 1 со студенткой Е.А.Рогожиной и 1 с аспиранткой А.Ю.Долгоносовой. В тексте диссертации сделаны соответствующие ссылки. В совместных работах с учениками вклад каждого из соавторов составляет 50%. Остальные 26 статей написаны диссертантом единолично.

Все результаты, выносящиеся на защиту, получены лично автором.

Благодарности

В заключение мне хотелось бы с благодарностью вспомнить моего учителя профессора Якова Львовича Шапиро, который ввел меня в круг задач геометрической теории слоений и с которым написаны мои первые статьи о слоениях.

Выражаю благодарность профессору Гумбольдтского университета в Берлине Рольфу Зуланке, под руководством которого я прошла научную стажировку, обратившему мое внимание на картановы связности, считавшего актуальным исследование слоений, согласованных с ними.

Благодарю моего научного консультанта, профессора Евгения Ивановича Яковлева за полезные обсуждения и замечания.

Я глубоко признательна Михаилу Ивановичу Кузнецову, заведующему кафедрой геометрии и высшей алгебры, и сотрудникам этой кафедры за создание благоприятной атмосферы для проведения научных исследований.

Статьи автора по теме диссертации в журналах из списка ВАК

1. Жукова Н.И. Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один / Н.И.Жукова // Матем. заметки. - 2013. - Т. 93, № 6. - С. 994–946.
2. Zhukova, N.I. The automorphism groups of foliations with transverse linear connection / N.I.Zhukova, A.Yu.Dolgonosova // Cent. Eur. J. Math. - 2013. V. 11, № 12. - P. 2076–2088.
3. Zhukova, N.I. Local and global stability of compact leaves and foliations / N.I.Zhukova // J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. - 2013. - V. 9. - P. 400–420.
4. Жукова Н.И. *Глобальные аттракторы полных конформных слоений* // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 3. С. 79–106.
5. Жукова, Н.И. Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий / Н.И.Жукова, Е.А.Рогожина

- // Сиб. матем. журн. - 2012. - Т. 53, № 6. - С. 1292–1309.
6. Жукова, Н.И. Компактные слои структурно устойчивых слоений / Н.И.Жукова // Тр. МИАН. - 2012. - Т. 278. - С. 102–113.
 7. Жукова, Н.И. Обобщенные надстроечные слоения / Н.И.Жукова, Г.В.Чубаров // Вестник ННГУ. - 2012. - № 5(1). - С. 157–164.
 8. Жукова, Н.И. Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений / Н.И.Жукова // Сиб. матем. журн. - 2011. - Т. 52, № 3. - С. 555–574.
 9. Жукова, Н.И. Критерий структурной устойчивости надстроечных слоений / Н.И.Жукова, Г.В.Чубаров // Вестник ННГУ. - 2011. - № 1. - С. 153–161.
 10. Жукова Н.И. Концы типичных слоев полных картановых слоений / Н.И.Жукова // Матем. заметки. - 2010. - Т. 87, № 2. - С. 316–320.
 11. Жукова Н.И. Вейлевы слоения / Н.И.Жукова // Нелинейная динам. - 2010. - Т. 6, № 1. - С. 219–231.
 12. Zhukova, N.I. Complete foliations with Transversal Rigid Geometries and Their Basic Automorphisms / N.I.Zhukova // Вестник РУДН. Сер. Математика. Физика. Информатика. - 2009. - Вып. 2. - С. 14–35.
 13. Жукова, Н.И. Минимальные множества картановых слоений / Н.И.Жукова // Тр. МИАН. - 2007. - Т. 256. - С. 115–147.
 14. Багаев, А.В. Группы изометрий римановых орбифолдов // А.В.Багаев, Н.И.Жукова // Сиб. матем. журн. - 2007. - Т. 48, № 4. - С. 723–741.
 15. Жукова Н.И. Связность Эресмана для слоений с особенностями и глобальная стабильность слоев / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 2004. - № 10. - С. 45–56.
 16. Жукова, Н.И. Свойства графиков эресмановых слоений / Н.И.Жукова // Вестник ННГУ. Сер. Матем. - 2004. - Вып. 1. - С. 73–87.

17. Багаев, А.В. Группы автоморфизмов G -структур конечного типа на орбиобразиях / А.В.Багаев, Н.И.Жукова // Сиб. Матем. Журнал. 2003. Т. 44, № 2. С. 263–278.
18. Zhukova, N.I. Aspects of the quality theory of suspended foliations / N.I.Zhukova, G.V.Chubarov // J. Differ. Equ. Appl. - 2003. - V. 9. № 3-4. - P. 393–405.
19. Жукова, Н.И. Нехаусдорфовы множества слоений / Н.И.Жукова // Вестник ННГУ. Мат. моделирование и оптимальное управление. - 2001. - Вып. 1. - С. 28–37.
20. Жукова, Н.И. Слоения с локально стабильными слоями / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1996. - № 7. - С. 21–31.
21. Жукова, Н.И. График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1994. - № 2. - С. 79–81.
22. Жукова, Н.И. Слоения, согласованные с системами дифференциальных уравнений произвольного порядка / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1992. - № 9. - С. 42–48.
23. Жукова, Н.И. Слоения, согласованные с системами путей / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1989. - № 7. - С. 5–13.
24. ZhIzv85 Жукова, Н.И. Простые трансверсальные полирасслоения / Н.И.Жукова // Изв. вузов. Матем. - 1985. - № 9. - С. 61–64.

Работы автора по теме диссертации в других изданиях

25. Zhukova, N.I. Local and global stability of leaves of conformal foliations / N.I.Zhukova // in: Foliations 2012. Proceedings of the International Conference Lodz, Poland, 25 – 30 June 2012. - Singapur: World Scientific. - 2013. - P 215–233.
26. Zhukova, N.I. Attractors of conformal foliations // in: Progress in Analysis. Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis,

- its Applications, and Computation. 22-27 August 2011. Moscow, Peoples' Friendship University of Russia. - 2012. - V. 2. - P. 238–247.
27. Bagaev, A.V. The Automorphism Group of Some Geometric Structures on Orbifolds / A.V.Bagaev, N.I.Zhukova // Chapter 16 in: Lie Groups: New Reseach. New York: Nova Science Publishers, 2009. - P. 447–483.
 28. Zhukova, N.I. Groups of basic automorphisms of foliations with transverse rigid geometries / N.I.Zhukova // Acta physica Debrecina. - 2008. - V. 42. - P. 49–63.
 29. Zhukova, N.I. Singular foliations with Ehresmann connections and their holonomy groupoids / N.I.Zhukova // Banach Center Publ. - 2007. - V. 76. - P. 471–490.
 30. Zhukova, N.I. Cartan geometry on orbifolds / N.I.Zhukova // in: Non-Euclidean Geometry in Modern Physics. Proceedings of the Fifth International Conference Bolyai - Gauss - Lobachevsky, B.I. Stepanov Inst. Physics, National Academy of Sciences of Belarus. - 2006. - P. 228–238.
 31. Bagaev, A.V. Affinely connected orbifolds and them automorphisms / A.V.Bagaev, N.I.Zhukova // Procceedings of Fourth International Conference “Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics“. N. Novgorod–Kiev. Kiev: Поліграфічна дільниця НАН України. 2004. P. 31–48.
 32. Zhukova, N.I. Ehresmann connections for singulsar foliations / N.I.Zhukova // J. Dyn. Control Syst. - 2004. - V. 10, № 1. - P. 143–145.
 33. Жукова, Н.И. Слоения со связностями и гипотеза Милле / Н.И.Жукова // в кн.: Фундамент. проблемы мат. и мех. Матем. М.: МГУ, 1994. - Т. 1. - С. 174–177.
 34. Zhukova, N.I. Geometry of foliations with Cartan connections on leaves / N.I.Zhukova // Proc. Intern. Congress of the Assoc. “Women – Math.“ Moscow – Puschino, 1994. V. 3. N.Novgorod: NNGU, 1994. - С. 15–19.
 35. Žukova N. On the stability of leaves of Riemannian foliations / N.Žukova // Ann. Global Anal. and Geom. - 1987. - V. 5, № 3. - P. 261–271.