На правах рукописи

Бикмухаметов Равиль Ильдарович

Вычислимые линейные порядки и естественные отношения на них

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена на *Кафедре алгебры и математической логики ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”.*

Научный руководитель:

Фролов Андрей Николаевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,

ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”

Официальные оппоненты:

Алаев Павел Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,

ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук,

Коровина Маргарита Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,

ФГБУН Институт систем информатики им. А.П. Ершова

Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация : ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 26 марта 2015 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет” по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35., каб. ____

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «____ »____________ 2015 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.081.24

к.ф.-м.н., доц. Еникеев А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Данная работа посвящена изучению алгоритмической сложности естественных отношений на линейных порядках.

Более обще, теория вычислимых моделей занимается изучением вопросов эффективности алгебраических структур и моделей. История изучения подобных структур обширна и берет начало с работ Д. Гильберта и М. Дена. Отечественные исследования в этом направление и становление вычислимой теории моделей как самостоятельного направления современной математической логики обязаны трудам выдающегося математика академика А. И. Мальцева [5], [6]. Одним таким классическим примером изучаемым в рамках этой теории являются вычислимые линейные порядки. Вычислимые линейные порядки широко исследовались многими авторами такими, как Р. Ганди [32], Р. Доуни [21, 22], Р. Доуни и Дж. Найт [25], Р. Доуни и М. Мозес [24], М. Мозес [37, 38, 39] Х. Райс [42], Л. Фейнер [27, 29], А. Н. Фролов [9, 30, 10, 11, 12, 13], Дж. Харрисон [33], Чен [17], Дж. Чишолм и М. Мозес [18], К. Эш [16] и др.

На протяжение истории изучения линейных порядков формировался круг наиболее естественных отношений на них, а именно, отношения соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+, предельности слева P^-. Данные отношения исследовались многими авторами при изучении линейных порядков, их структурных свойств и классификации. М. Мозес [37, 38] показал, что линейный порядок имеет 1-разрешимое представление тогда и только тогда, когда он имеет вычислимое представление с вычислимым отношением соседства. С. С. Гончаров и В. Д. Дзгоев [3] и Дж. Реммел [44] показали, что вычислимый линейный порядок является вычислимо категоричным тогда и только тогда, когда он имеет только лишь конечное число соседних элементов. А. Фролов [13] показал, что линейный порядок является низким тогда и только тогда, когда он имеет $\emptyset'$-вычислимое представление с $\emptyset'$-вычислимым отношением соседства. Г. Ву, Р. Доуни, Ш. Лемпп [26] и А. Фролов [9] в совокупности показали, что спектр отношения соседства либо тривиален, либо замкнут наверх в в.п. степенях.

Отношение блока исследовались, например, в работах М. Мозеса [37, 38], где было показано, что отношение блока вычислимо категоричного 1-разрешимого линейного порядка является вычислимым. Все введенные выше отношения использовались в работе Дж. Тёрбера [46], который исследовал 2-низкие булевы алгебры, порожденные линейными порядками. Также данные отношения использовались в работе П. Е. Алаева, Дж. Тёрбера, А. Н. Фролова [1] для исследования 2-низких квазидискретных линейных порядков. М. Зубков [4] исследовал отношения соседства и блока на начальных сегментах вычислимых линейных порядков, что позволило ему получить более простое доказательство теоремы Коулза-Доуни-Хусаинова [19] о существовании вычислимого линейного порядка с неконструктивизируемым Π^0_2-начальным сегментом. Отношения соседства, предельности справа, предельности слева использовались в работе А. Фролова [30] для описания 2-низких линейных порядков. А именно, им было показано, что $\emptyset''$-вычислимость структуры $\langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}, Q_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}, P^-_{\mathcal{L}} \rangle$, где $\mathcal{L} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}} \rangle$ — линейный порядок, влечёт существование 2-низкого представления порядка $\mathcal{L}$. Этот результат для специальных классов линейных порядков имеет более простой вид: если $\mathcal{L} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}} \rangle$ — дискретный или разреженный линейный порядок, то $\emptyset''$-вычислимость структуры $\langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}, P^-_{\mathcal{L}} \rangle$ влечет существование 2-низкого представления порядка $\mathcal{L}$. Если же $\mathcal{L} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}} \rangle$ — квазидискретный линейный порядок, то из $\emptyset''$-вычислимости структуры $\langle \mathbb{N}, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}, dn_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}, P^-_{\mathcal{L}} \rangle$ следует, что $\mathcal{L}$ имеет 2-низкое представление. Изучению арифметической сложности всех введенных выше отношений также посвящена недавняя магистерская работа У. П. Тёрнера [47]. Из последних результатов видно, что отношения соседства

S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+, предельности слева P^- играют важную роль в исследование линейных порядков.

Классический результат [21] о существование вычислимого, но не 1-вычислимого линейного порядка является непосредственным следствием теоремы о существовании вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$, имеющего порядковый тип ω, такого, что отношение соседства $S_\mathcal{L}$ невычислимо. Нетрудно видеть, однако, что отношения $F_\mathcal{L}$, $dn_\mathcal{L}$, $P^+_\mathcal{L}$, $P^-_\mathcal{L}$ вычислимы. Следовательно, вычислимость отношений блока $F_\mathcal{L}$, плотности $dn_\mathcal{L}$, предельности справа $P^+_\mathcal{L}$ и предельности слева $P^-_\mathcal{L}$ вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ не влечет вычислимости отношения соседства $S_\mathcal{L}$. Возникает вопрос об описании возможной зависимости естественных отношений на вычислимых линейных порядках.

Проблема 1. Получить описание зависимости естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+, предельности слева P^- на вычислимых линейных порядках.

Естественным продолжением исследования является изучение алгоритмической зависимости этих отношений *на вычислимых представлениях* линейных порядков в смысле следующего определения:

Определение 1. Набор отношений $\mathcal{P}_1$ назовем алгоритмически зависимым *на вычислимых представлениях* линейных порядков от набора отношений $\mathcal{P}_2$, если для любого линейного порядка вычислимость отношений из $\mathcal{P}_2$ в некотором его вычислимом представлении влечет существование такого его вычислимого представления, что на нем вычислимы все отношения из набора $\mathcal{P}_1$.

Проблема 2. Описать зависимость естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+, предельности слева P^- *на вычислимых представлениях* линейных порядков.

Первый результат в этом направлении был получен М. Мозесом [37], который показал, что вычислимость отношения блока $F_{\mathcal{A}}$ в некоторой вычислимой копии $\mathcal{A}$ произвольного порядка $\mathcal{L}$ влечет существование такого его вычислимого представления $\mathcal{B}$, что отношение соседства $S_{\mathcal{B}}$ вычислимо. Таким образом, отношение блока и соседства являются алгоритмически зависимыми в вышеуказанном смысле, а именно, если $\mathcal{P}_1 = \{S\}$ и $\mathcal{P}_2 \ni F$, то $\mathcal{P}_1$ алгоритмически зависит от $\mathcal{P}_2$ *на вычислимых представлениях* линейных порядков. Дж. Реммелом и С. С. Гончаровым было показано, что существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ такой, что в любой его вычислимой копии отношение соседства $S_{\mathcal{L}}$ невычислимо. Можно заметить, что (см., например [21]) этот результат также доказывается кодированием $\emptyset'$-вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$, не имеющего вычислимого представления, в вычислимый линейный порядок $\widetilde{\mathcal{L}}$ имеющий порядковый тип $(\eta + 2 + \eta) \cdot \mathcal{L}$. Нетрудно видеть, что порядок $\widetilde{\mathcal{L}}$ является искомым. Подобные конструкции кодирования линейных порядков играют важную роль в теории. К примеру, первый пример нетривиального, то есть невычислимого линейного порядка, был построен Фейнером [27, 29], который показал, что для любого бесконечного Σ^0_3-множества M, не содержащего 0, существует вычислимый линейный порядок типа

$$\zeta + n_0 + \zeta + n_1 + \ldots,$$

где n_0, n_1, $\ldots$ перечисление M в порядке возрастания. Здесь ζ обозначает тип естественного порядка целых чисел $\mathbb{Z}$. Линейный порядок такого типа называется *сильным ζ-представлением* множества M. Ясно, что данное кодирование допускает релятивизацию. Тогда, взяв в качестве M произвольное Σ^0_4-множество, не являющееся Σ^0_3-множеством, получаем, что *сильное ζ-представление* множества M имеет $\emptyset'$-вычислимое представление и не изоморфно *никакому* вычислимому линейному порядку. Используя различные варианты кодирования линейных порядков в работе получено полное описание возможных вариантов алгоритмической зависимости естественных отношений *на вычислимых представлениях* линейных порядков. А именно, доказано, что нет других зависимостей, кроме той, которую установил М. Мозес.

В третьей главе изучаются начальные сегменты линейных порядков. Начальные сегменты вычислимых линейных являются классическим примером подструктуры линейного порядка и предметом многочисленных исследований [32, 43, 19, 15, 4]. Отметим, что сложность начального сегмента вычислимого линейного порядка может быть очень высокой. Согласно результатам Р. Ганди [32] и Дж. Харрисона [33], существует вычислимый линейный порядок с начальным сегментом, изоморфным ω_1^{CK} — наименьшему неконструктивному ординалу. М. Роу [43] показал, что Π_1^0-начальный сегмент вычислимого линейного порядка имеет вычислимое представление. С другой стороны, им был построен пример вычислимого линейного порядка с неконструктивизируемым Π_3^0-начальным сегментом. Р. Коулз, Р. Доуни и Б. Хусаинов [19] показали, что существует вычислимый линейный порядок с Π_2^0-начальным сегментом, не изоморфным никакому вычислимому линейному порядку. Заметим, что доказательство последнего результата использует метод приоритета с бесконечными нарушениями. Более простое доказательство, использующее только лишь приоритет с конечными нарушениями, получено М. В. Зубковым [4]. Для этого им были рассмотрены линейные порядки с добавленными предикатами — отношением соседства и блока. Другими словами, такие структуры $\langle L, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L, <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}\rangle$, где $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}}\rangle$ — линейный порядок. В частности, им были построены такие вычислимые структуры $\langle L, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L, <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}\rangle$, что их Π_1^0-начальные сегменты не имеют вычислимых представлений. Естественным образом возникает вопрос о справедливости вышеуказанных результатов для оставшихся естественных отношений плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-.

Проблема 3. Верно ли, что существуют такие структуры $\langle L, <_{\mathcal{L}}, dn_{\mathcal{L}}\rangle$, $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}\rangle$, что их начальные сегменты не имеют вычислимых представлений?

В совместной работе К. Амбос - Шпис, С. Б. Купер и С. Лемпп [15] показали, противоположно результату Р. Коулза, Р. Доуни и Б. Хусаинова, что каждый Σ^0_2-начальный сегмент любого вычислимого линейного порядка имеет вычислимую копию. Естественным дополнением к этому результату является решение следующей проблемы.

Проблема 4. Верно ли, что каждый вычислимый линейный порядок без наибольшего элемента является Σ^0_2-начальным сегментом наперед заданной Σ^0_2-степени некоторого вычислимого линейного порядка?

Уточнение отсутствия наибольшего элемента существенно, поскольку, если вычислимый линейный порядок имеет наибольший элемент, то он может быть только вычислимым (т.е. Σ_0-) начальным сегментом.

Цели и задачи исследование. Целями настоящей работы являются:

I. исследование алгоритмической зависимости естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^- на вычислимых линейных порядках и *на вычислимых представлениях* линейных порядков;

II. исследование алгоритмической сложности начальных сегментов вычислимых линейных порядков с добавленными отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-, соответственно, и начальных сегментов, принадлежащих арифметическому уровню сложности иерархии множеств.

Следующие задачи исследования можно выделить в качестве основных:

1. получить описание алгоритмической зависимости естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^- на вычислимых линейных порядках и *на вычислимых представлениях* линейных порядков;

2. построить вычислимые линейные порядки с добавленными отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-, соответственно, начальные сегменты которых не имеют вычислимых представлений с вычислимыми отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-;

3. доказать, что каждый вычислимый линейный порядок без наибольшего элемента является Σ^0_2-начальным сегментом наперед заданной Σ^0_2-степени некоторого вычислимого линейного порядка.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории вычислимости и теории счетных линейных порядков. Среди них можно особо выделить технику приоритета с бесконечными нарушениями и технику приоритета в комбинации с $\emptyset'$-оракульной конструкцией.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут послужить инструментом для дальнейших теоретических исследований в теории вычислимого линейного порядка и теории вычислимых моделей. А также могут быть использованы при написании учебных пособий и монографий, и чтение спецкурсов по теории вычислимых моделей в высших учебных заведениях РФ.

Основные результаты диссертации. На защиту выносятся следующие основные результаты исследования:

1. Построена серия вычислимых линейных порядков, демонстрирующая алгоритмическую независимость естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^- на вычислимых линейных порядках;

2. Получено описание алгоритмической зависимости естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^- *на вычислимых представлениях* линейных порядков, а именно, доказано, что нет других зависимостей, кроме той, которую установил М. Мозес [37];

3. Построены вычислимые линейные порядки с добавленными отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-, соответственно, такие, что их Π^0_1-начальные сегменты не имеют вычислимых представлений с вычислимыми отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-;

4. Доказано, что каждый вычислимый линейный порядок без наибольшего элемента является Σ^0_2-начальным сегментом наперед заданной Σ^0_2-степени некоторого вычислимого линейного порядка.

Апробация работы.

По результатам диссертации были сделаны доклады:

- на международной конференции “Мальцевские чтения 2013” (Новосибирск, 2013 г.);

- на научной школе-конференции “Лобачевские чтения 2013” (Казань, 2013 г.);

- на международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (Казань, 2014 г.);

- на международной конференции “Logic Colloquium 2014” (Вена, Австрия, 2014 г.);
- на международной конференции “Мальцевские чтения 2014” (Новосибирск, 2014 г.);
- на научной школе-конференции “Лобачевские чтения 2014” (Казань, 2014 г.);
- на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета 2013–2014 гг.

Публикации. Все основные результаты диссертации опубликованы в работах [49]–[58], из них работы [49]–[52] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 89-и страницах и состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 48 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введение** обоснована актуальность диссертационной работы, приведен краткий обзор работ, посвященных теме исследования, представлены выносимые на защиту результаты.

В **первой главе** приведены необходимые для понимания диссертационной работы предварительные термины, определения и результаты. В **первом параграфе** приводятся основные определения и некоторые центральные результаты теории вычислимости. Во **втором параграфе** даны предварительные сведения теории счетных линейных порядков и некоторые центральные результаты теории, в частности, приведены определения естественных отношений соседства S, блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^- на линейных порядках изучению которых посвящена диссертационная работа, а именно

Определение 1.2.11. Для данного линейного порядка $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}} \rangle$ и для любых $x, y \in L$ определим

1) интервал: $[x, y]_{\mathcal{L}} = \{z \mid x \leqslant_{\mathcal{L}} z \leqslant_{\mathcal{L}} y\}$;

2) бинарное отношение соседства: $S_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow (x <_{\mathcal{L}} y) \ \& \ [x, y]_{\mathcal{L}} = \{x, y\}$;

3) бинарное отношение блока: $F_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow |[x, y]_{\mathcal{L}} \cup [y, x]_{\mathcal{L}}| < \infty$;

4) бинарное отношение плотности интервала:

   $dn_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow (x <_{\mathcal{L}} y) \ \& \ (\forall a, b \in [x, y]_{\mathcal{L}})[a <_{\mathcal{L}} \ b \to \exists z(a <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} b)]$;

5) унарное отношение предельности справа:

$$P^+_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow (\forall y)[y \neq x \to \neg S_{\mathcal{L}}(x, y)];$$

   аналогично,

6) унарное отношение предельности слева:

$$P^-_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow (\forall y)[y \neq x \to \neg S_{\mathcal{L}}(y, x)].$$

Вторая глава посвящена изучению зависимости естественных отношений на линейных порядках. Отправной точкой исследования главы послужил следующий фольклорный результат (см., например [21]).

Предложение 2.1.1. Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω, такой, что отношение $S_{\mathcal{L}}$ невычислимо.

Так как линейный порядок упорядоченный по типу ω содержит один единственный предельный слева элемент, не содержит предельных элементов справа, не содержит плотных интервалов, и все его элементы содержатся в одном блоке, то из вышеприведенного факта следует

Следствие 2.1.2. Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω, такой, что отношение $S_{\mathcal{L}}$ невычислимо, а отношения $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимы.

Основной результат **первого параграфа**, устанавливающий алгоритмическую независимость естественных отношений, является следствием ряда теорем (2.1.3., 2.1.5.-2.1.6.), полученных в работе, и предложения 2.1.1., и сформулирован в виде

Следствие 2.1.8. Пусть $\mathcal{P} = \{S,\ P^-,\ F,\ dn,\ P^+\}$. Для любых $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}$ таких, что $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ и $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$, существует вычислимый порядок $\mathcal{L}$ такой, что все отношения из $\mathcal{P}_1$ невычислимы, тогда как все отношения из $\mathcal{P}_2$ вычислимы.

Таким образом, получен исчерпывающий ответ на проблему 1.

Второй параграф посвящен изучению отношений, которые связаны естественным образом с отношениями предельности слева и предельности справа, а именно, отношений $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ и $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$. Показано, что данные отношения алгоритмически зависимы и получено полное описание их алгоритмической зависимости.

В **третьем параграфе второй главы** изучается алгоритмическая зависимость естественных отношений *на вычислимых представлениях* линейных порядков. Для этого были получены следующие варианты $\emptyset'$-кодировок линейных порядков.

Теорема 2.3.5. Линейный порядок $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}} \rangle$ имеет $\emptyset'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда порядок $(\zeta^2 + \omega + \zeta^2) \cdot \mathcal{L}$ имеет вычислимое представление $\tilde{\mathcal{L}}$ с вычислимыми отношениями соседства $S_{\tilde{\mathcal{L}}}$ и блока $F_{\tilde{\mathcal{L}}}$.

Теорема 2.3.9. Линейный порядок $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}} \rangle$ имеет $\emptyset'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда порядок $((\zeta+1)\cdot\zeta+\eta+(\zeta+1)\cdot\zeta)\cdot\mathcal{L}$ имеет вычислимое представление $\tilde{\mathcal{L}}$ с вычислимыми отношениями соседства $S_{\tilde{\mathcal{L}}}$, блока $F_{\tilde{\mathcal{L}}}$, предельности слева $P^{-}_{\tilde{\mathcal{L}}}$ и справа $P^{+}_{\tilde{\mathcal{L}}}$.

Данные теоремы в совокупности с $\emptyset'$-кодировками, полученными в работах А.Н. Фролова [10, 11], М. Мозеса [37] и $\emptyset''$-кодировкой, установленной Р. Ватником [48], позволяют получить полное описание алгоритмической зависимости естественных отношений *на вычислимых представлениях* линейных порядков.

Следствие 2.3.11. Пусть $\mathcal{P} = \{S,\ F,\ dn,\ P^{-},\ P^{+}\}$. Тогда для любых $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}$ таких, что $\mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ и $S \in \mathcal{P}_1$ влечет $F \in \mathcal{P}_1$, существует линейный порядок $\mathcal{L}$ такой, что все отношения из $\mathcal{P}_2$ вычислимы, а все отношения из $\mathcal{P}_1$ невычислимы ни в какой его вычислимой копии $\tilde{\mathcal{L}}$.

Первый параграф третьей главы посвящен изучению алгоритмической сложности естественных отношений на начальных сегментах вычислимых линейных порядков с добавленными предикатами. М. Зубков показал, что существуют вычислимые линейные порядки с добавленными отношениями соседства S и блока F, соответственно, что их Π^0_1-начальные сегменты не имеют вычислимых представлений. В **первом параграфе** рассмотрены оставшиеся случаи для отношений плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-. Получен ряд результатов, дающих положительный ответ на проблему 3, а именно

Теорема 3.1.4. Существует вычислимая структура $\langle L, <_{\mathcal{L}}, dn_{\mathcal{L}}\rangle$ и Π^0_1-начальный сегмент $\mathcal{I}$ этой структуры, что $\mathcal{I}$ не имеет вычислимого представления.

Доказательство теоремы 3.1.4 разбито на два этапа, а именно, установлены следующие результаты, доказательства которых используют технику приоритета в комбинации с $\emptyset'$-оракульной конструкцией.

Предложение 3.1.5. Для двухэлементного множества $M = \{2, 3\}$ существует такая $\emptyset'$-вычислимая функция f, что $rang(f) = M$ и η-представление M типа

$$1 + \eta + f(0) + \eta + f(1) + \eta + f(2) + \eta + \ldots$$

не имеет вычислимого представления с вычислимым отношением плотности.

Предложение 3.1.6. Для любого непустого множества $M \in \Delta^0_2$, не содержащего 0 и 1, такого, что $M = rang(f)$ для некоторой $\emptyset'$-вычислимой функции f, существует такой вычислимый линейный порядок $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ с вычислимыми отношениями плотности $dn_{\mathcal{L}}$, предельности справа $P^+_{\mathcal{L}}$ и предельности слева $P^-_{\mathcal{L}}$, что $\mathcal{A}$ является Π^0_1-начальным сегментом $\mathcal{L}$ и η-

представлением множества M типа

$$1 + \eta + f(0) + \eta + f(1) + \eta + f(2) + \eta + \dots$$

Ясно, что теорема теорема 3.1.4. следует из предложения 3.1.6., если в качестве множества M взять двухэлементное множество $M = \{2, 3\}$ и функцию f из предложения 3.1.5.

Модификации предложения 3.1.5. в совокупности с предложением 3.1.6. позволяют получить аналогичные результаты для отношений предельности справа P^+ и предельности слева P^-.

Теорема 3.1.11. Существует вычислимая структура $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P^+_{\mathcal{L}}\rangle$ и Π^0_1-начальный сегмент $\mathcal{I}$ этой структуры, что $\mathcal{I}$ не имеет вычислимого представления.

Теорема 3.1.12. Существует вычислимая структура $\langle L, <_{\mathcal{L}}, P^-_{\mathcal{L}}\rangle$ и Π^0_1-начальный сегмент $\mathcal{I}$ этой структуры, что $\mathcal{I}$ не имеет вычислимого представления.

Во **втором параграфе третьей главы** рассматриваются Σ^0_2-начальные сегменты вычислимых линейных порядков. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, доказательство которой проведено с помощью метода бесконечного приоритета на деревьях.

Теорема 3.2.1. Для любого вычислимого линейного порядка $\mathcal{L} = \langle L, <_{\mathcal{L}}\rangle$ без наибольшего элемента и любого множества $M \in \Sigma^0_2$, существует такой вычислимый линейный порядок $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{A} + \eta$, что A является Σ^0_2-начальным сегментом $\tilde{L}$, $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ и $\mathcal{A} \equiv_T M$.

Таким образом, доказано, что каждый вычислимый линейный порядок без наибольшего элемента является Σ^0_2-начальным сегментом наперед заданной Σ^0_2-степени некоторого вычислимого линейного порядка.

В **заключении** излагаются итоги выполненного исследования. Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Андрею Николаевичу Фролову за постановку задач, поддержку в работе и интерес к исследованиям автора, Марату Мирзаевичу Арсланову, Искандеру Шагитовичу Калимуллину, Максиму Витальевичу Зубкову и Марату Хайдаровичу Файзрахманову за внимание к исследованиям автора и активное и плодотворное обсуждение.

Литература

[1] Алаев П., Тербер Дж., Фролов А. Н. *Вычислимость на линейных порядках, обогащенных предикатами* // Алгебра и Логика. – 2009. – Т. 48, – № 5. – С. 549–563.

[2] Арсланов М. М. Рекурсивно перечислимые множества и степени неразрешимости. – Казань: изд-во КГУ. – 1986. – 206 с.

[3] Гончаров С. С., Дзгоев В. Д. *Автоустойчивость моделей*// Алгебра и логика – 1980. – Т. 19, – № 1. – С. 45–58.

[4] Зубков М. В. *О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, – № 5. – С. 564–579.

[5] Мальцев А. И. *Конструктивные алгебры. I* // УМН, 16:3(99) (1961), 3–60.

[6] Мальцев А.И. *О рекурсивных абелевых группах* // Доклады Акад. наук СССР, – 1962. – Т.146, – №5. – С.1009–1012.

[7] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир, 1972. – 624 с.

[8] Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени. – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – 576 с.

[9] Фролов А. Н. *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка* // Известия ВУЗов. Математика. – 2010. – № 7. – С. 73–85.

[10] Фролов А. Н. Δ^0_2*-копии линейных порядков* // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, – № 3. – С. 354–370.

[11] Фролов А. Н. *Линейные порядки. Теоремы кодирования* // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, – № 2. – С. 142–151.

[12] Фролов А. Н. *Ранги η-функций η-схожих линейных порядков* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 3. – С. 96–99.

[13] Фролов А. Н. *Линейные порядки низкой степени* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, – № 5. – С. 1147–1162.

[14] Шенфилд Дж. Степени неразрешимости. – Москва: Наука, 1977. – 192

[15] Ambos-Spies K., Cooper S. B., Lempp S. *Initial Segments of Recursive Linear Orders* // Order. – 1997. – V. 14, – №. 2. – P. 101–105.

[16] Ash C. J. *Categoricity in the hyperarithmetical degrees* // Annals of pure and applied logic. – 1987. – V. 34, – P. 1–34.

[17] Chen K. H. *Recursive well founded linear orderings* // Annals of mathematical logic. – 1978. – V. 13. – P. 117–147.

[18] Chisholm J., Moses M. *Undecidable linear orderings that are nrecursive for each n:* to appear.

[19] Coles R. J., Downey R. G., Khoussainov B. *On Initial Segments of Computable Linear Orders* // Order. – 1997. – V. 14, – № 2. – P. 107–124.

[20] S. B. Cooper. *Partial Degrees and the Density Problem. Part 2: The Enumeration Degrees of the Σ_2^0 Sets are Dense* // The Journal of Symbolic Logic. – 1984. – V. 49, – № 2. – P. 503–513.

[21] Downey R. G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of recursive mathematics. – North-Holland, Amsterdam, 1998. – V. 2. – P. 823–976.

[22] Downey R. G. *On presentations of algebraic structures:* to appear in the proceedings of the EC COLORET network, Marcel Dekker.

[23] Downey R. G., Jockusch C. G. *Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one* // Proc. Am. Math. Soc. – 1994. – V. 122, – № 3. – P. 871–888.

[24] Downey R. G., Moses M. *Recursive linear orderings with incomplete successivities* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 326. – P. 653–668.

[25] Downey R. G., Knight J. F. *Orderings with α-th jump degree $\boldsymbol{0}^{(\alpha)}$* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 14. – P. 545–552.

[26] Downey R. G., Lempp S., Wu G. *On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings* // Journal of Mathematical Logic. – 2010. – V. 10, № 1–2. – P. 83–99.

[27] Feiner L. J. Orderings and Boolean Algebras not isomorphic to recursive ones: Ph.D. Thesis. – MIT, Cambridge, MA, 1967, 89 p.

[28] Feiner L. J. *Hierarchies of Boolean algebras* // J. Symb. Logic. – 1970.– V. 35, – № 3. – C. 365–374.

[29] Feiner L. J. *The strong homogeneity conjecture* // J. Symb. Logic. – 1970.– V. 35, – № 3. – C. 373–377.

[30] Frolov A. N. *Low linear orderings* // Journal of Logic and Computation. – 2010. – V. 22, – No 4. – P. 745–754.

[31] Frolov A. N. *Scattered linear orderings with no computable presentation* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, – No 1. – P. 19–22.

[32] Gandy R. O. *General recursive of finite type and hierarchies of functions* // Ann. Fac. Sci. Univ. Clemmont-Ferrand. – 1967. – V. 35, – No. 4. – P. 5–24.

[33] Harrison J. *Recursive pseudo-well orderings* // Trans. AMS. – 1968. – V. 131. – P. 526-543.

[34] Jockusch C. G., Soare R. I. *Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings* // Annales of Pure and Applied Logic. – 1991. – V. 52. – P. 39–61.

[35] Kach A., Montalbán A. *Cuts of linear orders* // Order. – 2011. – V. 28, – No 3. – P. 593–600.

[36] Kaye R. *Models of Peano Arithmetic*, Volume 15 of Oxford Logic Guides, Oxford University Press, New York, 1991.

[37] Moses M. Recursive Properties of Isomophism Types: Ph.D. Thesis. – Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, 1983.

[38] Moses M. *Recursive linear orders with recursive successivities* // Ann. Pure Appl. Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.

[39] Moses M. *n-recursive linear orderings without $n+1$-recursive copies* // In Logical methods, (Ed. J. Crossley, J. Remmel, R. A. Shore and M. Sweedler). – Birkhäuser, 1993. – P. 572–592.

[40] Odifreddi P. Classical recursion theory. – Amsterdam: North-Holland. – 1989. – 610 p.

[41] Knight J. F., Stob M. *Computable Boolean algebras* // J. Symb. Logic. – 2000. – V. 65, – No 4. – P. 1605–1623.

[42] Rice H. *Recursive and recursively enumerable orders* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83. – P. 277–300.

[43] Raw M. J. S. Complexity of automorphisms of recursive linear orders: Ph.D. Thesis. University of Wisconsin-Madison, 1995.

[44] Remmel J. B. *Recursively categorical linear orderings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 83. – P. 387–391.

[45] Rosenstein J. Linear orderings. – New York: Academic Press, 1982. – 487 p.

[46] Thurber J. J. *Every* low_2 *Boolean algebra has a recursive copy* // Proc. Am. Math. Soc. – 1995. – V. 123, – No. 12. – P. 3859–3866.

[47] Turner W. P. Computable linear orders and Turing reductions: Master's Thesis. – University of Connecticut, 2012.

[48] Watnick R. *A generalization of Tennenbaum's Theorem on effectively finite recursive linear orderings* // Journal of Symbolic Logic. – 1984. – V.49. – P. 563-569.

Публикации автора по теме диссертации

[49] Бикмухаметов Р. И. *Алгоритмическая независимость естественных отношений на вычислимых линейных порядках* // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, – № 3. – С. 80–90.

[50] Бикмухаметов Р. И. *О* Σ^0_2*-начальных сегментах вычислимых линейных порядков* // Алгебра и логика – 2014. – Т. 53, – № 3. – С. 413–415.

[51] Bikmukhametov R. I. *Codings on Linear Orders and Algorithmic Independence of Natural Relations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – Т. 35, – № 4. – С. 326–331.

[52] Бикмухаметов Р. И. *Начальные сегменты вычислимых линейных порядков с вычислимыми естественными отношениями* // Известия высших учебных заведений. Математика, принято в печать.

Тезисы конференций

[53] Бикмухаметов Р. И. *О Σ_2^0-начальных сегментах вычислимых линейных порядков* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2013. – Т. 47. – С. 22–23.

[54] Бикмухаметов Р. И. *О Σ_2^0-начальных сегментах вычислимых линейных порядков* // Электронный сборник тезисов докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук. – 2013. – С. 66–67.

[55] Бикмухаметов Р.И. *Вычислимые линейные порядки и естественные отношения на них* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан.матем. об-ва. – 2014. – Т. 50. – С. 27–29.

[56] Bikmukhametov R. I. *On Σ_2^0-initial segments of computable linear orders* // Abstract Booklet of Logic Colloquium and Logic, Algebra and Truth Degrees. – Vienna, Austria. – 2014. – P. 37–38.

[57] Бикмухаметов Р. И. *О Σ_2^0-начальных сегментах вычислимых линейных порядков* // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань: КФУ. – 2014. – С. 44–45.

[58] Бикмухаметов Р.И. *Вычислимые линейные порядки и естественные отношения на них* // Электронный сборник тезисов докладов международной конференции «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук – 2014. – С. 39–40.