Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. Туполева – КАИ

На правах рукописи

Лисафина Мария Сергеевна

УПАКОВКА КРУГОВ И ЭЛЛИПСОВ В ОГРАНИЧЕННУЮ ОБЛАСТЬ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Казань, 2014

Работа выполнена в Казанском национальном исследовательском техническом университете им. А.Н. Туполева – КАИ.

Научный руководитель: **Галиев Шамиль Ибрагимович**
доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ

Официальные оппоненты: **Кирпичников Александр Петрович**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры Интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами Казанского национального исследовательского технологического университета

Заботин Игорь Ярославич
доктор физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций Казанского (Приволжского) федерального университета

Ведущая организация: Марийский Государственный Университет, г. Йошкар-Ола

Защита состоится «29» января 2015г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском (Приволжском) федеральном университете в 218 аудитории 2 корпуса по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

Электронная версия автореферата размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://www.kpfu.ru

Автореферат разослан «___» _________ 2014г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к задаче упаковок связан, в первую очередь, с их приложениями к различным практическим задачам. Проблема упаковки в двух и многомерных пространствах $E^n,\, n \geq 2$, а также на сфере в $E^n,\, n \geq 3,$ находят важные приложения при кодировании и передачи информации.

Задача упаковки кругов одинакового или разного радиусов в заданную ограниченную область имеет приложения в логистике, заполнении контейнеров при раскрое деталей из дерева, тканей и металлических листов. Также такие проблемы возникают при оптимизации расположений станций различного назначения.

Упаковки эллипсов используются при анализе структур из эллиптических молекул в кристалле, упаковки эллипсоидов используются для анализа структур цементных растворов и в ряде других практических задачах.

Фундаментальные результаты по упаковкам в пространстве и на сфере n-мерного евклидова пространства $E^n,\, n \geq 2$, были получены в работах Л. Фейеша Тота, Г. Фейеша Тота, К. Роджерса, Дж. Конвея, Н. Слоэна, и многих других ученых.

Задачи упаковок на ограниченных множествах в $E^n,\, n \geq 2$, интенсивно исследуются. Для упаковок различных фигур на ограниченных множествах на плоскости разработаны различные модели задач упаковок, которые во многих случаях сводят задачу упаковок к задачам нелинейного программирования, а в случае упаковок прямоугольников к задаче линейного программирования.

Различные подходы к задачам упаковок равных кругов содержатся в работах Биргана Е.Г. и Гентила Дж. М., Биргана Е.Г., Мартинеса Дж.М. и Ронкони Д.П., Кастилло И., Кампаса Ф.Дж. и Пинтера Дж.Д., Лоди А., Мартело С. и Монаки М., Сзабо П.Г., Хифи М. и М`Халлаха Р., Хуанга В., и многих других авторов.

Для исследования упаковок кругов разных радиусов тоже имеется много публикаций, в которых предлагаются различные эвристические процедуры, использующие жадные алгоритмы, например, работы Хуанга В., Ли С., Ли У., Акеба Х. и Ху Р.. В некоторых работах эвристические процедуры используют локальный поиск экстремума целевой функции, например, в работах Пономаренко Л.Д. и Макмака П.М., Стояна У.Г. и Яшкова Г.Н. В работе Жоржа Дж.А., Жоржа Дж.М. и Ламара Б.В. предложены эвристики, использующие кодирование решений с помощью перестановок возможных положений кругов относительно друг друга.

Задачи упаковок эллипсов или эллипсоидов рассмотрены в работах Делане Г., Вайера Д., Хитзлера С. и Мурфи С., Зоу З.У. и Пинсона Р.П., Хираги У., Ху В.Х. и Чень Х.С., Ху В.Х., Чень Х.С. и Ли З. и некоторых других авторов.

По задачам упаковок и родственной ей задаче покрытия много важных результатов получены российскими исследователями, среди них работы следующих авторов: Андрианова А.А., Астарков С.Н., Еремеев А.В., Ерзин А.И., Залгаллер В.А., Залюбовский В.В., Заозерская Л.А., Кабатянский Г.А., Канторович Л.В., Козюрин И.В., Колоколов А.А., Корбут М.Ф., Левенштейн В.И., Мухачева Э.А., Мухтарова Т.М., Фазылов В.Р., Галиев Ш.И. и др.

В большинстве случаев задача упаковки фигур (например, кругов) формулируется как упаковка в заданную область n кругов максимально возможного (и заранее неизвестного) диаметра. В практических задачах, как правило, размеры упаковываемых фигур известны и требуется разместить максимально возможное число выбранных фигур в заданную область. В работе автора рассмотрен именно такой подход к задаче упаковок, когда размеры (параметры) упаковываемых фигур известны.

Цель исследования заключается в эффективном решении задач упаковки кругов одного или двух заданных радиусов в произвольную ограниченную область и равных эллипсов с параллельными и взаимно перпендикулярными большими осями и известными размерами в прямоугольную область.

Задачи исследования:

1. Построить и исследовать математическую модель задачи упаковки равных кругов в произвольную ограниченную область.
2. Построить и исследовать математическую модель задачи упаковки равных эллипсов с параллельными и взаимно перпендикулярными большими осями в прямоугольную область.
3. Построить и исследовать математическую модель задачи упаковки кругов двух заданных радиусов в произвольную ограниченную область.
4. Разработать алгоритмы для решения построенных моделей.
5. Разработать программное обеспечение, позволяющее решать поставленные задачи на основе предложенных моделей и алгоритмов.
6. Провести численные эксперименты, которые характеризуют результативность построенных моделей, алгоритмов и программ.

Методы исследования. В работе использованы методы исследования операций, построения математических моделей, теория оптимизации, численные методы решения оптимизационных задач, в том числе методы решения задач дискретной оптимизации и математического анализа. Для разработки комплекса программ применялись современные методы программирования и библиотека CPLEX.

Научная новизна:

– предложен подход к построению математических моделей, на основе которого
    - ❖ впервые предложены целочисленные линейные модели для задач упаковки равных кругов известного радиуса в произвольную ограниченную область. Ранее использовались только нелинейные модели;
    - ❖ впервые предложены целочисленные линейные модели для задач упаковок равных эллипсов с взаимно параллельными и взаимно перпендикулярными большими осями и заданными размерами эллипсов;
    - ❖ впервые предложены целочисленные линейные модели для задач упаковки кругов двух известных радиусов в произвольную ограниченную область;

– получены условия непересечения горизонтальных (вертикальных) эллипсов и эллипсов с взаимно ортогональными ориентациями; введена метрика для данной задачи и подобраны ее параметры;

– для решения задач целочисленного линейного программирования больших размерностей (полученных на основе сеток на упаковываемом множестве) впервые введены уровни возможных положений решений и веса уровней;

– предложены новые численные алгоритмы приближенного решения указанных задач упаковок, с использованием уровней возможных положений решений и весов уровней;

– разработан комплекс программ для решения указанных задач упаковок;

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы обоснована получением новых результатов, перечисленных в пункте научной новизны. Практическая значимость работы состоит в том, что разработанные модели и алгоритмы могут использоваться для решения практически важных задач раскроя, размещения объектов на заданной территории и исследовании различных задач упаковок.

Достоверность результатов определяется четкими и обоснованными ограничениями рассматриваемых задач, построением и использованием математических моделей, корректным применением математических методов и совпадением численных результатов с известными из литературы.

Апробация работы. Основные материалы и результаты исследований докладывались, обсуждались и получили одобрение на конференциях: III и IV International conference «Optimization and Applications» в 2012 г. в Португалии и в 2013 г. в Черногории, на Международной конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (ДООР-

2013) в Новосибирске в 2013 году, на XVII, XVIII и XX Международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения» в 2009, 2010 и 2012 гг.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, в том числе 4 статьи, 3 из них – в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикаций основных результатов диссертации.

Личный вклад соискателя. При выполнении работ [5, 6, 8-12], выполненных совместно с научным руководителем, соискатель принимал участие в разработке математических моделей, введении уровней положений центров упаковываемых фигур и весов этих уровней. Сравнительный анализ прямоугольного и косоугольного способа построения сеток на упаковываемом множестве, разработка условий непересечения эллипсов, подбор метрики для выяснения непересечения эллипсов, разработка алгоритмов, программного обеспечения и проведение расчетов выполнено лично соискателем.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка цитированной литературы, включающего 106 наименований. Общий объем диссертации насчитывает 125 страниц машинописного текста, включая 45 рисунка и 12 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность проблемы, приведены цели и задачи исследования. Также приведен обзор литературы по теме работы. Приводится структура работы с кратким изложением глав исследования.

В **первой главе** предложен подход к построению математических моделей задач размещения, отличающийся тем, что вместо аналитических соотношений между объектами используются соотношения между узлами построенной сетки. Подход позволяет свести нелинейные зависимости между объектами к линейным соотношениям. На основе такого подхода предлагаются модели целочисленного линейного программирования и методы определения наибольшего возможного числа равных кругов известного радиуса, упаковываемых в заданную связную замкнутую ограниченную область G.

Пусть G – связная ограниченная замкнутая область с непустой внутренностью на плоскости P. Совокупность n равных открытых кругов K_j, $1\le j\le n$, образует упаковку в G, если каждый круг K_j содержится в G, $1\le j\le n$, и каждая точка s из G принадлежит не более чем одному из этих кругов.

Задача С1: Требуется определить максимально возможное число равных открытых кругов известного радиуса r упаковываемых в область G и определить положения их центров.

Задача упаковки равных кругов в связную область G в работе автора заменена на задачу упаковки, когда центры кругов могут располагаться только в некоторых точках дискретного множества T, построенного на G. Для решения построенных задач целочисленного линейного программирования больших размерностей исходная задача упаковки на всем заданном множестве разбивается на задачи упаковки на частях исходного множества. При этом вводятся уровни точек построенного множества T и веса этих уровней. Введение уровней точек дискретного множества и весов уровней позволяют разбивать задачи больших размерностей на подзадачи приемлемых размерностей таким образом, что их решения будут согласованными. Кроме того, введение уровней и весов уровней позволяет решать задачи упаковки кругов с прижиманием их к заданной одной или нескольким сторонам области G.

Мы считаем, что на P введена декартова система координат xOy и пусть $d(s,t)$ – евклидово расстояние между точками s и t. Пусть G^* ($G^*\subset G$) множество всех точек s из G таких, что расстояние от s до ближайшей к ней точки границы области G (frG) не менее чем r: $G^* = \{s \in G : \min_{t\in frG} d(s,t) \ge r\}$. Считаем, что множество G^* не пусто.

Пусть Q – наименьший прямоугольник, содержащий множество G^* и его стороны параллельны осям координат. На множестве Q построим прямоугольную сетку с шагом Δ по осям x и y. Мы полагаем, что Δ делитель r, т.е. $r = k\Delta$, здесь k – целое число, $k \geq 1$. Построим множество $T(\Delta)$ с помощью следующей процедуры.

Процедура 1:

1. $T(\Delta)$ – пустое множество
2. Для каждого i, $1 \leq i \leq N$, если $V_i \cap G^* = \varnothing$, то переходим к следующему значению i, иначе:

   a) если $s_i \in G^*$, то добавляем s_i к множеству $T(\Delta)$;

   b) если $s_i \notin G^*$, то выбираем ближайшую к s_i точку s из G^* и добавляем выбранную точку s к множеству $T(\Delta)$, если ее там нет.

В результате применения процедуры 1 получим некоторое множество из n точек $T(\Delta) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Каждая точка t_i, $1 \leq i \leq n$, принадлежит множеству G^*.

Если последовательно строятся сначала сетка для Δ, а затем для $\Delta/2$, то полагаем, что строятся множества $T(\Delta)$ и $T(\Delta/2)$ по процедуре 1, затем полагаем, что $T(\Delta/2) = T(\Delta) \cup T(\Delta/2)$. Аналогичным образом строим $T(\Delta/2^k)$ по процедуре 1 и затем объединяем его с предыдущим множеством $T(\Delta/2^{k-1})$, полученное множество считаем за $T(\Delta/2^k)$.

Аналогично прямоугольной в работе строится косоугольная сетка, одна образующая линия которой параллельна оси x, а другая параллельна вектору $(1, \sqrt{3})$.

В работе проводится сравнение указанной прямоугольной сетки и косоугольной сетки с точки зрения, какая из них лучше для аппроксимации другой. Выяснено, что прямоугольная сетка лучше аппроксимирует косоугольную сетку, чем косоугольная прямоугольную.

Пусть задано указанное выше множество G, в которое упаковываются круги радиуса r; выбрана величина шага Δ и построено множество $T(\Delta) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

Задача C2: Требуется определить максимально возможное число непересекающихся в G равных открытых кругов заданного радиуса r, центры которых лежат в некоторых точках множества $T(\Delta)$, и найти положения их центров.

В дальнейшем вместо задачи C1 мы решаем задачу C2. Ясно, что полученная упаковка даст приближенное решение задачи C1, но во многих инженерных расчетах такое решение может быть приемлемо.

Введем переменные:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } t_i \text{ расположен центр круга}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1}$$

Пусть центр упаковываемого круга K совпал с точкой t_i, т. е. $z_i = 1$, $1 \leq i \leq n$. Для того, чтобы K не пересекался с остальными упаковываемыми кругами нужно, чтобы величины z_j равнялись нулю для всех точек t_j, $i \neq j$, находящихся на расстоянии меньшем, чем $2r$ от t_i.

Пусть для точки t_i имеется m_i точек t_j, $i \neq j$, $1 \leq j \leq n$, для которых $d(t_i,t_j) < 2r$. Запишем указанное условие непересечения кругов в следующем виде.

$$\text{Если } z_i = 1, \text{ то для всех } j \text{ таких, что } d(t_i,t_j) < 2r \text{ имеем} \quad z_j = 0,\ i \neq j,\ 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Теорема 1. Условие (2) эквивалентно условию:

$$m_i z_i + \sum_{j:d(t_i,t_j)<2r, i\neq j} z_j \leq m_i \tag{3}$$

Выполнение условия (2) (или (3)) означает, что если центр некоторого круга радиуса r располагается в точке t_i, $1 \leq i \leq n$, то любой другой круг может располагаться только в точках t_j, $i \neq j$, $1 \leq j \leq n$, находящихся на расстоянии не меньшем, чем $2r$ от t_i. Следовательно, при выполнении указанного условия открытые круги радиуса r с центрами в t_i и t_j не пересекаются.

Введем коэффициенты:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ d(t_i,t_j) < 2r, \\ 0, & если\ d(t_i,t_j) \geq 2r \end{cases}, \ i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n;\ a_{ii} = m_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Используя теорему 1 и введенные коэффициенты, получим, что для выбранного i условие (2), следовательно, и условие (3) можно записать теперь в виде:

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + ... + a_{in}z_n \leq m_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Пусть A является $n \times n$ матрицей с элементами a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, Z и M векторы: $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$, $M = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$, z_i, $1 \leq i \leq n$, определены по (1). Рассмотрим задачу:

$$N = \sum_{i=1}^{n} z_i \to max$$

при ограничениях: $Az \leq M$, (4)

$$z_i \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq n.$$

Эта задача состоит в максимизации числа переменных z_i, принимающих значение 1, при этом z_i и z_j могут быть равны 1, если $d(t_i,t_j) \geq 2r$. Поэтому открытые круги с центрами в точках t_i и t_j не пересекаются. Следовательно, задача (4) является задачей упаковки в G наибольшего числа кругов радиуса r с центрами в некоторых из точек множества T. Решая задачу (4), находим N – число упаковываемых кругов радиуса r, а найденные значения z_i определяют положения центров кругов. Очевидно, для повышения точности решения необходимо уменьшать шаг сетки, что ведет к увеличению размерности задачи (4).

Полагаем, что точки t_i и t_j из множества T находятся на одном уровне, если их координаты y одинаковы. Так как T конечное множество, то для точек из T получим конечное число уровней, на которых расположены точки из T. Припишем этим уровням их номера, полагая, что счет идет снизу вверх. Каждому i-му уровню припишем вес этого уровня – положительное число c_i. Введем веса уровней так, что $c_{i+1} < c_i$. Переменные z_i (соответствующие течкам t_i) будем умножать на веса c_i, которые будут равными для всех точек одного уровня и уменьшаться с увеличением номера уровня. Рассмотрим задачу:

$$N = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \to \max$$

при ограничениях: $AZ \leq M$, (5)

$$z_i \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq n.$$

При решении задачи (5) будем получать упаковку, в которой круги прижимаются ниже, ибо целевая функция возрастает, когда круги оказываются ниже.

Введение весов уровней является нетривиальной задачей, так как при введении весов можно получать не оптимальные упаковки. Очевидно, что вместо прижимания кругов вниз (за счет выбора весов уровней) можно прижимать их вверх или (и) вправо либо влево.

Множество G, в которое мы упаковываем фигуры, разобьем на выбранное число (m) частей:

$$D_{\alpha i} = \{s \in G: (\min_{t \in fr\, D_{\alpha i}} d(s,t) \geq r) \& (\min_{K_j \in P_{\alpha(i-1)}} d(s,q_j) \geq 2r)\},\ 1 \leq i \leq m,$$

здесь q_j – центр круга K_j, принадлежащего упаковке $P_{\alpha(i-1)}$, построенной для $D_{\alpha(i-1)}$. Далее на множестве $D_{\alpha i}$ строится сетка, узлы которой порождают множество $T_{\alpha i}(\Delta)$. Используя $T_{\alpha i}(\Delta)$, строится вспомогательная задача с учетом весов уровней и, решая эту задачу, получаем упаковку $P_{\alpha i}$ для подмножества $D_{\alpha i}$. При этом размерности вспомогательных задач для $D_{\alpha i}$ будут меньше размерности задачи вида (5) для всего множества G.

Будем считать, что если число переменных (размерность) задачи (5) равна n^*, то мы можем решить эту задачу за приемлемое время. Построим следующий алгоритм, в котором эвристикой является выбор числа разбиений исходного множества на части и выбор весов уровней.

Алгоритм А1.

1. Для множества G находим G^*. Выбираем величину шага Δ сетки и строим множество $T(\Delta) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.
2. Если число элементов (n) множества $T(\Delta)$ приемлемо ($n \le n^*$), то строим и решаем задачу (4). Процедура завершается, иначе переходим к шагу 3.
3. Если $n > n^*$, то на области G строим m подмножеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le m$, так, чтобы вспомогательные задачи, построенные для них, имели приемлемую размерность. Последовательно решая вспомогательные задачи для каждого подмножества, начиная с $D_{\alpha 1}$, получаем упаковки в этих подмножествах. Объединение полученных упаковок для подмножеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le m$, считаем решением задачи упаковки для множества G. Завершаем процедуру.

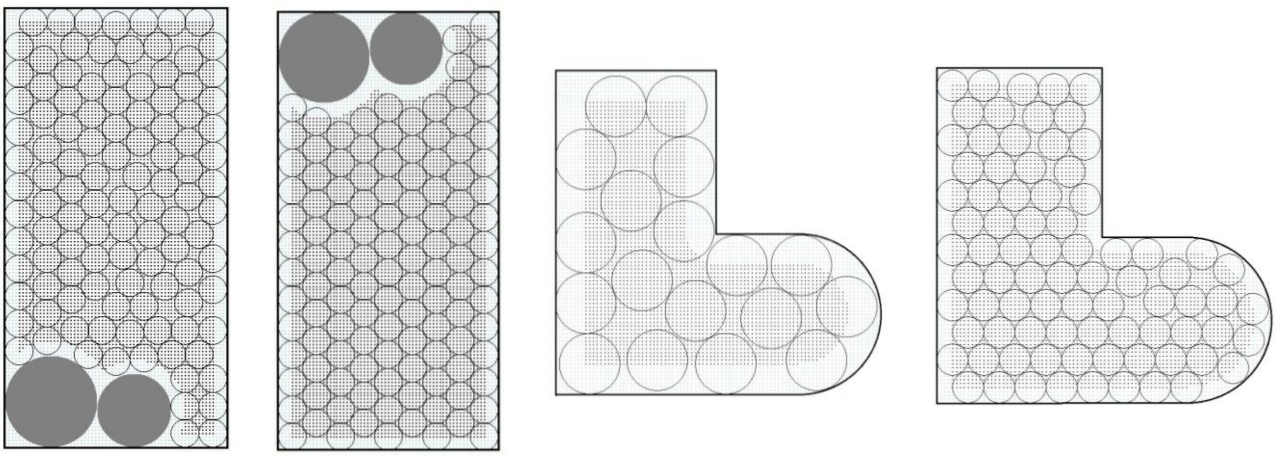
Подбирая параметры алгоритма А1, можно добиться приемлемых результатов. Подбор параметров алгоритма А1 подробно рассмотрен в диссертации.

В работе были рассмотрены упаковки кругов в три фигуры:

– невыпуклая фигура B, изображенная на Рисунке 1*в*) и 1*г*), ее размеры легко определить исходя из условия, что в нее упаковываются ровно 3 круга радиуса 1.
– прямоугольник шириной 3 и высотой 6, обозначим его через R;
– прямоугольник R, из которого вырезаны два круга радиусов 0.625 и 0.5, обозначим эту фигуру через R_d. Вырезанные части R_d на Рисунке 1*а*) и 1*б*) выделены серым цветом.

Наши исследования мотивированы необходимостью вырезать как можно больше кругов (дисков) заданного радиуса из стального листа, который может оказаться частично использованным. Поэтому были выбраны прямоугольник R и фигура R_d. Размеры прямоугольника выбраны так, чтобы R был подобен фигуре некоторого реального стального листа. Фигура B (сапожок) выбрана, чтобы показать возможности метода для упаковки равных кругов в невыпуклую область.

На Рисунке 1 представлены некоторые полученные результаты упаковок. На Рис. 1*а)* и 1*б)* представлены результаты упаковки кругов в прямоугольную область с предварительно вырезанными кругами, а на Рис. 1*в)* и 1*г)* представлены результаты упаковки кругов в фигуру B.



а) *б)* *в)* *г)*

Рисунок 1. Упаковка кругов в произвольную область

Во всех случаях, когда задача (5) решалась без привлечения эвристики и с привлечением эристики числа упаковываемых кругов оказывались одинаковыми. При этом время счета с использованием эвристики оказывается много (иногда в сотни раз) меньше, чем без использования эвристики. Для случаев, когда задача решалась только эвристическим алгоритмом, качество решения характеризует плотность упаковки. В частности, для упаковок в прямоугольник R плотность упаковки сравнивалась с плотностью наилучших известных упаковок. Сравнение показало, что плотности полученных упаковок, как правило, совпадает с плотностями наилучших известных упаковок, например, представленных в монографии Хифи и др.

Во **второй главе** работы построена модель целочисленного линейного программирования задачи упаковки максимально возможного числа равных эллипсов заданных размеров в прямоугольную область R. Рассматриваются два варианта упаковки, когда большие оси упаковываемых эллипсов взаимно параллельны и случай, когда большие оси упаковываемых эллипсов взаимно перпендикулярны. Установлены условия непересечения эллипсов с заданными параметрами. Показана приемлемость использования l_p метрики для выяснения условий непересечения эллипсов с взаимно перпендикулярными большими осями. На основе введенных разбиения множества R, уровней и весов уровней предложен эвристический алгоритм решения задачи упаковки эллипсов, когда построенная задача целочисленного линейного программирования имеет большую размерность. Рассмотрены также случаи, когда необходимо ввести ограничения на число эллипсов, большие оси которых параллельны оси Ox либо оси Oy. Предложена методология решения таких задач и численными экспериментами выявлена результативность предложенной методики.

Пусть E является эллипсом, центр которого расположен в точке $c(x,y)$, а длины его большой и малой полуосей равны a и b соответственно. Величины a и b считаем параметрами эллипса. Пусть большая ось эллипса параллельна оси x, тогда такой эллипс с указанным центром $c(x,y)$ и параметрами a и b обозначаем как $E(X;x,y,a,b)$ и считаем его горизонтальным эллипсом. Если большая ось эллипса параллельна оси y, а его центр и параметры прежние, то такой эллипс обозначаем через $E(Y;x,y,a,b)$ и считаем его вертикальным эллипсом. Считаем, что по тексту ясно, где используется кривая эллипс, а где фигура, ограниченная кривой эллипс.

Совокупность n равных открытых эллипсов E_j, $1 \le j \le m$, образует упаковку в R, если каждый эллипс E_j содержится в R, $1 \le j \le m$, и каждая точка s из R принадлежит не более чем одному из этих эллипсов.

Задача E1: Требуется определить максимально возможное число равных открытых эллипсов известных параметров, упаковываемых в R, и определить положения их осей и центров.

Пусть R^* ($R^* \subset R$) множество всех точек $s(x,y)$ из R таких, что $s(x,y)$ является центром некоторого эллипса E, содержащегося в R: $E \subseteq R$. Тогда открытый эллипс E состоит только из внутренних точек множества R: $int(E) \subset R$, здесь и в дальнейшем $int(Z)$ обозначает внутренность множества Z. Считаем, что множество R^* не пусто.

На множестве R^* построим прямоугольную сетку с выбранным шагом Δ по осям x и y. Узлы построенной сети, обозначим через $t_1, t_2, \dots, t_n$, $n \ge 1$, положим, что $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, при этом каждая точка t_i, $1 \le i \le n$, принадлежит множеству R^*.

Задача E2: Требуется определить максимально возможное число упакованных в R равных открытых эллипсов заданных параметров a и b, центры которых лежат в некоторых точках множества T и определить положения их осей и центров.

Ясно, что решение задачи E2 дает приближенное решение задачи E1.

Теорема 2. Пусть $E_1(X;0,0,a,b)$ и $E^*(X;0,0,2a,2b)$ эллипсы с центрами в начале координат и указанными значениями параметров. Тогда любой эллипс $E_2(X;x_2,y_2,a,b)$, центр $C_2(x_2,y_2)$ которого лежит на кривой, ограничивающей фигуру $E^*(X;0,0,2a,2b)$, имеет единственную точку пересечения с эллипсом $E_1(X;0,0,a,b)$.

Следствие 2. Теорема 2 остается в силе, если в нем всюду в записях эллипсов символ X заменить на Y.

В данной главе, как и в первой были рассмотрены два варианта построения сетки – прямоугольная и косоугольная, при этом было выявлено, что прямоугольная сетка лучше подходит для аппроксимации косоугольной сетки, чем косоугольная для аппроксимации прямоугольной сетки.

Введем переменные:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } t_{xi} \text{ расположен центр эллипса}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \ 1 \le i \le n. \tag{6}$$

Пусть центр упаковываемого эллипса $E_i(X;x_i,y_i,a,b)$ совпал с точкой $t_{xi}(x_i,y_i)$, то есть согласно (6) $z_i = 1$, $1\le i \le n$. Для того, чтобы E_i не пересекался с остальными упаковываемыми эллипсами, нужно, чтобы для всех точек (центров эллипсов) t_{xj}, $i \ne j$, находящихся внутри эллипса $E^*(X;x_i,y_i,2a,2b)$, величины z_j равнялись нулю. Пусть имеется r_i точек t_{xj}, $i \ne j$, $1\le j \le n$, которые находятся внутри эллипса $E^*(X;x_i,y_i,2a,2b)$. Запишем указанное условие в следующем виде.

Если $z_i = 1$, то для всех j таких, что $t_{xj} \in int(E^*(X;x_i,y_i,2a,2b))$ (7)

имеем $z_j = 0$, $i \ne j$, $1 \le i \le n$.

Теорема 3. Условие (7) эквивалентно условию:

$$r_i z_i + \sum_{j:t_{xj}\in int(E^*(X;x_i,y_i 2a,2b)),\ i\ne j} z_j \le r_i \tag{8}$$

Введем коэффициенты:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{xj} \in int(E^*(X;x_i,y_i,2a,2b)), \\ 0, & \text{если } t_{xj} \notin int(E^*(X;x_i,y_i,2a,2b)), \end{cases}, \ i \ne j,\ 1 \le i,j \le n; \qquad a_{ii} = r_i,\ 1\le i \le n.$$

Используя теорему 3, получим, что для выбранного i условие (7), следовательно, и условие (8) можно записать теперь в виде:

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \ldots + a_{in}z_n \le r_i,\ 1\le i \le n.$$

Пусть A является $n\times n$ матрицей с элементами a_{ij}, $1\le i,j \le n$, Z и M_x векторы: $Z = (z_1,z_2,\ldots,z_n)^T$, $M_x = (r_1,r_2,\ldots,r_n)^T$. Рассмотрим задачу:

$$N_x = \sum_{i=1}^{n} z_i \to max \tag{9}$$

при ограничениях:

$$AZ \le M_x,\ z_i \in \{0,1\},\ 1\le i \le n. \tag{10}$$

Решая задачу (9)-(10) находим N_x – число упаковываемых эллипсов с параметрами a и b, а найденные значения z_i определяют положения центров эллипсов.

Если большие оси всех эллипсов параллельны оси y, то рассуждения будут аналогичны предыдущему случаю.

Пусть большие оси эллипсов E_1 и E_2 взаимно перпендикулярны. Как известно, определение точек пересечения произвольных эллипсов в общем случае сводится к решению уравнений 4-ой степени. Постараемся избежать процедуры решения уравнений 4-ой степени и перебора его корней.

Если эксцентриситеты эллипсов E_1 и E_2 с центрами C_1 и C_2 соответственно равны нулю $e_1 = e_2 = 0$ ($a = b$), т.е. E_1 и E_2 круги, то очевидно, что центр C_2 лежит на окружности радиуса $r = 2a$ ($r = a+b$), а центр этой окружности находится в точке C_1. Обозначим введенную окружность через W. В вырожденном случае, когда эксцентриситеты эллипсов равны единице, тоже очевидно, что центр E_2 (когда E_1 и E_2 имеют точку касания) лежит на границе квадрата Q, стороны которого параллельны осям координат, а длина стороны квадрата равна $2a$.

Точка касания двух равных эллипсов с взаимно перпендикулярными большими осями то приближается к окружности W и сторонам квадрата Q, то отдаляется от них. Интересно, что аналогичным образом ведут себя точки «окружностей», порожденные l_p метрикой. Введем расстояние между произвольными точками s и t следующим известным способом:

$$d_p(s,t)=\left[|x_s-x_t|^p+|y_s-y_t|^p\right]^{1/p},\ 2\le p<\infty;\quad d_p(s,t)=max\left(|x_s-x_t|^t,|y_s-y_t|\right),\ p=\infty.,$$

Для $p = 2$ это обычное евклидово расстояние и $d_p\ (s,t) = r$ является уравнением окружности радиуса r, например, с центром в точке $s(x_s,y_s)$, при этом точка $t(x_t,y_t)$ лежит на окружности W радиуса r. При $p = \infty$ уравнение $d_p\ (s,\ t) = r$ определяет стороны квадрата Q с центром в точке $s(x_s,y_s)$, стороны которого параллельны осям координат, а сторона квадрата равна $2a$.

Подбор значения p с заданной точностью по изменению p осуществляем следующим образом. Начиная с выбранного p_0 ($p_0 \ge 2$), увеличиваем p с шагом Δp так, чтобы для выбранного p отношение $q= d_p(C_1,\ C_2)/(a + b)$ (C_1, C_2 – центры рассматриваемых эллипсов) было больше единицы, а при предыдущем значении p (равном p - Δp) меньше или равно единице. Найденное значение p и принимаем за искомое его значение. Это значение p обеспечивает, что точка пересечения (точка C_3) луча L с кривой S_p отстоит от точки C_1 дальше, чем C_2 (по евклидовому расстоянию), следовательно, если центр эллипса E_2 лежит в точке пересечения L с S_p, то эллипсы E_1 и E_2 не пересекаются.

Для упаковки эллипсов необходимо учесть условие непересечения эллипсов, большие оси которых параллельны оси x, и эти условия запишутся в виде: $AZ \le M_x$. Затем нужно учесть условия непересечения эллипсов, большие оси которых параллельные оси y: $BV \le M_y$. Далее нужно учитывать условия непересечения эллипсов, большие оси которых взаимно перпендикулярны.

Положим, что центр эллипса E_i совпал с точкой t_{xi}. Теперь нужно записать условия непересечения E_i с эллипсами E_j, большие оси которых перпендикулярны большой оси эллипса E_i. Пусть для t_{xi} имеется q_i точек t_{yj}, для которых $d_p\ (t_{xi},\ t_{yj}) < a + b,\ 1 \le i \le n$. Введем коэффициенты:

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } d_p\left(t_{xi},t_{yj}\right)<a+b,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases},\ i = 1,\ \dots,\ n;\ j = 1,\ \dots,\ m,$$

$$c_{i,i+m} = q_i,\ 1\le i \le n;\ c_{ij} = 0,\ 1\le i \le n,\ m + 1 \le j \le m + n,\ j \ne i+m.$$

Из коэффициентов c_{ij}, $1\le i \le n,\ m + 1 \le j \le m + n$, можно построить $n\times(m + n)$ матрицу C. Введем векторы $VZ = (v_1,\ \dots,\ v_m,\ z_1,\dots,z_n)^T$ и $M_{vz} = (q_1,\ \dots,\ q_n)^{\mathrm{T}}$. Построим ограничения, учитывая, что ряд значений c_{ij}, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & c_{1,m+1} & 0 & \dots & 0\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & 0 & c_{2,m+2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & 0 & 0 & \dots & c_{n,n+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ \dots\\ v_m\\ z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \dots\\ q_n\end{pmatrix} \qquad (11)$$

Условия (11) являются условиями непересечения каждого возможного горизонтального эллипса с возможными вертикальными эллипсами.

Теперь задача упаковки эллипсов, часть из которых может иметь большие оси параллельные оси x, а часть – оси y, будет иметь вид:

$$z_1 +\dots+ z_n + v_1 +\dots+v_m \to \max \qquad (12)$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} AZ \le M_x,\ BV \le M_y,\\ C(VZ) \le M_{vz}\\ z_i \in \{0,1\},\ 1 \le i \le n,\ v_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le m. \end{gathered} \qquad (13)$$

Вместо $C(VZ) \le M_{vz}$ можно получить новые ограничения, исходя из иных условий непересечения эллипсов. Указанные ограничения подробно рассмотрены в диссертации.

Алгоритм А2.

1. Для множества R находим R^*. Выбираем величины шагов сетки и строим множество $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.
2. Если число элементов (n) множества T приемлемо ($n \le n^*$), то строим и решаем задачу (12)-(13). Процедура завершается, иначе переходим к шагу 3.
3. Если $n > n^*$, то на области R строим m, $m \ge 2$, подмножеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le m$, так, чтобы вспомогательные задачи, построенные для них, имели приемлемую размерность. Последовательно решая вспомогательные задачи для каждого подмножества, начиная с $D_{\alpha 1}$, получаем упаковки в этих подмножествах. Объединение полученных упаковок для подмножеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le m$, считаем решением задачи упаковки для множества R. Завершаем процедуру.

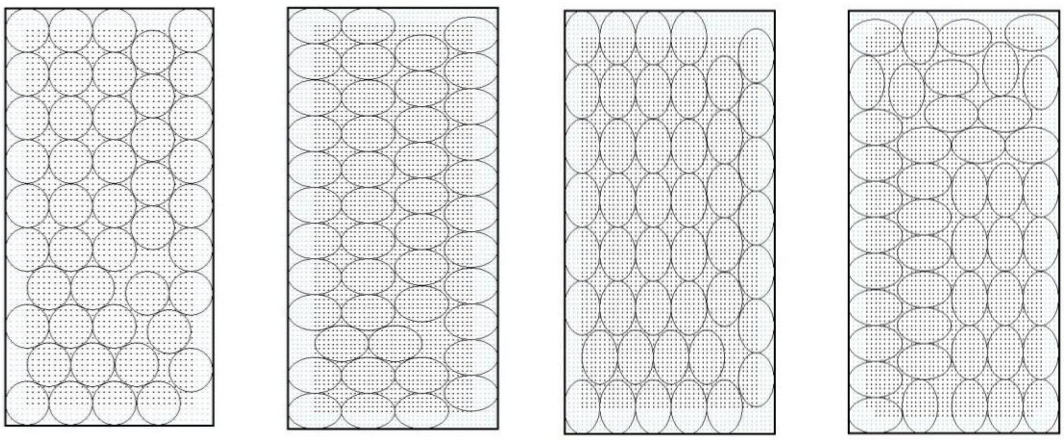
На Рисунке 2 представлены некоторые результаты решения задач упаковки эллипсов в прямоугольную область.

В **третьей главе** работы строятся целочисленные линейные модели для численного решения упаковок кругов двух заданных радиусов в произвольную замкнутую ограниченную область G, при которой общая площадь упаковываемых кругов принимает наибольшее возможное значение.

Пусть G, как и в первой главе, связная ограниченная замкнутая область с непустой внутренностью на плоскости P.

Задача CN1: Требуется определить упаковку в G некоторого числа кругов K_j, заданных радиусов r_1 или (и) r_2, так, чтобы суммарная площадь упакованных кругов оказалась наибольшей из возможных, и указать расположения центров этих кругов.

При рассмотрении упаковки кругов радиусов r_1 и r_2 строятся две сетки, которые порождают два конечных множества T и S узлов этих сеток. Кроме того, для решения построенных задач целочисленного линейного программирования больших размерностей исходная задачи упаковки на всем заданном множестве разбита на задачи упаковки на частях исходного множества. При этом вводятся уровни точек множеств T и S и веса уровней. На основе введенных разбиения множества G, уровней и весов уровней предложен эвристический алгоритм решения задачи, когда построенная задача имеет большую размерность. Рассмотрены также случаи, когда необходимо ввести ограничения на число кругов радиуса r_1 или на число кругов радиуса r_2.



a) *b*) *c*) *d*)

Рисунок 2. Упаковки в R: *a*) 45 кругов, *b*) 45 горизонтальных эллипсов, *c*) 45 вертикальных эллипсов, *d*) 24 горизонтальных и 21 вертикальных эллипсов

Пусть G_1 ($G_1 \subset G$) – множество всех точек s из G таких, что расстояние от s до ближайшей к ней точки границы области G не менее чем r: $G_1 = \{s \in G : \min_{t \in frG} d(s,t) \ge r_1\}$.

Пусть построено множество G_2, состоящее из точек, которые являются центрами кругов радиуса r_2 с центром в G. Сетки на G_1 и G_2 могут строиться достаточно произвольно или могут быть заданы точки множеств $T = \{t_1, t_2,\ldots,t_n\}$ и $S = \{s_1, s_2,\ldots,s_m\}$ без использования узлов сетки или с частичным использованием узлов сетки. Пусть множества T и S построены.

Задача CN2: Требуется определить упаковку в G некоторого числа кругов K_j, заданных радиусов r_1 или (и) r_2, так, чтобы суммарная площадь упакованных кругов оказалась наибольшей из возможных, центры кругов радиуса r_1 лежали в некоторых из точек множества T, а центры кругов радиуса r_2 лежали в некоторых из точек множества S. При этом требуется указать расположения центров упакованных кругов.

В дальнейшем вместо задачи CN1 мы решаем задачу CN2. Ясно, что полученная упаковка даст приближенное решение задачи CN1.

Рассмотрим задачу **CN3**, которая заключается в решении задачи **CN2** с дополнительным ограничением, что количество кругов радиуса r_1 равно числу Λ_{r1} либо количество кругов радиуса r_2 равно заданному числу Λ_{r2}.

Введем переменные $z_i(1 \le i \le n)$, используя точки из T для задачи упаковки кругов радиуса r_1 и $v_j(1 \le j \le m)$ для задачи упаковки кругов радиуса r_2. Тогда можно построить задачи вида (4), ограничения которых имеют вид $AZ \le M_1, z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n$ и $BV \le M_2, v_j \in \{0,1\}, 1 \le j \le m$ соответственно. В этих ограничениях матрицы A, B и векторы Z и V получаются аналогично как для задачи (4) для радиусов r_1 и r_2 соответственно.

Рассмотрим круги радиуса r_1 и r_2. Введем условия непересечения кругов радиусов r_1 и r_2 между собой. Пусть для заданной точки t_i имеется l_i точек s_j ($i \ne j$, $1 \le j \le n$), для которых $d(t_i, s_j) < r_1+r_2$. Введем коэффициенты

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(t_i,s_j) < r_1 + r_2\,, \\ 0, & \text{если } d(t_i,s_j) \ge r_1 + r_2, \end{cases},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$$

$$c_{i,i+m} = l_i,\ 1 \le i \le n;\ c_{ij} = 0,\ 1 \le i \le n,\ m+1 \le j \le n+m,\ j \ne i+m\,.$$

Пусть C – $n\times(n+m)$ матрица с элементами c_{ij}, $1 \le i \le n, 1 \le j \le n+m,$, VZ и M_{vz} - вектора $VZ = (v_1,v_2,...,v_m,z_1,z_2,...,z_n)^T$ и $M_{vz} = (l_1,l_2,...,n_n)^T$, соответственно.

Построим ограничения, учитывая, что ряд значений c_{ij} равны нулю:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} & c_{1,m+1} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} & 0 & c_{2,m+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & 0 & 0 & \ldots & c_{n,n+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_m \\ z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

Условия (14) являются условиями непересечения каждого круга радиуса r_1 с возможными кругами радиуса r_2.

Максимизация суммарной площади упаковываемых кругов, как можно убедиться соответствует максимизации функции $(r_1/r_2)^2 \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{j=1}^{m} v_j$.

Теперь задача **CN2** упаковки кругов радиусов r_1 и r_2 будет иметь вид:

$$(r_1/r_2)^2 \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{j=1}^{m} v_j \to \max \tag{15}$$

при ограничениях:

$$AZ \le M_1,\ BV \le M_2,\ C(VZ) \le M_{vz}$$
$$z_i \in \{0,1\},\ 1 \le i \le n,\ v_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le m\,. \tag{16}$$

Вместо $C(VZ) \le M_{vz}$ можно получить иные ограничения, исходя из иных условий непересечения кругов радиусов r_1 и r_2.

Задача (15)-(16) имеет $n+m$ переменных и $2(n+m)+min(n,m)$ или $2(n+m)+max(n,m)$ ограничений. Следовательно, решить задачу упаковки кругов разного радиуса сложнее, чем задачу упаковки равных кругов.

Задача **CN3** может быть записана как задача (15)-(16) с дополнительными ограничениями $\sum_{i=1}^{n} z_i = \Lambda_{r1}$ или $\sum_{j=1}^{m} v_j = \Lambda_{r2}$ в зависимости от вводимых ограничений либо на число кругов радиуса r_1, либо на число кругов радиуса r_2. Очевидно, что целевая функция (15) задачи **CN3** может быть записана в виде: $\sum_{j=1}^{m} v_j \to max$ или $\sum_{i=1}^{n} z_i \to max$ соответственно.

Алгоритм А3

1. Для множества G находим G_1 и G_2. Выбираем величины шага Δ и Δ^* сетки и строим множества $T=\{t_1, t_2,\ldots, t_n\}$ и $S=\{s_1, s_2,\ldots, s_m\}$.
2. Если число элементов $(n+m)$ множества $W=T \cup S$ приемлемо ($n+m \le n^*$), то строим и решаем задачу (15)-(16). Процедура завершается, иначе переходим к шагу 3.
3. Если $n+m > n^*$, то выбираем g, $g>1$, αi, $1 \le i \le g-1$ и на области G строим g подмножеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le g$, так, чтобы вспомогательные задачи, построенные для них, имели приемлемую размерность. Последовательно решая вспомогательные задачи для каждого подмножества, начиная с $D_{\alpha 1}$, получаем упаковки в этих подмножествах. Объединение полученных упаковок считаем решением задачи упаковки для множества G. Завершаем процедуру.

Отметим, что на шаге 3 для каждого из множеств $D_{\alpha i}$, $1 \le i \le g-1$, мы решаем задачу упаковки дважды. Сначала решаем ее без введения весов уровней, затем с весами уровней и дополнительными (двумя) ограничениями, которые не позволят уменьшить суммарную площадь упакованных кругов. Для множества $D_{\alpha i}$, $i = g$, второй этап решения задачи не обязателен, если нет условия прижимания кругов вниз.

На Рисунке 3 представлены некоторые результаты решения задач упаковки кругов радиуса $r_1 = 0.625$ и $r_2 = 0.4375$ в прямоугольную область с различными введенными ограничениями на количество кругов.

В **четвертой главе** представлено описание разработанного комплекса программ, позволяющего находить оптимальные упаковки равных и неравных кругов и эллипсов.

Разработанное программное обеспечение представляет собой комплекс программ, написанный на языке C# в среде разработки Visual Studio. Она состоит из пяти модулей, три из которых являются интерфейсными, один модулем данных и еще один вычислительным. Программное обеспечение разработано с использованием объектно-ориентированного подхода и состоит из множества классов, инкапсулирующих в себе как логику взаимодействия с пользователем, так и алгоритмы построения моделей задач и их решение.

Разработанный комплекс программ реализовывает алгоритмы, описанные в первых трех главах работы, в том числе алгоритмы построения сетки на упаковываемой области, подбор параметров метрики для случая упаковки эллипсов, расчета матриц коэффициентов модели, разделения области на подобласти и прижимания упаковываемых фигур. Кроме того, разработан алгоритм определения упаковываемой области при помощи задания ограничивающих ее кривых. Для решения построенных линейных моделей используется библиотека ILOG CPLEX Optimizer 11.2, которая позволяет использовать в программе ILOG CPLEX оптимизаторы, предназначенные для решения задач линейного и квадратичного программирования, в том числе и целочисленного программирования.

Заполнить все данные задачи можно с помощью интуитивно понятного интерфейса. В последующем сохраненный файл с данными можно использовать для ускорения процесса создания похожей задачи.

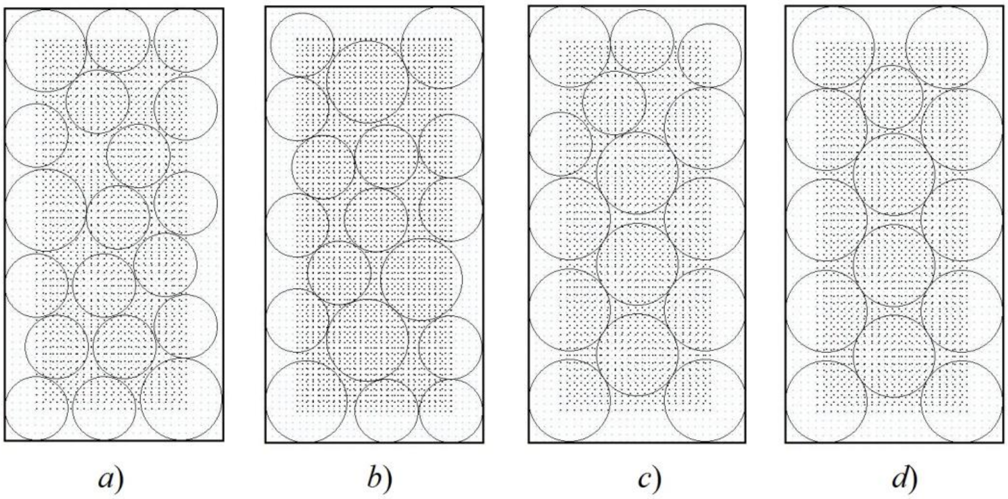


Рисунок 3. Упаковка кругов радиуса $r_1 = 0.625$ и $r_2 = 0.4375$
в прямоугольник R при ограничениях на число (N_{r1}) кругов радиуса r1:
a) N_{r1} = 3, k2 =16, b) N_{r1} = 5, k2 =12, c) N_{r1} = 11, k2 = 4, d) N_{r1} = 13, k2 =1.

Результаты работы комплекса программ выводятся на экран в виде графического представления вместе с данными о ходе выполнения программы. Более подробная информация о центрах расположений упаковываемых фигур и ходе выполнения программы записываются в указанный пользователем файл.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертационной работе:

1. Построены модели целочисленного линейного программирования для задач упаковки равных кругов известного радиуса либо кругов двух известных радиусов в произвольную ограниченную область.
2. Получены условия непересечения горизонтальных (вертикальных) эллипсов и эллипсов с взаимно ортогональными ориентациями; введена метрика для данной задачи и подобраны ее параметры. Построены модели целочисленного линейного программирования для задач упаковок равных эллипсов с взаимно параллельными и взаимно перпендикулярными большими осями и заданными размерами эллипсов.
3. Для решения задач целочисленного линейного программирования больших размерностей (полученных на основе сеток на упаковываемом множестве) впервые введены уровни возможных положений решений и веса уровней.
4. Разработаны новые численные алгоритмы приближенного решения указанных задач упаковок, с использованием уровней возможных положений решений и весов уровней.
5. Разработан комплекс программ для решения рассматриваемых задач упаковок. Программный комплекс имеет удобный пользовательский интерфейс, комплекс оттестирован.
6. Проведены многочисленные расчеты, демонстрирующие результативность моделей и алгоритмов.

Разработанный метод характеризуется следующими важными особенностями:

- позволяет найти упаковку заданных фигур для произвольной связной ограниченной области;
- если упаковка найдена без использования эвристики, то в результате получен глобальный максимум общей площади упакованных фигур (с центрами в узлах сетки);

– позволяет учитывать ограничения на количество фигур (кругов, эллипсов) с заданными параметрами.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ[1]

Публикации в журналах из списка ВАК и Web of Science:

1. Галиев Ш.И., Лисафина М.С. Оптимизация покрытия при наличии ограничений // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева – 2012 – № 2. – С. 144 - 147.
2. Галиев Ш.И. Лисафина М.С. Численные методы оптимизации упаковок равных ортогонально-ориентированных эллипсов в прямоугольную область // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2013 – т. 53, № 11 – С. 1923-1938.
3. Galiev Sh.I., Lisafina M.S. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain // European Journal of Operational Research – 2013 – V.230 – P. 505-514.
4. Лисафина М.С., Галиев Ш.И. Упаковки кругов разных радиусов в ограниченную область. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева – 2014 – № 2 – С.168-174.

Публикации в других изданиях:

5. Куншина М.С. Нейросетевой метод решения задач покрытия и упаковок // Материалы международной молодежной научной конференции XVII Туполевские чтения – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та – 2009 – Том IV – С . 27-29.
6. Kunshina M.S. Multi-layered perceptron applied for covering and packing problems // Материалы международной молодежной научной конференции XVII Туполевские чтения – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та – 2009 – Том VI – С. 96-97.
7. Куншина М.С. Применение радиальных нейронных сетей для решения задач покрытия // Материалы международной молодежной научной конференции «XVIII Туполевские чтения» – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та – 2010 – Том IV – С. 148-150.
8. Лисафина М.С. Программный комплекс для решения задачи покрытия кругами разного радиуса // «XX Туполевские чтения» Междунар. молодежн. научная конф. – Казань – 2012 – Том III, Часть 1 – С.446-448.
9. Sh. Galiev, M. Lisafina, V. Judin. Optimization of a multiple covering of a surface taking into account its relief // Abstracts of III International conference «Optimization and Applications» – Costa da Caparica, Portugal – 23-30 September 2012 – P.86-90.
10. Лисафина М.С. Алгоритмы и программный комплекс оптимизации упаковок кругов и эллипсов // Сборник статей Международной научно-практической конференции «Закономерности и тенденции развития науки в современном обществе» – Уфа – 2013 – Часть I, С. 3 – 5.
11. Лисафина М.С., Галиев Ш.И. Приближенное решение задачи упаковки кругов разных радиусов с помощью линейного программирования // Материалы конференции. Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (ДООР-2013) – Новосибирск - С. 140.
12. Galiev Sh.I., Lisafina M.S. Optimization of packing equal ellipses into a rectangular // Abstracts of IV International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2013) – Petrovac, Montenegro –September 2013 – P. 62-63.

[1] 01.11.2011 фамилия Куншина изменена на фамилию Лисафина.