На правах рукописи

Лапин Кирилл Сергеевич

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2014

Работа выполнена на кафедре фундаментальной информатики ФГБОУ ВПО „Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева“.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Щенникова Елена Владимировна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Воротников Владимир Ильич
(ФГАОУ ВПО „Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина“, Нижнетагильский технологический институт (филиал), кафедра математики)

доктор физико-математических наук, профессор
Галиуллин Ильяс Абдэльхакович
(ФГБОУ ВПО „Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)“, кафедра теоретической механики)

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО „Рязанский государственный университет имени С.А Есенина“**

Защита состоится 4 декабря 2014 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАУ ВПО „Казанский (Приволжский) федеральный университет“ по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАУ ВПО „Казанский (Приволжский) федеральный университет“по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35 и на сайте kpfu.ru.

Автореферат разослан __ октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физико-математических наук, доцент **Е.К. Липачев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Качественная теория дифференциальных уравнений и теория ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, в частности, являются в настоящее время быстро развивающимися разделами современной математики, что вызвано потребностями многочисленных приложений в таких разнообразных дисциплинах как аэрокосмические науки, технические науки, науки об окружающей среде, медицинские науки, физические и математические науки. Возрастает интерес российских и зарубежных математиков, а также международных научных организаций к теории устойчивости по Ляпунову решений систем дифференциальных уравнений по части переменных и её приложениям, что подтверждается увеличением количества работ в российских и зарубежных издательствах. В теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных, которая является в идейном плане родственной теории устойчивости по Ляпунову по части переменных, также идет бурный процесс исследований, поскольку это направление представляет большой научный интерес и является весьма плодотворным в естественных и технических приложениях. Главной вехой на пути становления теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений явилась основополагающая работа японского математика Т. Йосидзавы [1], результаты и конструкции которой получили дальнейшее развитие в исследованиях российских и зарубежных математиков. В этой работе были введены понятия различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. В качестве основного средства исследования ограниченности решений в работе [1] был разработан и применён метод, аналогичный методу функций Ляпунова в теории устойчивости.

В монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [2] на основе теории Йосидзавы [1] ограниченности решений по всем переменным и теории устойчивости решений по части переменных было положено начало развитию теории различных видов ограниченности решений по части переменных систем дифференциальных уравнений. С другой стороны, В.И. Воротниковым было разработано новое направление в теории устойчивости по Ляпунову по части переменных, а именно: была развита теория устойчивости по части переменных „частичного“положения равновесия, у которого часть координат контролируется [3]. В связи с этим возник интересный и актуальный вопрос о возможности создания в теории ограниченности решений по части переменных методов, которые были бы в какой-то мере плане аналогичны методам теории устойчивости по части переменных „частичного“положения равновесия. В теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений имеется еще один важный аспект, который связан с неограниченностью решений или, как еще говорят, с неустойчивостью системы по Лагранжу по всем переменным, а также по части переменных. Отметим, что истоки методов исследования неустойчивости по Лагранжу восходят к работам Н.Г. Четаева и Н.Н. Красовского, в которых разработаны эффективные методы исследования неустойчивости по Ляпунову.

Как было сказано выше, понятия устойчивости по Лагранжу и устойчивости по Ляпунову являются родственными. В самом деле, в классической работе Т. Йосидзавы [1] большинство понятий теории устойчивости по Ляпунову было перенесено в теорию устойчивости по Лагранжу. Более того, в работе [1] при помощи метода функций Ляпунова, т.е. прямого метода Ляпунова, в теории устойчивости по Лагранжу были получены аналоги всех основных теорем о различных видах устойчивости по Ляпунову. Однако, начиная с момента появления работы [1] и по настоящее время, многие важные вопросы о неустойчивости по Лагранжу оставались без должного внимания. Аналогичным образом обстоят дела и в теории устойчивости по Лагранжу по части переменных. Действительно, в работе В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [2] была развита теория частичной устойчивости по Лагранжу, в которой при помощи прямого метода Ляпунова были получены аналоги всех основных теорем о различных видах устойчивости по Ляпунову относительно части переменных. Однако, подобно работе [1], многие важные и интересные вопросы о неустойчивости по Лагранжу по части переменных были в работе [2] незаслуженно обойдены вниманием. Наличие неустойчивости по Лагранжу, как в случае всех переменных, так и в случае их части, может являться весьма желательным для практических нужд и представляет большой интерес при исследовании поведения решений конкретных систем. Поэтому важно иметь в своем распоряжении эффективные методы обнаружения неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных.

Целью работы является:

1. Разработка методов исследования поведения решений систем дифференциальных уравнений на различные виды ограниченности по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

2. Приложение разработанных методов исследования к изучению поведения решений динамических систем, описывающих механические параметрические колебательные процессы без линеаризации.

3. Разработка методов исследования систем дифференциальных уравнений на неустойчивость по Лагранжу относительно всех и части переменных или, другими словами, создание методов исследования решений систем на неограниченность по всем и части переменных.

Основные методы исследований.

Основным методом исследования в диссертации является метод функций Ляпунова. Отметим, что все теоремы первого раздела диссертации сформулированы и доказаны в терминах производной Дини.

Достоверность результатов.

Достоверность результатов диссертационного исследования обеспечивается строгостью постановок задач и математических методов их исследования.

Новизна результатов.

Все основные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Введены понятия равномерной ограниченности по части переменных решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями, эквиограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями, тотальной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями, равномерной ограниченности в пределе по части переменных решений

систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями и эквиограниченности в пределе решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Получены достаточные условия соответствующих видов ограниченности решений систем дифференциальных относительно части переменных с частично контролируемыми начальными условиями, доказан критерий равномерной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

2. Проведено исследование на различные виды ограниченности относительно части переменных по скорости с контролем начальных скоростей нелинеаризованных механических параметрических колебательных процессов.

3. Найдены достаточные условия неустойчивости по Лагранжу систем дифференциальных уравнений относительно всех и части переменных. Также получены достаточные признаки неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных, использующие две функции Ляпунова.

Практическая и теоретическая ценность.

Теоретической ценностью результатов исследований, проведенных в диссертации, является постановка новой задачи в теории частичной ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, а именно, задачи ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями, и разработка методов решения поставленной новой задачи. Кроме того, теоретической ценностью результатов, полученных в диссертации, является развитие методов исследования неустойчивости по Лагранжу систем дифференциальных уравнений. Практической ценностью диссертационных результатов является возможность их применения к исследованию решений систем, описывающих реальные естественно-технические процессы на различные виды ограниченности, а также на их неограниченность.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на

1. XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых „Ломоносов“(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 11-15 апреля 2011 г.);

2. Всероссийской научно-практической конференции с Международным участием „Математика и математическое моделирование“(МГПИ им. М.Е. Евсевьева, Саранск, 13-14 октября 2011 г.);

3. X Международной Четаевской конференции „Аналитическая механика, устойчивость и управление“(КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева, Казань, 12-16 июня 2012 г.)

4. конференции „Огарёвские чтения“(МГУ им. Н.П. Огарёва, Саранск, 2011-2013 гг.);

5. семинарах кафедры дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева в 2011-2013 гг. (руководитель - профессор В.Н. Щенников);

6. семинаре кафедры дифференциальных уравнений института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета 13 мая 2014 г. (руководитель - профессор В.И. Жегалов).

Личный вклад.

Постановка задачи предложена научным руководителем. Введение новых математических понятий, доказательства теорем и иллюстрация полученных результатов на примерах проведены автором самостоятельно.

Публикации.

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приводится в конце автореферата [1]–[9].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения и списка литературы. Разделы разбиты на пункты. Нумерация формул и утверждений состоит из трех цифр (первая - номер раздела, вторая - номер пункта, третья - номер формулы или утверждения в данном пункте). Общий объем диссертации составляет 91 страница текста. Список использованных источников содержит 100 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении изложена история вопроса, показана актуальность темы, сформулированы основные результаты. Также описаны краткое содержание и структура диссертации.

Первый раздел

Первый раздел диссертации посвящен задачам ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

В **первом пункте** первого раздела диссертации введено понятие равномерной ограниченности решений системы дифференциальных уравнений (1.1.1) по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений от n переменных:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad F(t,x) = (F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)), \tag{1.1.1}$$

правая часть которой задана и непрерывна в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Предполагается, что каждое решение системы (1.1.1) продолжимо на всю полуось $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0\}$.

Под $\|\cdot\|$ везде будем понимать обычную евклидову норму $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, которая для произвольного $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ задается формулой $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_m^2}$. Для каждого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любого фиксированного числа $1 \leqslant k \leqslant n$ далее будем использовать обозначение $y = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Напомним теперь [1], что производной Дини функции $G(t,x)$ в силу системы (1.1.1) называется функция $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$, которая определяется следующей формулой:

$$G'^{+}_{F(t,x)}(t,x) = \lim_{\alpha \to +0} \left(\sup_{h \in (0;\alpha]} \frac{G(t+h, x+F(t,x)h) - G(t,x)}{h} \right).$$

Для функции $G(t,x)$, заданной в некоторой области $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, употребляется запись $G(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$, если для любого ограниченного подмножества $B \subset E$, замыкание которого принадлежит E, выполнено условие Липшица по переменным t и x, т.е. существует такая постоянная Липшица L, зависящая от B, что для любых точек $(t,x), (t',x') \in B$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(t,x) - G(t',x')| \leqslant L(|t-t'| + ||x-x'||).$$

В случае, когда функция $G(t,x)$ имеет непрерывные частные производные по переменным $x_1,\dots,x_n$, употребляется запись $G(t,x)\in\mathcal{D}(x)$.

Далее область $\{(t,x)\mid t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \|y\|\geqslant R_0\}$ обозначается через $\Omega(R_0)$, где $R_0\geqslant 0$ – некоторое фиксированное число из $\mathbb{R}$. Кроме того, далее обозначаются через $a(r)$, $a(t,r)$, $b(r)$ и $c(r)$ произвольные функции, где $r\geqslant R_0$, $t\geqslant 0$, которые обладают следующими свойствами:

1). $a(r)>0$ – возрастающая функция.

2). $a(t,r)>0$ – возрастающая по r функция при каждом фиксированном $t\geqslant 0$ и, кроме того, функция $a(t,R_0)$ является невозрастающей по t.

3). $b(r)\geqslant 0$ – возрастающая функция и $b(r)\to\infty$ при $r\to\infty$.

4). $c(r)>0$ – непрерывная функция.

Определение 1.1.1. Будем говорить, что решения системы (1.1.1) равномерно ограничены по части переменных $y=(x_1,\dots,x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0=((x_0)_1,\dots,(x_0)_k)$ или, более кратко, равномерно y-ограничены с y_0-контролем, если для каждого неотрицательного числа $\alpha\in\mathbb{R}$ существует такое положительное число $\beta(\alpha)\in\mathbb{R}$, что для любой точки $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$, $||y_0||\leqslant\alpha$, выполнено условие $||y(t,x_0,t_0)||<\beta$ при $t\geqslant t_0$, где $x=x(t,x_0,t_0)$ – любое решение системы (1.1.1), проходящее через точку (t_0,x_0).

Получен достаточный признак равномерной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Теорема 1.1.1. *Пусть для системы* (1.1.1) *существует неотрицательная функция $V(t,x)\in\mathcal{L}(t,x)$, определённая в области $\Omega(R_0)$, для которой выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|)\leqslant V(t,x)\leqslant a(\|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x)\leqslant 0$ в области $\Omega(R_0)$.

Тогда решения системы (1.1.1) *равномерно y-ограничены с y_0-контролем.*

Доказан необходимый признак равномерной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Теорема 1.1.2. *Пусть для правой части $F(t,x)$ системы* (1.1.1) *выполнено условие $F(t,x)\in\mathcal{D}(x)$ и решения системы* (1.1.1) *равномерно y-ограничены с y_0-контролем. Тогда в области $\Omega(R_0)$, где $R_0=\beta(0)$ и $\beta(\alpha)$ – функция из определения 1.1.1, имеется неотрицательная функция $V(t,x)\in\mathcal{L}(t,x)$ обладающая следующими свойствами:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(\|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant 0$ *в области* $\Omega(R_0)$.

Путем объединения утверждения теорем 1.1.1 и 1.1.2, получен следующий критерий равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы (1.1.1):

Теорема 1.1.3. *(Критерий равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы дифференциальных уравнений). Для того, чтобы решения системы* (1.1.1)*, где $F(t,x) \in \mathcal{D}(x)$, были равномерно y-ограничены с y_0-контролем необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$, определённой в области $\Omega(R_0)$, которая обладает следующими свойствами:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(\|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant 0$ *в области* $\Omega(R_0)$. ■

Проведено сравнение полученного выше критерия с критерием (в тексте диссертации теорема 1.1.4) равномерной y-ограниченности решений системы из работы [2]. В работе [2] не рассматривался вопрос о том, можно ли выбрать функцию $V(t,x)$ в теореме 1.1.4 так, чтобы она удовлетворяла условию Липшица $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$. Показано, что при выполнении условия $F(t,x) \in \mathcal{D}(x)$ ответ на этот вопрос положительный. Как следствие получено утверждение, которое уточняет критерий из работы [2], т.е. теорему 1.1.4:

Теорема 1.1.5. *Для того, чтобы решения системы* (1.1.1)*, удовлетворяющей условию $F(t,x) \in \mathcal{D}(x)$, были равномерно y-ограничены необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t,x)$, определённой в области $\Omega(R_0)$, которая обладает следующими свойствами:*

1). $b(||y||) \leqslant V(t,x) \leqslant a(||x||)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant 0$ *в области* $\Omega(R_0)$. ■

Следствие 1.1.1. Пусть решения системы (1.1.1), где $F(t,x) \in \mathcal{D}(x)$, равномерно y-ограничены. Решения этой системы будут равномерно y-ограничены с y_0-контролем тогда и только тогда, когда функцию $V(t,x)$ из теоремы 1.1.5 можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию $V(t,x) \leqslant a(||y||)$. ■

Во **втором пункте** первого раздела диссертации введено понятие тотальной ограниченности (или, по-другому, ограниченности при постоянно действующих возмущениях) решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

Пусть вместе с системой (1.1.1) задана еще одна система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + H(t,x), \quad H(t,x) = (H_1(t,x), \ldots, H_n(t,x)), \tag{1.2.1}$$

где $F(t,x)$ – правая часть системы (1.1.1) и $H(t,x)$ – переменное векторное поле в $\mathbb{R}^n$, называемое возмущением системы (1.1.1), которое является определенным и непрерывным в области $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Далее везде предполагается, что все решения системы (1.2.1), проходящие через произвольную точку (t_0, x_0), продолжимы на всю полуось $t \geqslant t_0$. Систему (1.2.1) удобно для последующих рассмотрений записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Y(t,y,z) + M(t,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = Z(t,y,z) + N(t,y,z), \end{cases}$$

где $x = (y,z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и

$$Y(t,y,z) = (F_1(t,x), \ldots, F_k(t,x)), \quad Z(t,y,z) = (F_{k+1}(t,x), \ldots, F_n(t,x)),$$

$$M(t,y,z) = (H_1(t,x), \ldots, H_k(t,x)), \quad N(t,y,z) = (H_{k+1}(t,x), \ldots, H_n(t,x)).$$

Определение 1.2.1. Будем говорить, что решения системы (1.1.1) тотально ограничены по части переменных $y = (x_1, \ldots, x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_k)$ или, более кратко, тотально y-ограничены с y_0-контролем, если для любого неотрицательного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ существуют такие положительные числа $\beta(\alpha), \gamma(\alpha) \in \mathbb{R}$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$, $||y_0|| \leqslant \alpha$ выполнено условие $||y(t, x_0, t_0)|| < \beta$ при $t \geqslant t_0$, где $x = x(t, x_0, t_0)$ – произвольное решение системы (1.2.1), удовлетворяющей при $\alpha \leqslant ||y|| \leqslant \beta$ неравенству $||M(t,x)|| \leqslant \gamma$.

Далее для функции $G(t,y)$, $t \geqslant 0$, $y \in E$, где E – некоторая область в $\mathbb{R}^k$, далее будем употреблять запись $G(t,y) \in \mathcal{L}_t(y)$, если для любого ограниченного подмножества $B \subset E$, замыкание которого принадлежит E, существует такая постоянная Липшица L, зависящая от B, что для каждого $t \geqslant 0$ и любых $y, y' \in B$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(t,y) - G(t,y')| \leqslant L||y - y'||.$$

Отметим, что из справедливости условия $G(t,y) \in \mathcal{L}(t,y)$, вообще говоря, не следует справедливость условия $G(t,y) \in \mathcal{L}_t(y)$.

Получен достаточный признак тотальной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы (1.1.1):

Теорема 1.2.1. *Пусть для системы* (1.1.1) *существует неотрицательная функция $V(t,y)$, заданная в области $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$, $||y|| \geqslant R_0$, такая, что $V(t,y) \in \mathcal{L}(t,y)$ и $V(t,y) \in \mathcal{L}_t(y)$. Кроме того, пусть для указанной выше функции $V(t,y)$ выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,y) \leqslant a(\|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant -c(||y||)$ в области $\Omega(R_0)$.

Тогда решения системы (1.1.1) *тотально y-ограничены с y_0-контролем.*

Далее во втором пункте введено понятие эквиограниченности решений систем по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Определение 1.2.2. Будем говорить, что решения системы (1.1.1) эквиограничены по части переменных $y = (x_1, \ldots, x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_k)$ или, более кратко, y-эквиограничены с y_0-контролем, если для любого числа $\alpha \geqslant 0$ и каждого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ этой системы, выходящего из произвольной точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, $\|y_0\| \leqslant \alpha$, существует такое положительное число $\beta = \beta(t_0, \alpha) \in \mathbb{R}$, что $\|y(t, x_0, t_0)\| < \beta$ при $t \geqslant t_0$.

Доказан достаточный признак эквиограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Теорема 1.2.2. *Пусть для системы* (1.1.1) *существует неотрицательная функция $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$, определённая в области $\Omega(R_0)$, для которой выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(t, \|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant 0$ в области $\Omega(R_0)$.

Тогда решения системы (1.1.1) *y-эквиограничены с y_0-контролем.*

В **третьем пункте** первого раздела диссертации введено понятие эквиограниченности в пределе решений системы дифференциальных уравнений (1.1.1) по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Определение 1.3.1. Будем говорить, что решения системы (1.1.1) эквиограничены в пределе по части переменных $y = (x_1, \ldots, x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_k)$ или, более кратко, y-эквиограничены в пределе с y_0-контролем, если для любого $\alpha \geqslant 0$ и каждого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ этой системы, выходящего из произвольной точки (t_0, x_0), $\|y_0\| \leqslant \alpha$, существуют положительное число $B \in \mathbb{R}$ и неотрицательное число $T \in \mathbb{R}$ такие, что $\|y(t, x_0, t_0)\| < B$ при $t \geqslant t_0 + T$, где число B не зависит от выбора решения, а число T удовлетворяет условию $T = T(t_0, \alpha)$.

Далее получен достаточный признак эквиограниченности в пределе решений системы дифференциальных уравнений (1.1.1) по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Теорема 1.3.1. *Пусть для системы* (1.1.1) *существует неотрицательная функция* $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$, *определённая в области* $\Omega(R_0)$, *для которой выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(t, \|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant -c(\|y\|)$ *в области* $\Omega(R_0)$.

3). Существуют такие числа $R > R_0$ *и* $\chi > 0$, *что для произвольных* $R_0 \leqslant r \leqslant R$ *и* $t \geqslant 0$ *имеет место неравенство* $a(t,r) \leqslant \chi$.

Тогда решения системы (1.1.1) *являются* y*-эквиограниченными в пределе с* y_0*-контролем.*

Далее введено понятие равномерной ограниченности в пределе решений системы дифференциальных уравнений (1.1.1) по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями:

Определение 1.3.2. Будем говорить, что решения системы (1.1.1) равномерно ограничены в пределе по части переменных $y = (x_1, \ldots, x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_k)$ или, более кратко, равномерно y-ограничены в пределе с y_0-контролем, если решения этой системы y-эквиограничены в пределе с y_0-контролем и число $T = T(t_0, \alpha)$ из определения 1.3.1 удовлетворяет условию $T = T(\alpha)$.

Получен достаточный признак равномерной y-ограниченности в пределе с y_0-контролем решений системы (1.1.1):

Теорема 1.3.2. *Пусть для системы* (1.1.1) *существует неотрицательная функция* $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$, *определённая в области* $\Omega(R_0)$, *для которой выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(\|y\|)$.

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant -c(\|y\|)$ *в области* $\Omega(R_0)$.

Тогда решения системы (1.1.1) *равномерно* y*-ограничены в пределе с* y_0*-контролем.*

Получен более сильный, по сравнению с теоремой 1.3.2, достаточный признак равномерной y-ограниченности в пределе с y_0-контролем решений системы (1.1.1):

Теорема 1.3.3. *Пусть решения системы* (1.1.1) *равномерно* y*-ограничены с* y_0*-*

контролем. Кроме того, пусть существуют неотрицательная функция $V(t,x) \in \mathcal{L}(t,x)$ *и положительная функция* $W(t,x)$*, определенные в области* $\Omega(R_0)$*, для которых выполнены следующие условия:*

1). $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(t,\|y\|)$.

2). Для каждого неотрицательного числа $\vartheta \in \mathbb{R}$ *и любого* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $R_0 \leqslant \|y\| \leqslant \vartheta$*, существует такое положительное число* $\xi = \xi(\vartheta) \in \mathbb{R}$*, что имеет место неравенство* $W(t,x) \geqslant \xi$.

3). $\lim\limits_{t\to\infty}(V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) + W(t,x)) = 0$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $\|y\| \geqslant R_0$.

Тогда решения системы (1.1.1) *равномерно y-ограничены в пределе с* y_0*-контролем.*

Второй раздел

Второй раздел диссертации посвящён применению результатов, полученных в первом разделе к исследованию решений конкретных систем дифференциальных уравнений на различные виды ограниченности по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. В разделе наряду исследованием „чисто математических“систем, проводится исследование поведения решений систем, описывающих реальные процессы, а это показывает, что полученные результаты могут найти применение не только в математике, но и в других областях, особенно в технике.

В **первом пункте** второго раздела диссертации при помощи теоремы 1.1.1 проводится исследование нелинеаризованных колебаний системы, состоящей из $N \geqslant 1$ связанных механических осцилляторов на равномерную ограниченность по скорости с контролем начальных скоростей.

Во **втором пункте** второго раздела данной диссертации проводится исследование при помощи теоремы 1.1.1 на равномерную ограниченность по скорости с контролем начальных скоростей нелинеаризованных механических колебательных процессов в вязкой среде.

В **третьем пункте** второго раздела при помощи теоремы 1.3.2 проведено исследование на равномерную ограниченность в пределе по скорости с контролем начальных скоростей нелинеаризованного механического колебательного процесса без линеаризации в вязкой среде.

В **четвертом пункте** второго раздела диссертации при помощи теорем, полученных в первом разделе диссертации, проводится исследование решений, так называемых, „чисто математических“систем дифференциальных уравнений на различные виды ограниченности по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

Третий раздел

Третий раздел диссертации посвящен вопросам исследования неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных, а именно, при помощи прямого метода Ляпунова разработаны методы исследования неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных.

В **первом пункте** третьего раздела диссертации получены достаточные признаки неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных, использующие одну функцию Ляпунова.

Для любой функции $V(t,x)$ со значениями в $\mathbb{R}$, определенной на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ и имеющей все непрерывные частные производные первого порядка, через $\dot{V}(t,x)$ будем обозначать производную этой функции в силу системы (1.1.1). Кроме того, через B^k_β будем обозначать замкнутый k-мерный шар $\{y \in \mathbb{R}^k \mid ||y|| \leqslant \beta\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.

Определение 3.1.1. Систему дифференциальных уравнений (1.1.1) будем называть устойчивой по Лагранжу относительно части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, или, более кратко, y-устойчивой по Лагранжу, если каждое решение системы (1.1.1) является y-ограниченным, т.е. если для любого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ системы (1.1.1), где $x_0 = x(t_0, x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$, существует такое положительное число $\beta = \beta(x(t, x_0, t_0)) \in \mathbb{R}$, что при всех $t \geqslant t_0$ выполнено условие $||y(t, x_0, t_0)|| \leqslant \beta$.

Определение 3.1.2. Систему дифференциальных уравнений (1.1.1) будем называть неустойчивой по Лагранжу относительно части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, или, более кратко, y-неустойчивой по Лагранжу, если эта система имеет хотя бы одно y-неограниченное решение, т.е. существует такое решение $x = x(t, x_0, t_0)$, $x_0 = x(t_0, x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$, системы (1.1.1), что для любого $\beta > 0$ найдётся $t_1 \geqslant t_0$, зависящее от β, для которого выполнено условие $||y(t_1, x_0, t_0)|| > \beta$.

Получен достаточный признак y-неустойчивости по Лагранжу системы (1.1.1), использующий одну функцию Ляпунова:

Теорема 3.1.1. *Пусть для системы* (1.1.1) *и фиксированного числа* $1 \leqslant k \leqslant n$

существуют неограниченное открытое подмножество $G \subset \mathbb{R}^n$ и функция $V(t,x)$ со значениями в $\mathbb{R}$, которая определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, имеет все непрерывные частные производные первого порядка и, кроме того, удовлетворяет следующим условиям:

1). $V(t,x) > R_0$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G$, где $R_0 \in \mathbb{R}^+$ – некоторое фиксированное число.

2). На каждом подмножестве $\mathbb{R}^+ \times (G \cap (B^k_\beta \times \mathbb{R}^{n-k})) \subset \mathbb{R}^+ \times G$, если это подмножество непусто, функция $V(t,x)$ является ограниченной.

3). $\dot V(t,x) \geqslant c(V(t,x))$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G$, где $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $c(r) > 0$ при $r > 0$.

4). $V(t,x) = R_0$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial G$, где ∂G – граница открытого множества G.

Тогда каждое решение $x = x(t,x_0,t_0)$ системы (1.1.1), где $x_0 \in G$, является y-неограниченным и, в частности, система (1.1.1) y-неустойчива по Лагранжу.

Во **втором пункте** данного раздела диссертации получены достаточные признаки неустойчивости по Лагранжу относительно всех и части переменных, в которых используются две функции Ляпунова, причем одна функция зависит от времени и от всех переменных, а вторая функция зависит от времени и от той части переменных, относительно которой проводится исследование неустойчивости по Лагранжу.

Теорема 3.2.1. *Пусть для системы (1.1.1) и фиксированного числа $1 \leqslant k \leqslant n$ существует неограниченное открытое подмножество $G \subset \mathbb{R}^n$ и функции $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, которые имеют все непрерывные частные производные первого порядка и, кроме того, удовлетворяют следующим условиям:*

1). $W(t,x) > R_0$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G$, где $R_0 \geqslant 0$ – некоторое фиксированное число.

2). $\dot W(t,x) \geqslant 0$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G$.

3). $W(t,x) = R_0$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial G$, где ∂G – граница открытого множества G.

4). $V(t,y) > R_0$ для любого $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{pr}_k(G)$, где $\mathrm{pr}_k : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ – стандартное проектирующее отображение.

5). На каждом подмножестве $\mathbb{R}^+ \times (\mathrm{pr}_k(G) \cap B^k_\beta) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathrm{pr}_k(G)$, если это подмножество непусто, функция $V(t,y)$ является ограниченной.

6). $\dot V(t,x) \geqslant c(V(t,y))$ для любого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G$, где $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая *неубывающая функция, удовлетворяющая условию* $c(r) > 0$ *при* $r > 0$.

Тогда каждое решение $x = x(t, x_0, t_0)$ *системы* (1.1.1)*, где* $x_0 \in G$*, является y-неограниченным и, в частности, система* (1.1.1) *y-неустойчива по Лагранжу.*

В **третьем пункте** третьего раздела диссертации при помощи теорем, полученных в первых двух пунктах данного раздела, проводится исследование конкретных систем дифференциальных уравнений на неустойчивость по Лагранжу относительно всех и части переменных.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Елене Владимировне Щенниковой и доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Николаевичу Щенникову за обсуждение результатов диссертационной работы.

Цитируемая литература.

[1] Yoshizawa, T. Liapunovs function and boundedness of solutions / T. Yoshizawa // Funkcialaj Ekvacioj. - 1959. - V. 2. - P. 95-142.

[2] Румянцев, В.В. Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер. - М.: Наука, 1987. - 254 с.

[3] Воротников, В.И. Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем / В.И. Воротников // Доклады РАН. - 2003. - Т.389. - №3. - С.332-337.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Лапин, К.С. Прямой метод Ляпунова в исследовании неустойчивости по Лагранжу относительно части переменных / К.С. Лапин // Дифференциальные уравнения. – 2013. - Т. 49. - № 1. - С. 128-131.

[2] Лапин, К.С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями / К.С. Лапин // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №10. – С.1281-1286.

[3] Лапин, К.С. Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями / К.С. Лапин // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – №3. – С.309-316.

[4] Лапин, К.С. Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями / К.С. Лапин // Известия вузов. Поволжский регион. Серия физико-математические науки. – 2013. - №2. - С.120-132.

[5] Лапин, К.С. Равномерная ограниченность по скорости с контролем начальных скоростей нелинеаризованных механических колебательных процессов в вязкой среде / К.С. Лапин // Вестник Мордовского государственного университета. Серия физико-математические науки. – 2012. - №2. - С. 46-50.

[6] Лапин, К.С. Равномерная ограниченность по скорости с контролем начальных скоростей нелинеаризованных колебаний связанных механических осцилляторов / К.С. Лапин // Вестник Мордовского государственного университета. Серия физико-математические науки. – 2012. - №2. - С. 196-197.

[7] Лапин, К.С. Неустойчивость по Лагранжу систем дифференциальных уравнений относительно всех переменных и относительно части переменных / К.С. Лапин //Материалы Международного молодежного научного форума „ЛОМОНОСОВ-2011“— М.: МАКС Пресс. - 2011. - С. 1-2.

[8] Лапин, К.С. Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями / К.С. Лапин // Труды X Международной Четаевской конференции „Аналитическая механика, устойчивость и управление“(КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева, г. Казань, 12-16 июня 2012 г.) - Т.2. - С. 323-329.

[9] Лапин, К.С. Производная Дини по семейству функций и равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных / К.С. Лапин // Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием „Математика и математическое моделирование“г. Саранск, 13-14 октября 2011 г. [материалы] / под общ. ред. Н.Г. Тактарова; мордов. гос. пед. ин-т – Саранск, 2012. - С. 198-200.