

На правах рукописи

Сергеева Дина Владимировна

ХАРАКТЕРЫ N -АРНЫХ ПОЛУГРУПП И N -АРНЫХ ГРУПП

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Казань — 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный педагогический университет» на кафедре математики и методики преподавания математики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВПО «Череповецкий
государственный университет»
Мухин Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Учреждения образования
«Гомельский государственный
университет им. Франциско Скорины»
Скиба Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент ФГАОУ ВПО «Северный
(Арктический) федеральный
университет им М.В. Ломоносова»
Корабельщикова Светлана Юрьевна

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский
педагогический государственный
университет»

Защита состоится 10 октября 2014 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 1011 2-го корпуса КФУ.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Автореферат разослан «___» _____ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

А.И. Еникеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Алгебраические структуры с одной или несколькими бинарными операциями давно являются объектами изучения алгебры. Естественным обобщением накопленного в этой области опыта оказалось введение n -арных операций и рассмотрение n -арных алгебраических систем, в том числе, n -арных полугрупп и n -арных групп. В научной литературе достаточно широко исследованы свойства n -арных групп, менее исследованы свойства n -арных полугрупп. Изучением этих систем в разное время занимались С. Crombez, G. Six, Г. Чупона, Л.М. Глускин, М. Hosszu, С.А. Чунихин, С.А. Русаков, Endres Norbert, K. Glazek, M.R. Žižović, W.A. Dudek, S. Markovski, В.В. Мухин, А.Н. Гальмак, А.Г. Курош, А.И. Мальцев, А.К. Сушкевич, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, В.А. Артамонов, О.В. Колесников, Ж. Мадевски, Б.Л. Трпеновски, D. Vossion, С. Тодоринов, М. Костова, Буржуф Хамза, Е.Е. Филиппова.

Развитие теории таких n -арных систем привело к тому, что наряду с алгебраической структурой на n -арных группах и n -арных полугруппах стали рассматриваться и другие математические структуры, в частности, топологическая. Топологические n -арные группы и n -арные полугруппы стали изучаться сравнительно недавно. Понятие топологической n -арной группы было введено в 1971 году в работе [11]. Эти объекты рассматривались так же в публикации [10] 1974 году и в работе [8] в 1984 году.

Актуальность исследования теории характеров n -арных полугрупп и n -арных групп обусловлена рядом причин. Выделим из них две, на наш взгляд важнейшие. Во-первых, огромная роль теории характеров, в том числе топологических, и развивающиеся в настоящее время исследования в этом направлении для бинарных полугрупп. Во-вторых, развитие теории n -арных алгебраических систем привело к изучению подобных систем наделенных топологией. Это заставляет искать методы их исследования. Теория характеров n -арных полугрупп и n -арных групп претендует на один из подобных методов.

Следует отметить, что изучение свойств множества характеров локально компактных абелевых топологических групп привело к становлению абстрактного гармонического анализа на таких системах, который имеет многочисленные практические приложения, и позволило лучше понять свойства самих этих топологических бинарных структур. Данный факт находит отражение в следующей знаменитой теореме.

Теорема Понтрягина - ван Кампена. Для любой локально компактной абелевой топологической группы G естественное отображение G в свою вторую группу характеров $\hat{\hat{G}}$, которое элементу $g \in G$ ставит в соответствие характер $f_g \in \hat{\hat{G}}$ по формуле

$$f_g(\chi) = \chi(g),$$

где χ — характер группы G , является изоморфизмом топологических групп [6].

Введенное в данной работе понятие характера n -арной топологической группы (полугруппы), полученные свойства множества характеров, в частности, распространение теоремы Понтрягина - ван Кампена на случай локально компактных топологических абелевых n -арных групп и топологических n -арных полугрупп с инвариантной мерой, представляют собой аппарат для исследования таких топологических n -арных систем.

В настоящее время топологические n -арные группы и n -арные полугруппы изучают В.В. Мухин, В.А. Дудек, Х. Буржуф, Е.Е. Филиппова и др. [1], [2], [3], [4], [5], [9], [13], [15].

В качестве применения теории характеров, в работе рассматриваются сверточные алгебры мер и функций на локально компактных топологических n -арных группах (n -арных полугруппах), преобразование Фурье-Лапласа на локально компактных топологических n -арных группах.

Объект исследования: характеры n -арных полугрупп (n -арных групп).

Предмет исследования: свойства характеров n -арных полугрупп (n -арных групп), их связь с характерами бинарных полугрупп (групп), а также, некоторые приложения теории характеров.

Цель работы заключается в том, чтобы распространить понятие «характер» со случая бинарных групп (полугрупп) на случай n -арных групп (n -арных полугрупп), изучить свойства характеров таких n -арных систем и рассмотреть их применение.

К основным задачам, решаемым в работе относятся:

- 1) изучение свойств характеров n -арных полугрупп (n -арных групп);
- 2) рассмотрение применения характеров к изучению свойств локально компактных абелевых n -арных групп (n -арных полугрупп).

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

Методы исследования. В работе используются методы алгебры, общей топологии, топологической алгебры, абстрактного гармонического анализа.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении n -арных групп и n -арных полугрупп, в теоретических исследованиях в области топологической алгебры, гармонического анализа, теории функций, функциональном анализе, а также при чтении спецкурсов для студентов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры алгебры, геометрии и теории обучения математике (Вологда, ВГПУ, 2004 г.); на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии (Череповец, ЧГУ, 2005 г.); на межвузовской конференции молодых ученых (Череповец, 2005 г.); на всероссийской научно-технической конференции «Вузовская наука региону» (Вологда, 2005 г.); на региональной молодежной школе-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2006 г.); на сессии аспирантов и молодых ученых (Вологда, 2006 г.); на всероссийской научно-практической конференции «Череповецкие научные чтения» (Череповец, ЧГУ, 2009 г., 2010 г., 2011 г.); на научном семинаре кафедры алгебры и математической логики Ярославского государственного университета

имени П.Г. Демидова (Ярославль, ЯрГУ, 2011 г.); на 6-й международной научно-технической конференции «Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта» (Вологда, ВоГТУ, 2011 г.), на научном семинаре «Алгебра и логика» Новосибирского государственного университета (Новосибирск, НГУ, 2011 г.), на международной научной конференции «Математика в современном мире» посвященной 150-летию Д.А. Граве (Вологда, ВГПУ, 2013 г.).

На защиту выносятся:

- 1) свойства характеров n -арных полугрупп (n -арных групп);
- 2) применение характеров к изучению свойств локально компактных абелевых n -арных групп (n -арных полугрупп).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [16] – [30], из них [16] – [18] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Работы [16], [17], [20], [21], [23]-[27], [29], [30] выполнены в соавторстве с научным руководителем В.В. Мухиным.

Структура и объем диссертационного исследования. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Библиография включает 92 наименования. Общий объем диссертации 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Отметим, что нумерация теорем в данном автореферате совпадает с нумерацией теорем в диссертационном исследовании.

Введение содержит обоснование выбора темы, ее актуальность, объект, предмет, цель и задачи исследования.

В **главе 1** содержится обзор и анализ научной литературы, посвященной исследованию n -арных групп, n -арных полугрупп, характеров бинарных групп (полугрупп), инвариантных мер и преобразования Фурье-Лапласа на локально компактных топологических группах.

В **главе 2** вводится понятие «характер n -арной полугруппы» (n -арной группы), проводится исследование свойств характеров n -арных полугрупп (n -арных групп).

Глава разбита на два раздела. Здесь рассматриваются следующие вопросы:

- распространение понятия «характер» со случая бинарных полугрупп (групп) на случай n -арных полугрупп (n -арных групп);
- установление вида алгебраической структуры данного множества;
- исследование свойств множества характеров на рассматриваемых системах;
- изучение связи структуры характеров n -арных полугрупп (n -арных групп) с подобной структурой бинарных полугрупп (групп).

Следующее понятие при $n = 2$ полностью совпадает с соответствующим понятием для бинарных групп.

Пусть C множество всех комплексных чисел. Отображение $\chi: X \rightarrow C$ назовем

▪ **характером n -арной полугруппы** $\langle X, () \rangle$, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ выполняются следующие условия:

$$1) \chi((x_1^n)) = \chi(x_1) \cdot \dots \cdot \chi(x_n);$$

$$2) \left| \chi((x_1^n)) \right| = 0 \text{ или } \left| \chi((x_1^n)) \right| = 1.$$

▪ **характером n -арной группы** $\langle X, () \rangle$, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ выполняются следующие условия:

$$1) \chi((x_1^n)) = \chi(x_1) \cdot \dots \cdot \chi(x_n);$$

$$2) \left| \chi((x_1^n)) \right| = 1.$$

Теорема 2.1.2. Множество X^* всех характеров n -арной полугруппы X , наделенное операцией умножения характеров, является коммутативной бинарной полугруппой с единицей и нулем.

Теорема 2.1.3. Множество $\hat{X}$ всех характеров n -арной полугруппы X , не обращающихся в ноль на X , является подгруппой X^* .

Теорема 2.1.4. Если χ — тождественно не равный нулю характер n -арной полугруппы $\langle X, () \rangle$, то формула

$$\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in X)$$

определяет характер данной n -арной полугруппы тогда и только тогда, когда $\beta^{n-1} = 1$ или $\beta = 0$.

Непустое подмножество I n -арной полугруппы X называется идеалом X , если для любой последовательности $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$, любого $a \in I$ и любого $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ имеем $(a_1^i a a_{i+1}^{n-1}) \in I$.

Идеал I называется вполне изолированным идеалом n -арной полугруппы X , если $X \setminus I$ есть n -арная подполугруппа X . Далее всюду X — абелева n -арная полугруппа, если не оговорено противное.

Теорема 2.1.5. Пусть $\chi \in X^*$. Множество

$$V_\chi = \{ a \in X \mid \chi(a) = 0 \}$$

является или пустым множеством, или вполне изолированным идеалом n -арной полугруппы X .

Пусть P — вполне изолированный идеал n -арной полугруппы X . Тогда характеристическая функция

$$\varepsilon_P = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X \setminus P \\ 0, & \text{если } x \in P \end{cases}$$

является характером n -арной полугруппы X .

Теорема 2.1.6. Пусть P — вполне изолированный идеал n -арной полугруппы X . Множество $H_P^* = \{\chi \mid \chi \in X^*, V_\chi = P\}$ является подгруппой X^* , и ε_P есть единица H_P^* . Каждый характер $\chi \in X^*$ принадлежит H_P^* если $P = V_\chi$. Если P_1 и P_2 — различные вполне изолированные идеалы X , то $H_{P_1}^* \cap H_{P_2}^* = \emptyset$.

Формула

$$x * y = (x a_1^{n-2} y) \quad (x, y \in X) \quad (1)$$

задает коммутативную и ассоциативную бинарную операцию на X для последовательности $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ [4].

Теорема 2.1.8. Если χ — ненулевой характер n -арной полугруппы X , то формула $\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x)$ ($x \in X$) определяет характер бинарной полугруппы $\langle X, * \rangle$ тогда и только тогда, когда $\beta = \chi(a_1) \cdot \dots \cdot \chi(a_{n-2})$ или $\beta = 0$.

Теорема 2.1.9. Пусть коммутативная n -арная полугруппа X обладает нейтральной последовательностью $a_1^{n-2}d$. Если χ — характер бинарной полугруппы $\langle X, * \rangle$, то для каждого комплексного числа β такого, что $\beta^{n-1} = \chi\left(\binom{n}{d}\right)$, функция $\beta \cdot \chi(x)$ ($x \in X$) является характером n -арной полугруппы X .

n -Арную полугруппу X назовем сепаративной n -арной полугруппой, если для некоторой последовательности $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ из равенств $(a a_1^{n-2} a) = (b a_1^{n-2} b) = (a a_1^{n-2} b)$ ($a, b \in X$) следует $a = b$.

Теорема 2.1.10. n -Арная полугруппа X является сепаративной для последовательности a_1^{n-2} тогда и только тогда, когда для этой последовательности бинарная полугруппа $\langle X, * \rangle$ является сепаративной бинарной полугруппой.

Мы говорим, что характеры n -арной полугруппы X из множества $A \subset X^*$ отделяют элементы X , если для любых различных элементов $a, b \in X$ найдется такой характер $\chi \in A$, что $\chi(a) \neq \chi(b)$.

Теорема 2.1.11. Пусть X — n -арная полугруппа. Если найдется множество $A \subset X^*$ такое, что характеры из A не обращаются в ноль и отделяют элементы X , то X является сепаративной n -арной полугруппой.

Абелеву n -арную полугруппу называют n -арной полугруппой с сокращениями, если отображение $x \mapsto (a_1^{n-1}x)$ ($x \in X$) инъективно для каждой последовательности $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$ [4].

Пусть $\langle X, () \rangle$ — абелева n -арная полугруппа с сокращениями. В [14] показано, что существует абелева n -арная группа $\langle G, () \rangle$ и инъективное отображение $\varphi: X \rightarrow G$ такое, что $\varphi(a_1^n) = (\varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n))$. Не ограничивая общности, будем отождествлять X с $\varphi(X)$, т.е. предполагать, что $X \subset G$ и, что сужение n -арной операции из G на X совпадает с n -арной операцией на X .

Теорема 2.1.13. Множество $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} n-2 \\ x_1 \end{smallmatrix} \right)^{-1} x_2 \mid x_1, x_2 \in X \right\}$ является n -арной подгруппой $\langle G, () \rangle$, содержащей X , и, следовательно, — наименьшей n -арной подгруппой $\langle G, () \rangle$, содержащей X .

Теорема 2.1.14. Пусть χ — характер абелевой n -арной полугруппы $\langle X, () \rangle$ с сокращениями, не обращающийся в ноль на X . Тогда формула

$$f_\chi \left(\left(\begin{smallmatrix} n-2 \\ x_1 \end{smallmatrix} \right)^{-1} x_2 \right) = (\chi(x_1))^{2-n} (\chi(x_2))^{n-1}, \quad (x_1, x_2 \in X)$$

определяет характер n -арной группы $\langle G, () \rangle$, причем сужение f_χ на X совпадает с χ .

В [12] показано, что для всякой n -арной полугруппы X существует бинарная полугруппа S такая, что $X \subset S$, каждый элемент S представим в виде $x_1 \cdot \dots \cdot x_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $x_1 \cdot \dots \cdot x_i \neq y_1 \cdot \dots \cdot y_j$ для любых $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ и $i \neq j$, а так же $(x_1^n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ для любой последовательности $x_1^n \in X^n$. Такую полугруппу S называют универсальной обертывающей полугруппой для n -арной полугруппы X . Если n -арная полугруппа X абелева, то существует абелева универсальная обертывающая полугруппа для X .

Теорема 2.1.15. Если χ — характер бинарной полугруппы S , то сужение χ на X является характером n -арной полугруппы X .

Если χ — характер n -арной полугруппы X , то существует единственный характер бинарной полугруппы S , сужение которого на X совпадает с χ .

Теорема 2.1.16. Если характеры бинарной полугруппы S отделяют элементы S , то характеры n -арной полугруппы X отделяют элементы X .

Если характеры n -арной полугруппы X отделяют элементы X , и универсальная обертывающая полугруппа S n -арной полугруппы X содержит

такой элемент $a \in X$, что сдвиги $z \mapsto a^i \cdot z$ в S инъективны для любого $i = 1, \dots, n-1$, то характеры бинарной полугруппы S отделяют элементы S .

Пусть $\langle X, () \rangle$ — n -арная группа. Множество всех характеров n -арной группы X будем обозначать $\hat{X}$.

Теорема 2.2.1. $\hat{X}$ — бинарная группа относительно обычного умножения комплекснозначных функций.

Если на множестве X существует такая бинарная операция $\cdot$, что $\langle X, \cdot \rangle$ — группа и для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ имеет место равенство

$$(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n,$$

то $\langle X, () \rangle$ называется производной n -арной группой от бинарной группы $\langle X, \cdot \rangle$.

Теорема 2.2.3. Если n -арная группа $\langle X, () \rangle$ является производной от бинарной группы $\langle X, \cdot \rangle$ и $\chi(x)$ — характер группы $\langle X, \cdot \rangle$, то для любого $\beta \in \{^{n-1}\sqrt{1}\}$ формула

$$\tilde{\chi}(x) = \chi(x) \cdot \beta$$

определяет характер на $\langle X, () \rangle$.

Также справедлива теорема обратная к 2.2.3.

Бинарная группа $\langle G, \cdot \rangle$ называется обертывающей для n -арной группы $\langle X, () \rangle$, если:

- 1) группа G порождается множеством X ;
- 2) $(a_1^n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ для любой последовательности $a_1^n \in X^n$.

Множество $G_0 = \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X\}$ является нормальной подгруппой G . Подгруппа $\langle G_0, \cdot \rangle$ группы $\langle G, \cdot \rangle$ называется соответствующей группой n -арной группы $\langle X, () \rangle$. Факторгруппа G/G_0 является циклической группой с образующим элементом X , порядок которой делит $n-1$. Если $|G/G_0| = n-1$, то группа $\langle G, \cdot \rangle$ называется универсальной обертывающей группой. Для любой n -арной группы существует универсальная обертывающая группа. Группу $\langle X, * \rangle$, где операция $*$ задана формулой (1), называют сопутствующей группой n -арной группы $\langle X, () \rangle$ [7].

Теорема 2.2.5. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — обертывающая группа абелевой n -арной группы $\langle X, () \rangle$, G_0 — соответствующая группа, $|G/G_0| = k$ и $n = lk + 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если χ — характер группы G и $\beta \in \{l\sqrt[1]{1}\}$, то формула

$$\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in X) \quad (2)$$

задает характер χ_1 n -арной группы $\langle X, () \rangle$, причем характеры, определяемые формулой (2) равны тогда и только тогда когда равны числа $\beta \in \{l\sqrt[1]{1}\}$ и равны характеры группы G ;

2. Если $k = n - 1$, то каждый характер n -группы $\langle X, () \rangle$ является сужением на X характера группы G , и тем самым, представим формулой (2);

3. При $l < n - 1$ и $b \in X$ для любого характера χ соответствующей группы G_0 и для любого $\alpha \in \{n-1\sqrt[1]{1}\}$ формула

$$\chi_1(bx) = \alpha \cdot \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in G_0),$$

где $\beta^k = \chi(b^k)$, задает характер n -арной группы $\langle X, () \rangle$.

Теорема 2.2.6. Пусть χ — характер сопутствующей группы $\langle X, * \rangle$, где бинарная операция на X задана формулой (1) для последовательности a_1^{n-2} , и aa_1^{n-2} — нейтральная последовательность в $\langle X, () \rangle$. Тогда χ является характером n -арной группы $\langle X, () \rangle$ тогда и только тогда, когда $\chi\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ a \end{smallmatrix}\right)\right) = 1$.

Теорема 2.2.7. Пусть χ — характер n -арной группы $\langle X, () \rangle$. Тогда χ является характером бинарной группы $\langle X, * \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\chi(a_1) \cdot \chi(a_2) \cdot \dots \cdot \chi(a_{n-2}) = 1.$$

Обозначим $\hat{X}^*$ множество характеров бинарной группы $\langle X, * \rangle$, $\hat{X}$ — множество характеров n -арной группы $\langle X, () \rangle$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.8. Множества

$$\left\{ f \in \hat{X}^* \mid f\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ a \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 \right\} \text{ и } \left\{ f \in \hat{X} \mid f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \dots \cdot f(a_{n-2}) = 1 \right\}$$

являются подгруппами каждой из групп $\hat{X}^*$ и $\hat{X}$ и совпадают.

Теорема 2.2.9. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — абелева бинарная группа, X — система образующих G , H — подгруппа G , a — элемент из G такие, что $X = aH$, множества $aH, \dots, a^{k-1}H$ попарно различны и $a^k H = aH$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $n = l(k-1) + 1$ и $(a_1^n)_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ n \end{smallmatrix} \right) \rangle$ является абелевой n -арной группой;
2. Если χ — характер k -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ k \end{smallmatrix} \right) \rangle$, $\beta \in \{k^{-1}\sqrt[k]{1}\}$, то формула

$$\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in X)$$

задает характер n -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ n \end{smallmatrix} \right) \rangle$;

3. Если χ_1 — характер n -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ n \end{smallmatrix} \right) \rangle$, $(\chi_1(b))^{k-1} = 1$ для некоторого $b \in X$ и $\chi_1\left(\underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_k\right) = \chi_1(b)$, то формула

$$\chi(x) = \overline{\chi_1(b)} \chi_1(x) \quad (x \in X)$$

определяет характер k -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ k \end{smallmatrix} \right) \rangle$;

4. Если χ — характер бинарной группы G , то сужение χ на X является характером k -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ k \end{smallmatrix} \right) \rangle$, причем различные характеры бинарной группы G имеют различные сужения на X ;
5. Каждый характер k -арной группы $\langle X, \left(\begin{smallmatrix} \\ k \end{smallmatrix} \right) \rangle$ является сужением на X некоторого характера бинарной группы G .

В главе 3 рассмотрены особенности n -арных полугрупп и n -арных групп, наделенных топологией и инвариантной мерой.

Глава разбита на два раздела. Здесь рассматриваются следующие вопросы:

- понятие характера топологической n -арной полугруппы (топологической n -арной группы);
- свойства характеров топологических n -арных полугрупп (топологических n -арных групп);
- связь структуры характеров топологических n -арных полугрупп (топологических n -арных групп) с подобной структурой топологических бинарных полугрупп (топологических бинарных групп);
- условия существования инвариантных мер на рассматриваемых топологических n -арных структурах;

- топологическая структура множества характеров топологических n -арных полугрупп с нейтральной последовательностью и инвариантной мерой.

Пусть $\langle X, (), \tau \rangle$ — локально компактная абелева топологическая n -арная полугруппа. Обозначим и через $\hat{X}$ непрерывные характеры $\langle X, (), \tau \rangle$.

Отметим, что теоремы 2.2.3-2.2.8, приведенные выше, обобщаются на случай топологических n -арных групп, в предположении рассмотрения непрерывных характеров на этих топологических n -арных группах.

Теорема 3.1.1. *Группа $\hat{X}$, наделенная топологией равномерной сходимости на компактных множествах является отделимой топологической группой.*

Рассмотрим группу $\langle G, () \rangle$ из теоремы 2.1.13. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\langle X, (), \tau \rangle$ — топологическая абелева n -арная полугруппа с сокращениями и на n -арной группе $\langle G, () \rangle$ задана локально компактная топология τ_G , такая что ее сужение на X слабее топологии τ_X , существует непустое множество $U \in \tau_X \cap \tau_G$ такое, что сужения τ_X и τ_G на U совпадают.*

Тогда для всякого непрерывного характера $\chi \in \hat{X}$ существует характер $f_\chi \in \hat{G}$, задаваемый формулой

$$f_\chi \left(\begin{pmatrix} n-2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{-1} x_2 \right) = (\chi(x_1))^{2-n} (\chi(x_2))^{n-1}, \quad (x_1, x_2 \in X),$$

и отображение $\chi \rightarrow f_\chi$ $\chi \in \hat{X}$ является изоморфизмом топологических групп $\hat{X}$ и $\hat{G}$. Кроме того, группы $\hat{X}$ и $\hat{G}$ локально компактны.

Через $K(X)$ обозначаем множество всех компактных подмножеств X , а через $B(X)$ — наименьшее σ -кольцо подмножеств множества X , содержащее $K(X)$ (элементы $B(X)$ называют борелевскими подмножествами X). σ -Аддитивную функцию на $B(X)$, конечную на каждом компактном множестве X , называют борелевской мерой. Мету μ на X называем инвариантной на X , если $\mu([a_1^{n-1}B]) = \mu(B)$ для любых $B \in B(X)$ и $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$ таких, что множество $[a_1^{n-1}B] = \{(a_1^{n-1}x) \mid x \in B\}$ принадлежит $B(X)$.

Теорема 3.2.1. *Ненулевая инвариантная мера на топологической абелевой n -арной полугруппе $\langle X, (), \tau \rangle$ с сокращениями существует тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности $a_1^{n-2} \in X$ существует ненулевая мера μ на $\langle X, (), \tau \rangle$ такая, что для любого $x \in X$ и любого $K \in K(X)$ выполняется равенство*

$$\mu\left(\left[\chi a_1^{n-2} K \right]\right) = \mu(K).$$

Теорема 3.2.2. *Ненулевая инвариантная мера на топологической абелевой n -арной полугруппе $\langle X, (), \tau \rangle$ с сокращениями существует тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности a_1^{n-2} бинарная топологическая полугруппа $\langle X, *, \tau \rangle$, где $x * y = (\chi a_1^{n-2} y)$ ($x, y \in X$), имеет открытый идеал I с открытыми сдвигами на элементы полугруппы $\langle X, *, \tau \rangle$, и на I существует семейство непрерывных инвариантных отклонений, отделяющее точки I .*

Теорема 3.2.4. *Пусть $\langle X, (), \tau \rangle$ — n -арная полугруппа, с нейтральной последовательностью, обладающая инвариантной мерой μ . Тогда $\hat{X}$, наделенная топологией равномерной сходимости на компактных множествах будет локально компактной топологической группой.*

В главе 4 исследовано применение характеров к изучению свойств локально компактных абелевых n -арных групп (n -арных полугрупп).

Глава разбита на два раздела. Здесь рассматриваются следующие вопросы:

- распространение теоремы Понтрягина - ван Кампена на случай локально компактных топологических абелевых n -арных групп и топологических абелевых n -арных полугрупп с инвариантной мерой;
- сверточные алгебры мер и функций на локально компактных топологических n -арных полугруппах (n -арных группах);
- преобразование Фурье-Лапласа на локально компактных топологических n -арных группах.

Пусть G — универсальная обертывающая группа локально компактной абелевой топологической n -арной группы X , χ — непрерывный характер группы G . Сужение χ_X характера χ на X , является непрерывным характером n -арной группы X . Тогда формула $\pi(\chi) = \chi_X$, $\chi \in \hat{G}$ задает отображение π группы характеров $\hat{G}$ в группу $\hat{X}$.

Теорема 4.1.1. π — топологический и алгебраический изоморфизм бинарной группы $\hat{G}$ на бинарную группу $\hat{X}$.

Пусть $x \in X$. Положим

$$x'(\chi) = \chi(x) \quad (\chi \in \hat{X}).$$

Тогда $x' \in \hat{X}$. Зададим отображение ψ из X в $\hat{X}$ равенством $\psi(x) = x'$. Следующие две теоремы можно рассматривать, как распространение теоремы Понтрягина - ван Кампена на случай локально компактных топологических абелевых n -арных групп и на случай топологических абелевых n -арных полугрупп с инвариантной мерой.

Теорема 4.1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *отображение ψ есть непрерывный инъективный гомоморфизм из X в $\hat{X}$;*

- (ii) $\psi(X)$ является открытой n -арной подгруппой $\hat{\hat{X}}$;
- (iii) $\psi(X)$ является классом смежности по открытой подгруппе $\tilde{H}$ группы $\hat{\hat{X}}$;
- (iv) порядок $\hat{\hat{X}}/\tilde{H}$ равен $n-1$.

Теорема 4.1.3. Если на топологической абелевой n -арной полугруппе $\langle X, (), \tau \rangle$ с сокращениями существует ненулевая инвариантная мера μ , то топологические группы $\hat{X}$ и $\hat{\hat{X}}$ являются локально компактными, естественное отображения ρ из X в $\hat{\hat{X}}$, задаваемое формулой

$$\rho(x)(\chi) = \chi(x) \quad (\chi \in \hat{X}),$$

непрерывно и инъективно, X обладает непустым открытым подмножеством U таким, что сужение ρ на U является гомеоморфизмом U на открытое подмножество $\rho(U)$ локально компактной группы $\hat{\hat{X}}$.

Пусть $M(X)$ — множество всех ограниченных комплексных мер на локально компактной топологической n -арной полугруппе X . В работе [4] показано, что для любой последовательности $\mu_1^n \in (M(X))^n$ существует единственная мера $\mu_1 * \dots * \mu_n$ (называемая сверткой мер $\mu_1^n \in (M(X))^n$ и обозначаемая так же $(\mu_1^n *)$) такая, что для любой непрерывной комплекснозначной функции f на X выполняется равенство

$$\int_X f(x) d(\mu_1 * \dots * \mu_n)(x) = \int \dots \int_{X^n} f(x_1^n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n).$$

Теорема 4.2.1. Операция свертки ассоциативна на $M(X)$.

Следствие. $\langle M(X), (*) \rangle$ является n -арной полугруппой.

Далее всюду $\langle X, (), \tau \rangle$ — топологическая абелева n -арная группа, топология которой локально компактна, $\hat{X}$ — множество всех непрерывных характеров этой n -арной группы. Пусть $\mu \in M(X)$. Функция $\hat{\mu}$ на $\hat{X}$, определяемая формулой

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_X \bar{\chi}(x) d\mu \quad (\chi \in \hat{X})$$

называется преобразованием Фурье-Лапласа меры μ .

Пусть λ — положительная инвариантная мера на группе $\langle X, (\cdot), \tau \rangle$. Мера λ однозначна с точностью до постоянного множителя. Она будет ограниченной тогда и только тогда, когда множество X компактно [4].

Множество всех интегрируемых функций на X относительно меры λ будем обозначать $L_1(X, \lambda)$.

Если $f \in L_1(X, \lambda)$, то мера $\mu = f \cdot \lambda$ принадлежит $M(X)$ и

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_X \bar{\chi}(x) d\mu = \int_X f(x) \bar{\chi}(x) d\lambda(x).$$

Теорема 4.2.4. Для любой ненулевой меры $\mu \in M(X)$, абсолютно непрерывной относительно меры λ , найдется такой характер $\chi \in \hat{X}$, что $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

Теорема 4.2.5. Если $\mu_1^n \in (M(X))^n$, то $(\mu_1 * \dots * \mu_n)^\wedge = \hat{\mu}_1 \cdot \dots \cdot \hat{\mu}_n$.

Пусть $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$. Тогда меры $f_1 \cdot \lambda, \dots, f_n \cdot \lambda$ принадлежат $M(X)$. Существует функция $f \in L_1(X, \lambda)$ такая, что $f \cdot \lambda = f_1 \cdot \lambda * \dots * f_n \cdot \lambda$. Эту функцию назовем сверткой функций $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$ и обозначим $f = f_1 * \dots * f_n$.

Теорема 4.2.6. Если $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$, то $(f_1 * \dots * f_n)^\wedge = \hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_n$.

Теорема 4.2.7. Пусть $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$. Тогда для любого $x \in X$

$$\begin{aligned} (f_1 * \dots * f_n)(x) &= \\ &= \int \dots \int_{X^{n-1}} f_1(\rho_{1x_2 \dots x_n}^{-1}(x)) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) d\lambda(x_2) \dots d\lambda(x_n) = \\ &= \int \dots \int_{X^{n-1}} f_1(x_1) f_2(\rho_{2x_1 x_3 \dots x_n}^{-1}(x)) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) d\lambda(x_1) d\lambda(x_3) \dots d\lambda(x_n) = \\ &= \dots = \int \dots \int_{X^{n-1}} f_1(x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1}) f_n(\rho_{nx_1 \dots x_{n-1}}^{-1}(x)) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\text{где } \rho_{ix_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n}(x) = (x_1^{i-1} x x_{i+1}^n) \quad (x \in X).$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В работе получены следующие основные результаты:

- 1) введено понятие характера n -арной полугруппы и n -арной группы;
- 2) исследованы свойства множества характеров указанных n -арных систем, установлена алгебраическая структура множества характеров n -арных полугрупп и n -арных групп;
- 3) указаны способы построения множества характеров на таких структурах, установлена взаимосвязь множества характеров n -арных полугрупп (n -арных групп) с бинарными полугруппами (группами), в том числе, с обертывающей, соответствующей и сопутствующей группами;
- 4) исследованы свойства множества характеров топологических n -арных полугрупп (топологических n -арных групп), в том числе, установлена топологическая структура множества характеров топологической n -арной полугруппы с нейтральной последовательностью и инвариантной мерой;
- 5) получено распространение теоремы Понтрягина - ван Кампена на случай локально компактных топологических абелевых n -арных групп и на случай топологических абелевых n -арных полугрупп с инвариантной мерой;
- 6) исследованы свертки мер и функций на локально компактных абелевых топологических n -арных полугруппах, преобразование Фурье-Лапласа на локально компактных топологических n -арных группах.

Список литературы

- [1] Мухин, В.В. О вложении n -арных абелевых топологических полугрупп в n -арные топологические группы [Текст] / В.В. Мухин, Буржуф Хамза // Вопросы алгебры: Сб. – Гомель: Изд-во Гомельского университета, 1996. – Вып. 9. – С. 153-157.
- [2] Мухин, В.В. Топологические n -арные полугруппы / В.В. Мухин, Буржуф Хамза // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. мат. навук. – 1999. – № 1. – С. 45-48.
- [3] Мухин, В.В. О топологиях на n -арных группах, определяемых семействами отклонений [Текст] / В.В. Мухин // Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики. Сб. научных трудов Белорусского гос. ун-та транспорта. – Гомель, 2002. – С. 72-77.
- [4] Мухин, В.В. Меры на топологических полугруппах [Текст] / В.В. Мухин. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. – 2004. – 265 с.
- [5] Мухин, В.В. Топологические n -полугруппы, являющиеся производными от бинарных полугрупп с топологией [Текст] / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта: Материалы 5-й межд. Науч.-техн. конференции. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – С. 192-195.
- [6] Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1973. – 520 с.
- [7] Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовая теория n -арных групп [Текст] / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.

- [8] Русаков, С.А. К аксиоматике топологических n -арных групп [Текст] / А.С. Русаков // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн., 1984. – С. 149-159.
- [9] Филипова, Е.Е. Некоторые свойства бинарных и n -арных полугрупп с топологией [Текст] / Е.Е. Филипова // Материалы ежегодных смотров-сессий аспирантов и молодых ученых по отраслям науки: Естественные и физико-математические науки – Вологда: ВоГТУ, 2009. – С. 139-147.
- [10] Crombez, C. On topological n -groups [Text] / C. Crombez, G. Six // Abhandlungen Math. Semin. Univ. Hamburg, 1974. – Bd. 41. – P. 115-124
- [11] Čupona, G. On topological n -groups [Text] / G. Čupona // Bull. Soc. Math. Phys. R. S. Macédoine 22, 1971. – Кн. 22. – P. 5-10.
- [12] Čupona G. On representation of associatives into semigroups / G. Čupona, N. Celakoski // Maced. Akad. Of Sci. And Arts Contributions, 1974. – Vol. 6, № 2. – P. 23-24.
- [13] Dudek, W.A. On topological n -ary semigroups [Text] / W.A. Dudek, V.V. Mukhin // Quasigroups and Related Systems 3 (1996). Institute mathematics Academy of Science Moldova, Higher College of Engineering in Legnica Poland. Legnica, 1999. – P. 73-88
- [14] Markovski S. n -Subsemigroups of cancellative semigroups // Proc. Of the symposium n -ary structures/ Skopje, 1982, С. 159-172.
- [15] Mukhin, V. V. On topological n -semigroups [Text] / V.V. Mukhin // Quasigroups and Related Systems. 4 (1997). Institute mathematics Academy of Science Moldova. Printed in Poland, 1999. – P. 39-49.

Работы автора по теме диссертации

по перечню ВАК:

- [16] Сергеева, Д.В. Теорема двойственности для локально компактных абелевых n -групп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Сибирский математический журнал. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2008. – № 6. – С. 1361-1368
- [17] Сергеева, Д.В. Характеры абелевых n -арных полугрупп, обладающих нейтральной последовательностью [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Вестник ИжГТУ. Математика. – Ижевск: ИжГТУ, 2010. – № 4. – С. 156-158.
- [18] Сергеева, Д.В. О существовании инвариантных мер на топологических абелевых n -арных полугруппах с сокращениями [Текст] / Д.В. Сергеева // Вестник ИжГТУ. Математика. – Ижевск: ИжГТУ, 2013. – № 2. – С. 140-141.

в прочих изданиях:

- [19] Сергеева, Д.В. Характеры n -групп [Текст] / Д.В. Сергеева // Сборник трудов участников VI Межвузовской конференции молодых ученых. – Череповец: ЧГУ, 2005. – С. 166-169.
- [20] Сергеева, Д.В. Гармонический анализ на топологических n -группах [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Вузовская наука – региону: Материалы третьей всероссийской научно-технической конференции. – Вологда: ВоГТУ, 2005. – С. 245-247.

- [21] Сергеева, Д.В. Характеры n -групп и связанных с ними бинарных групп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 3-й Межд. науч.-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2005. – С. 102-105.
- [22] Сергеева, Д.В. Характеры топологических n -групп [Текст] / Д.В. Сергеева // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 71-75.
- [23] Сергеева, Д.В. Вторая группа характеров локально компактной абелевой n -группы [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Современная математика и математическое образование в вузах и школах России: опыт, тенденции, проблемы. Межвузовский сборник научно-методических работ. – Вологда: ВГПУ, 2006. – С. 31-33.
- [24] Сергеева, Д.В. Теорема двойственности для локально компактных абелевых n -групп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Научный журнал. Вестник Череповецкого государственного университета. – Череповец: ЧГУ, 2006. – № 2(11). – С. 3-7.
- [25] Сергеева, Д.В. Характеры коммутативных n -полугрупп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 5-й Межд. науч.-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – С. 132-135.
- [26] Сергеева, Д.В. Характеры абелевых n -полугрупп с нейтральной последовательностью [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Череповецкие научные чтения – 2009. Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной дню города Череповца. Часть 3: Современные проблемы технических, естественных и экономических наук. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2009. – С. 181-183.
- [27] Сергеева, Д.В. Алгебраические свойства характеров некоторых коммутативных n -арных полугрупп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Череповецкие научные чтения – 2010. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2010. – С. 127-129.
- [28] Сергеева, Д.В. Группа характеров локально компактной абелевой n -арной полугруппы локально компактна [Текст] / Д.В. Сергеева // Вестник Вологодского государственного педагогического университета. Выпуск 1. – Вологда: ВГПУ, 2011. – С. 65-69.
- [29] Сергеева, Д.В. Характеры n -арных полугрупп и их обертывающих полугрупп [Текст] / В.В. Мухин, Д.В. Сергеева // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 6-й Межд. науч.-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2011. – С. 131-133.
- [30] Сергеева, Д.В. Свойства характеров абелевых n -арных полугрупп [Текст] / Д.В. Сергеева, В.В. Мухин // Математика в современном мире. – Вологда: ВГПУ, 2013. – С. 25-28.

Подписано в печать 14.05.2014. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$
Бумага офисная. Печать офсетная.
Усл.-п.л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано: РИО, ВоГУ 160000, г. Вологда, ул. Ленина, 15