На правах рукописи

ЛУКЬЯНОВ Вячеслав Анатольевич

УРАВНЕНИЯ ЯНГА-МИЛЛСА НА 4-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2015

Работа выполнена на кафедре «Информатика и общепрофессиональные дисциплины» Заволжского филиала ФГБОУВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

Научный руководитель:	**Кривоносов Леонид Николаевич,** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Фролов Борис Николаевич,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»
	Балащенко Виталий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, г. Минск
Ведущая организация:	**ФГАОУВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Защита диссертации состоится 19.02.2015 в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 35 и на сайте www.kpfu.ru. Автореферат разослан ___ __________ 2015 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
Д 212.081.10, кандидат физико-математических
наук, доцент

Липачёв Евгений Константинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Пространства конформной связности были введены Э. Картаном[1] в 1923 году вскоре после создания общей теории относительности, где А. Эйнштейн объяснил гравитационное взаимодействие с помощью тензора кривизны псевдориманова 4-мерного многообразия. В 1918 году Г. Вейль для моделирования не только гравитационного, но и электромагнитного взаимодействия рассмотрел более общую геометрическую схему: 4-мерное многообразие, в касательном слое которого вместо группы Пуанкаре движения квадратичной формы действует более широкая группа подобия[2,3]. Конформная группа, рассматриваемая в данной работе, также более широкая, чем группа Пуанкаре.

Геометрически близкими к теме диссертации являются работы М. Павшича[4] и Р.Л. Ингрэхема[5,6]. Как и в настоящей работе, они рассматривают более широкую группу, чем группа Пуанкаре, 15-параметрическую группу ортогональных преобразований $SO(4,2)$. Павшич назвал такую модель «конформным релятивизмом». Однако у Павшича и Ингрэхема уравнений Янга-Миллса не возникает. В работах А. В. Столярова[7,8] изучается геометрия пространств конформной связности, также без уравнений Янга-Миллса.

В диссертации показано, что, в отличие от псевдориманова многообразия или многообразия Вейля, на 4-мерном многообразии M конформной связности Ω имеется лишь один инвариантный функционал действия, квадратичный по кривизне Φ, – это функционал Янга-Миллса. Равенство нулю его вариации равносильно уравнениям Янга-Миллса

$$d * \Phi + \Omega \wedge * \Phi - * \Phi \wedge \Omega = 0,$$

где $*$ - оператор Ходжа.

1. Картан, Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э. Картан - Издательство Казанского университета, 1962. - 210 с.
2. В Вейль, Г. Гравитация и электричество / Г. Вейль // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. - С. 513-523.
3. Вейль, Г. Пространство. Время. Материя / Г. Вейль // Лекции по общей теории относительности. - М.: Эдиториал УРСС, 2004.
4. Pavsic, M. Unified Theory of Gravitation and Electromagnetism, Based on Conformal Group SO(4,2) / M. Pavsic // Nuovo Cim. - 1977. - Vol. 41B. - N 2. - P. 397-427.
5. Ingraham, R.L. Conformal Relativity / R.L. Ingraham // Nuovo Cim. - 1978. - Vol. 46B. - N 1. - P. 1-15; 1978. - Vol. 46B. - N 1. - P. 16-32; 1978. - Vol. 46B. - N 2. - P. 217-260; 1978. - Vol. 46B. - N 2. - P. 261-286; 1978. - Vol. 47B. - N 2. - P. 151-191; 1979. - Vol. 50B. - N 2. - P. 233-270.
6. Ingraham, R.L. Free Field Equations of Conformal Relativity in Riemannian Formalism. I-II / R.L. Ingraham // Nuovo Cim. - 1982. Vol. 68B. - N 2. - P. 203-217; 1982. - Vol. 68B, - N 2. - P. 218-234.
7. Столяров, А.В. Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства / А.В. Столяров // Известия вузов. Математика. - 2002. - N°11. - С. 61-70.
8. Столяров, А.В. Пространство конформной связности / А.В. Столяров // Известия вузов. Математика. - 2006. - N°11. - С. 42-54.
9. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия: Учебное пособие для вузов / М.М. Постников -- М.: Наука, 1988. - 496 с.

Заметим, что первоначально уравнения такого вида назывались уравнениями Янга-Миллса только для $SU(2)$-связностей, однако в последние десятилетия в математической литературе такое название используют и для любых других связностей (см., например, учебник М. М. Постникова[9], с.381). Связности, удовлетворяющие уравнению Янга-Миллса, называются там *калибровочными полями*. В случае $SU(2)$ калибровочные поля называются *полями Янга-Миллса*.

Уравнения Янга-Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности – это система из 60 дифференциальных уравнений 2-го порядка на 60 неизвестных функций от 4 переменных. Решение уравнений Янга-Миллса ввиду их нелинейности – процесс сложный и трудно алгоритмизируемый. В пространстве конформной связности при решении уравнений Янга-Миллса возникает дополнительная трудность: отсутствие автодуальных и антиавтодуальных решений.

Дело в том, что большая часть современных исследований посвящена изучению пространств, где оператор Ходжа инволютивен, т.е. $** \Phi \equiv \Phi$. В таких пространствах возможна ситуация, когда $* \Phi = \Phi$ или $* \Phi = -\Phi$. В этом случае уравнения Янга-Миллса будут выполняться автоматически, в силу тождеств Бианки. Такие решения уравнений Янга-Миллса называются соответственно *инстантонами* и *антиинстантонами*. Отысканию такого рода решений посвящена значительная часть современной литературы по уравнениям Янга-Миллса[10][11][12][13]. На многообразии, рассматриваемом в данной работе, оператор Ходжа не является инволютивным, здесь $** \Phi \equiv -\Phi$, что приводит к отсутствию автодуальных и антиавтодуальных решений.

Близкими к теме данного исследования являются работы[14][15][16], где уравнения Янга-Миллса рассматриваются на 4-многообразии, оснащённом конформным классом эквивалентности метрик $[g]$. Во всех этих работах рассматривается так называемая *нормальная конформная связность Картана*, на компоненты которой с самого начала накладываются условия, равносильные уравнениям Эйнштейна. И у самого Картана[1] в понятие нор-

10. Aryapoor, M. Self-dual Yang-Mills Equations in Split Signature / M. Aryapoor // arXiv:0902.0633v1 [math.DG]. - 2009.
11. Harland, D. Instantons and Killing Spinors / D. Harland, C. Noll // arXiv:1109.3552v2 [hep-th]. - 2011.
12. Ivanova, T.A. Instantons and Yang-Mills flows on coset spaces / T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld, A.D. Popov, T. Rahn // Lett. Math. Phys. - 2009. - N 89. - C. 231-247.
13. J Brodel, J. Construction of noncommutative instantons in 4k dimensions / J. Brodel, T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld // Mod. Phys. Lett. - 2008. - N° A23. - C. 179-189.
14. Merkulov, S.A. A conformally invariant theory of gravitation and electromagnetism / S.A. Merkulov // Class. Quantum Grav. - 1984. - Vol. 1. - P. 349.
15. Меркулов, С.А. Твисторная связность и конформная гравитация / С.А. Меркулов // ТМФ. -1984. - Т. 60. - N°2. - С. 311-316.
16. Korzyjnski, M. The Normal Conformal Cartan Connection and the Bach Tensor / M. Korzyjnski, J. Levandowski // arXiv:gr-qc/0301096v3. - 2003.

мальной конформной связности включено условие $A^k_{ijk} = 0$, равносильное уравнениям Эйнштейна (с. 178).

В статье С. А. Меркулова[14] без вывода указаны уравнения Янга-Миллса, сводящиеся к равенству нулю тензора Баха. Кроме того, у Меркулова в спинорную связность включён другой вид условий, содержащий тензор электромагнитного поля[15]. Для этого случая также записан вид уравнений Янга-Миллса. В 2003 году Коржинский и Левандовский[16] продолжили исследования, начатые Меркуловым, приведя вывод уравнений Янга-Миллса, и найдя их решения в случае метрики Феффермана.

В отличие от предшественников, в диссертации не требуется выполнения условий Картана $A^k_{ijk} = 0$. Кроме того, здесь рассматривается многообразие конформной связности в первоначальном (более широком) смысле, в том, который ему придал Картан. В этом случае метрики на всём многообразии не существует, она существует лишь локально, а в областях пересечения координатных окрестностей эти метрики конформны друг другу. Всё это существенно отличает результаты диссертации от результатов указанных выше работ.

Пространство, рассматриваемое Меркуловым, Коржинским, Левандовским и другими[17] – это псевдориманово многообразие, являющееся всего лишь одной локальной картой пространства, рассматриваемого в данной работе. Здесь показано, что на 4-многообразии конформной связности имеется единственный функционал действия – функционал Янга-Миллса. Уравнения его экстремалей – уравнения Янга-Миллса – при отсутствии кручения без всяких дополнительных условий распадаются на уравнения Эйнштейна, уравнения Максвелла и уравнения Баха. В работах же Меркулова, Коржинского и Левандовского уравнения Эйнштейна фактически постулируются. Другие работы, в которых бы уравнения Эйнштейна и Максвелла получались как составные части уравнений Янга-Миллса, автору не известны.

Цели и задачи исследования:

1) получение уравнений Янга-Миллса на 4-многообразии конформной связности, доказательство их единственности;
2) упрощение (редукция) системы уравнений Янга-Миллса для двух частных случаев: пространства конформной связности без кручения с дополнительным условием $\Phi^0_0 = 0$ и без него;
3) нахождение решений уравнений Янга-Миллса для некоторых видов метрик.

17. Gallo, T. Cartan Normal Conformal Connections from Pairs of 2nd Order PDE's / T. Gallo, C. Kozameh, E.T. Newman, K. Perkins // arXiv:gr-qc/0404072v1. - 2004.

Объект исследования

Диссертация посвящена изучению геометрии 4-мерного многообразия, конформная связность которого удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса.

Методы исследования:

1) метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии;
2) методы вариационного исчисления;
3) методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна

В диссертации доказаны следующие утверждения.

1. На 4-мерном многообразии конформной связности имеется лишь один инвариантный функционал действия, квадратичный по кривизне – функционал Янга-Миллса.
2. Уравнения Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения при дополнительном условии $\Phi_0^0 = 0$ сводятся к системе из двух групп дифференциальных уравнений: 10 уравнений Эйнштейна и 9 уравнений, представляющих собой равенство нулю тензора Баха.
3. В пространстве конформной связности без кручения при дополнительном условии $\Phi_0^0 = 0$ получено полное (общее) решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики. Оно выражается через эллиптическую -функцию Вейерштрасса. Приведён ряд частных решений, выражающихся через элементарные функции и обобщающих известные решения Коттлера и Шварцшильда.
4. Уравнения Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения без дополнительного условия сводятся к трём группам. Кроме уже известных двух групп уравнений появляется третья – уравнения Максвелла. В таком пространстве получены уравнения Янга-Миллса для чисто временной метрики. Приведено два класса частных решений.

Степень обоснованности результатов обусловлена корректностью построения математической модели, основанной на теории расслоённых пространств, строгим использованием математического аппарата внешних форм Картана и решения дифференциальных уравнений.

Апробация результатов

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научных семинарах:

- кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева (15 апреля 2010 года);
- кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета (4 мая 2010 года);
- кафедры общей теории относительности и гравитации Казанского (Приволжского) федерального университета (28 мая 2010 года);
- Российского гравитационного общества (МГУ, 02 декабря 2010 года);
- кафедры геометрии и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета (7 декабря 2011 года);
- кафедры геометрии и высшей алгебры Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (23 марта 2012 года);
- кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (25 марта 2014 года);

и научных конференциях:

- IX конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск, 1 – 3 июля 2010 года);
- вторая международная конференция «Математическая физика и её приложения» (Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 года);
- международная конференция «Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation» (Казань, 1 – 6 ноября 2010 года);
- международная конференция «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» (Казань, 21-26 октября 2013 года).

Публикации

Основные результаты диссертационной работы содержатся в 4 статьях, опубликованных в журналах, входящих в перечень ВАК РФ. Названия этих статей (первые 4 в списке), а также других публикаций автора по теме диссертации приведены в конце автореферата. В сжатом виде некоторые результаты опубликованы в тезисах упомянутых выше конференций.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Заключения и списка литературы. Общий объём работы - 92 страницы. Список литературы содержит 55 наименований.

Содержание диссертации

Во **Введении** даётся обоснование темы диссертации и её актуальности, а также определены основные цели диссертации.

В I главе данной работы рассматриваются квадрики 5-мерного проективного пространства P_5 с различной сигнатурой. Группой инвариантности любой из этих квадрик является 15-параметрическая конформная группа $C(p,q)$ где $p+q=4$. Приводится описание её 11-параметрической подгруппы стационарности, т.е. подгруппы, оставляющей на месте фиксированную точку квадрики. Эта подгруппа состоит из преобразований перенормировки, нормализации и преобразования Лоренца. Вводится понятие конформной связности

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

и кривизны

$$\Phi = d\Omega + \Omega\wedge\Omega = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}$$

на дифференцируемом 4-мерном многообразии (матрицы связности и кривизны здесь приведены для случая $C(3,1)$, рассматриваемого в следующих главах).

В п.п. 2 и 3 диссертации доказано, что существуют лишь две внешние 4-формы, являющиеся инвариантами конформной связности Ω - это следы

$$tr(\Phi\wedge\Phi) \text{ и } tr(*\,\Phi\wedge\Phi).$$

Однако лишь вторая из них в общем случае не имеет глобальной первообразной 3-формы и может быть использована для составления функционала действия

$$I = \int tr(*\,\Phi\wedge\Phi).$$

В п. 4 доказано, что требование равенства нулю вариации этого функционала,

$$\delta I = 0,$$

равносильно уравнениям Янга-Миллса

$$d * \Phi + \Omega \wedge * \Phi - * \Phi \wedge \Omega = 0.$$

В развёрнутой записи уравнения Янга-Миллса на 4-мерном многообразии конформной связности представляют собой систему из 60 нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка в частных производных на 60 неизвестных функций от 4 переменных. Эти 60 искомых функций есть не что иное, как компоненты 15-ти различных пфаффовых форм ω_0^0, ω_i^j, ω_i и ω^i связности Ω (здесь и везде далее все индексы принимают значения от 1 до 4, по одноимённым верхним и нижним индексам предполагается суммирование). Каждая из этих 15-ти 1-форм раскладывается по дифференциалам локальных координат dt, dx, dy, dz, следовательно, имеет 4 компоненты.

Система чрезвычайно сложная, поэтому для её решения необходимо накладывать некоторые упрощающие условия. Однако эти условия должны быть конформно-инвариантными, иначе (после трудоёмкой вычислительной работы) получится лишь тривиальное решение, то есть когда кривизна $\Phi = 0$. В пространстве нулевой конформной кривизны (конформно-плоском пространстве) уравнения Янга-Миллса выполняются тривиальным образом, однако, даже для получения такого тривиального (конформно-плоского) решения иногда нужно решить достаточно сложную систему.

В п. 5 приведены простейшие примеры многообразий конформной связности: квадрики в проективном пространстве P_5. В зависимости от сигнатуры квадрик получаются три различных примера. Действие оператора Ходжа, вообще говоря, является локальным, т.е. в пределах одной координатной окрестности. Доказывается, что даже на этих простейших многообразиях конформной связности оператор Ходжа глобально определён лишь с точностью до знака.

Результаты, полученные в I главе данной работы, опубликованы в [1].

Во II главе диссертации рассматривается частный случай пространств, введённых в I главе, а именно, расслоённое пространство со структурной группой $C(3,1)$. Только такая сигнатура структурной группы приводит к метрике

$$-(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 = \eta_{ij}\omega^i\omega^j,$$

где

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

тензор Минковского. В этой главе разобран простейший случай, в котором можно получить нетривиальные решения уравнений Янга-Миллса. Здесь накладываются следующие упрощающие условия.

Во-первых, предполагается, что $\omega_0^0 = 0$. Этого всегда можно добиться благодаря существованию конформного преобразования нормализации. Тем самым количество искомых функций уменьшается на 4. Во-вторых, предполагается, что $\Phi^i = 0, i = 1,2,3,4$ (такое пространство конформной связности называется пространством *без кручения*). Это требование является конформно-инвариантным, так как при любых конформных преобразованиях компоненты тензора кручения Φ^i преобразуются только через самих себя. Наконец, в-третьих, накладывается требование $\Phi_0^0 = 0$. Это также конформно-инвариантное условие, так как в пространстве без кручения 2-форма Φ_0^0 не меняется при конформных преобразованиях.

Доказывается (п. 10), что при этих дополнительных условиях 6 пфаффовых форм ω_i^j связности Ω перестают играть самостоятельную роль и выражаются через ω^i с помощью формул Кристоффеля. Тем самым количество искомых функций в системе уравнений Янга-Миллса сокращается на 24. В п. 10 также показано, что функции b_{ij} (коэффициенты разложения форм ω_i по базисным формам ω^i) являются симметричными, т.е.

$$\omega_i = b_{ij}\omega^i, \qquad b_{ij} = b_{ji}.$$

Это означает, что неизвестных функций b_{ij} уже не 16, а только 10.

Количество уравнений Янга-Миллса также можно существенно уменьшить. В п. 9 доказано, что уравнения Янга-Миллса вида

$$d * \Phi_i^j + \Omega \wedge * \Phi_i^j - * \Phi_i^j \wedge \Omega = 0$$

являются следствиями остальных уравнений, поэтому их можно отбросить.

В итоге проведённых во II главе вычислений оказалось, что число искомых функций сокращается до 20, а число независимых уравнений системы – до 19. Это 10 уравнений Эйнштейна

$$R_{ij} = 2b_{ij} + \frac{1}{6}R\eta_{ij}, \quad R = \eta^{ij}R_{ij}$$

и 9 уравнений, состоящих в равенстве нулю тензора Баха

$$\eta^{mn}\left(-b_{(ij),mn} + b_{(pm)}R^p_{(ij)n}\right) - \frac{1}{3}Rb_{(ij)} + b_{,(ij)} = 0$$

(индексы после запятой обозначают ковариантные производные, R^p_{ijn} – компоненты тензора Римана).

Если из первой группы уравнений выразить функции b_{ij} и подставить полученное выражение во вторую группу уравнений, то все уравнения Янга-Миллса сведутся к 9 дифференциальным уравнениям, но уже не 2-го, а

4-го порядка. Искомыми функциями в этом случае являются только 10 функций g_{ij}, компонент метрики

$$\eta_{ij}\omega^i\omega^j = g_{ij}dx^i dx^j,$$

записанной в голономном базисе. Поэтому уравнения Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения полностью определяются метрикой, т.е. пфаффовыми формами ω^i. Принципиально иная ситуация возникает в пространстве с кручением, где 1-формы ω_i^j не выражаются через ω^i по формулам Кристоффеля, а начинают играть самостоятельную роль.

Во II главе диссертации также доказаны следующие результаты.

1. Метрика любого пространства Эйнштейна (когда $R_{ij} = \varkappa\eta_{ij}$, R_{ij} – тензор Риччи, $\varkappa = const$) может быть принята за метрику пространства конформной связности без кручения, где $\Phi_0^0 = 0$ и выполняются уравнения Янга-Миллса. При этом форма конформной кривизны Ф выражается только через тензор Вейля кривизны метрики пространства Эйнштейна.
2. Любая метрика Фридмана-Робертсона-Уокера в пространстве конформной связности без кручения даёт лишь конформно-плоское решение уравнений Янга-Миллса. При этом для тензора энергии-импульса получается диагональная матрица с двумя параметрами, ρ и p, трактуемыми в космологии как плотность энергии и давление. Тензор энергии-импульса, получившийся в результате решения уравнений Янга-Миллса (т.е. геометрическим способом), совпадает с тем, что получается из физических соображений.

Результаты, полученные во II главе данной работы, опубликованы в [2].

В III главе диссертации найдено полное решение уравнений Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения при условии $\Phi_0^0 = 0$ для центрально-симметрической метрики

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + e^{2\mu}(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2),$$

где λ, μ, ν (искомые функции в системе уравнений Янга-Миллса) зависят только от t и r, а $\sigma'' = -\varkappa\sigma,\ \varkappa = const$.

Эта метрика по многим причинам является объектом пристального внимания учёных, начиная с 1916 года (когда Шварцшильд привёл своё решение уравнений Эйнштейна) и до наших дней. В общепринятом понятии центрально-симметрической метрики считается, что $\varkappa = 1$, т.е. $\sigma(\theta) = \sin\theta$, однако, не увеличивая трудоёмкость вычислений, можно рассмотреть и более общий случай, $\varkappa = const$, что и сделано в данной диссертационной работе.

Для упрощения уравнений Янга-Миллса существенно используется то, что в пространстве конформной связности метрика определена с точностью до множителя (благодаря преобразованию перенормировки). Поэтому делением центрально-симметрической метрики на $e^{2\mu}$ её можно привести к виду

$$\psi = \left(-e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2\right) + (d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2),$$

когда она является прямой суммой двух бинарных квадратичных форм, первая из которых зависит только от t и r, а вторая – только от θ и φ. При этом введённая ранее константа $\varkappa$ является гауссовой кривизной второго слагаемого метрики.

Путём выбора подходящей системы координат (t, r) получившуюся метрику можно привести либо к виду

$$\psi = \left(-dt^2 + e^{2\lambda}dr^2\right) + (d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2),$$

либо к виду

$$\psi = (-e^{2\nu}dt^2 + dr^2) + (d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2).$$

Поэтому количество искомых функций становится ещё на 1 меньше.

Для каждого из получившихся представлений центрально-симметрической метрики приведено общее решение уравнений Янга-Миллса, выражающееся через эллиптическую $\wp$-функцию Вейерштрасса (п. 15). Для нескольких частных случаев получены решения, выражающиеся через элементарные функции (п. 17). Указано, какие из них приводят к известным решениям Шварцшильда и Коттлера. В п. 16 доказаны критерии того, что метрика, являющаяся прямой суммой двух бинарных квадратичных форм, является эйнштейновой метрикой и конформно-плоской метрикой.

Результаты, полученные в III главе данной работы, опубликованы в [3].

В статье [6] были продолжены исследования, начатые в III главе. Были найдены некоторые решения уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики при отсутствии дополнительного условия $\Phi_0^0 = 0$.

В IV главе диссертации рассматривается более общий по сравнению со второй и третьей главами случай. Теперь нет требования $\Phi_0^0 = 0$, но, по-прежнему, $\Phi^i = 0$. Получается пространство конформной связности без кручения. При этом, как и во II главе, считается, что $\omega_0^0 = 0$.

В п. 23 показано, что, в отличие от случая, рассмотренного во II главе диссертации, в пространстве конформной связности без кручения уравнения Янга-Миллса распадаются не на две группы, а на три. Это происходит из-за того, что уравнения Янга-Миллса вида

$$d * \Phi_i^j + \Omega \wedge * \Phi_i^j - * \Phi_i^j \wedge \Omega = 0$$

теперь уже не являются следствием всех остальных уравнений системы, а превращаются в 8 уравнений Максвелла (п. 23)

$$d\Phi_0^0 = 0, \quad d * \Phi_0^0 = 0.$$

Первоначально получаются 44 уравнений Янга-Миллса на 26 неизвестных функций, система сильно переопределённая. Дополнительные (по сравнению со случаем, рассмотренным во II и III главах) 6 функций возникают из-за того, что тензор b_{ij} при условии $\Phi_0^0 \neq 0$ не является симметричным. В следующих трёх пунктах проводится упрощение этой системы.

В п. 24 доказано, что среди этих 44 уравнений имеются 4 уравнения, совпадающие с одной из групп уравнений Максвелла, поэтому число уравнений сокращается до 40.

В п. 25 показано, что кососимметричная часть группы из 16-ти уравнений, аналогичных уравнениям Баха из главы II, выполняется тождественно, поэтому ещё 6 уравнений Янга-Миллса можно отбросить.

Наконец, в п. 26 доказано, что система уравнений Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения сводится всего лишь к 27 уравнениям на 26 неизвестных функций. Система всё равно переопределённая, но это не означает её несовместность.

В п. 29 рассматривается чисто временное решение этой системы, т.е. случай, когда искомые функции зависят только от переменной t. Иными словами, уравнения Янга-Миллса решаются для метрики вида

$$-dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2.$$

Приводится развёрнутая запись всех уравнений Янга-Миллса, которые сводятся к 3 дифференциальным уравнениям на 3 неизвестных функции a, b и c, т.е. переопределённость системы исчезает. Система получилась очень сложной, и найти её общее решение не удалось. Приводятся два класса частных решений, записанных в явном виде. Любопытно, что одно из этих частных решений снова (так же, как и в главе III, для центрально-симметрической метрики) выражается через эллиптическую $\wp$-функцию Вейерштрасса.

Результаты, полученные в IV главе данной работы, опубликованы в [4]. В статье [5] приводятся ещё несколько частных решений уравнений Янга-Миллса для чисто временной метрики.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации:

1. На 4-мерном многообразии конформной связности (с кручением) имеется лишь один инвариантный функционал действия, квадратичный по кривизне – функционал Янга-Миллса. Равенство нулю вариации этого функционала приводит к уравнениям Янга-Миллса. Это 60 нелинейных

дифференциальных уравнений 2-го порядка на 60 неизвестных функций от четырёх переменных.
2. Уравнения Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения при дополнительном условии $\Phi_0^0 = 0$ сводятся к 10-ти уравнениям Эйнштейна и 9-ти уравнениям, представляющим собой равенство нулю тензора Баха. Всего 19 уравнений на 20 неизвестных функций.
3. В таком пространстве получена в явном виде система уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики. Найдено полное решение этой системы, выражающееся через эллиптическую $\wp$-функцию Вейерштрасса. Приведены некоторые частные решения в элементарных функциях, среди которых есть и известные решения Шварцшильда и Коттлера.
4. Уравнения Янга-Миллса в 4-мерном пространстве конформной связности без кручения (без всяких дополнительных условий) сводятся к трём группам из $10 + 9 + 8 = 27$ уравнений на 26 неизвестных функций. Новая (по сравнению с п. 2 Заключения) группа уравнений – это уравнения Максвелла. В этом пространстве для чисто временной метрики выписана вся система уравнений Янга-Миллса. Приведены два класса частных решений.

Публикации автора по теме диссертации

1. Лукьянов, В.А. Уравнения Янга-Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности / В.А. Лукьянов // Известия вузов. Математика. - 2009. - №3. - С. 67-72.
2. Лукьянов, В.А. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна / Л.Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов // Известия вузов. Математика. - 2009. - №9. - С. 69-74.
3. Лукьянов, В.А. Полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики / Л.Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов // Журнал Сибирского федерального университета. Серия Математика и физика. - 2011. - Т. 4. - №3. С. 350-362.
4. Лукьянов, В.А. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла / Л.Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов // Журнал Сибирского федерального университета. Серия Математика и физика. - 2009. - Т. 2. - №4. - С. 432-448.
5. Luk'yanov V.A. Purely time-dependent solutions to the Yang-Mills equations on a 4-dimensional manifold with conformal torsion-free connection / V.A. Luk'yanov, L.N. Krivonosov // Журнал Сибирского федерального университета. Серия Математика и физика. - 2013. - Т. 6. - N°1. - С. 40-52.

6. Лукьянов, В.А. Решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики при наличии электромагнитного поля / Л.Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2013. - N°3. - С. 54-63.