На правах рукописи

АИЛА ДЕМЕДЕРОС

О ГЕОМЕТРИИ ТРАНССАСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань−2014

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО « Московский педагогический государственный университет ».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,

профессор Кириченко Вадим Федорович.

Официальные оппоненты: Кушнер Алексей Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор

ФГБУН «Институт Проблем Управления РАН»,

Банару Михаил Борисович,

кандидат физико-математических наук, доцент,

ФГБОУ ПО «Смоленский Государственный Университет» , СмолГУ.

Ведущая организация: ФГ БОУ ВПО ТвГУ «Тверской Государственный Университет».

Защита состоится « 04» декабря 2014 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, Институт математики и механики им.Н.И. Лобачевского ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «____» октября 2014 г.

Ученный секретарь

диссертационного совета Д 212.081.10

Кандидат физ.-мат. наук, доцент, Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Многообразия, которым посвящена настоящая работа, принадлежат классу многообразий, наделенных почти контактной метрической структурой. Теория почти контактных метрических структур занимает важное место в современных дифференциально-геометрических исследованиях и является естественным обобщением так называемой контактной геометрии, имеющей многочисленные приложения в современной математической физике, например в классической механике и теории геометрического квантования, в теории супергравитации Калуцы-Клейна. Кроме того, интерес к теории почти контактных метрических структур объясняется богатством внутреннего содержания самой теории и ее взаимосвязями с другими разделами дифференциальной геометрии, в частности, с теорией гиперповерхностей риманова многообразия. Более пятидесяти лет почти контактные многообразия являются предметом интенсивного исследования ученых-геометров.

Начало изучения почти контактных структур относится к 1953 году, когда в своих работах Чжень рассматривал дифференцируемые многообразия M размерности $2n+1$ с фиксированной на них контактной формой η: $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$. Он установил [14], что такое многообразие допускает G-структуру со структурной группой $\{1\}\otimes U(n)$. Позднее многообразия, допускающие такую G-структуру, Дж. Грей назвал почти контактными многообразиями. Им же было введено понятие почти контактного метрического многообразия [21].

В 1960 году появляется работа Сасаки [40], в которой автор отмечает, что многообразие, допускающее G-структуру со структурной группой $\{1\}\otimes U(n)$, несет внутренним образом определенную тройку тензоров $\{\Phi, \xi, \eta\}$, обладающих свойствами:

$$1)\ \eta(\xi) = 1;\ \ 2)\ \eta \circ \Phi = 0;\ \ 3)\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi.$$

Сасаки показал, что на многообразии M всегда существует положительно определенная метрика $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ такая что

$$1)\ \eta(X) = \langle\xi, X\rangle;\ \ 2)\ \langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

дополняющая почти контактную $\{\Phi, \xi, \eta\}$-структуру до метрической, где Φ – тензор типа $(1,1)$, называемый структурным оператором или структурным эндоморфизмом, ξ – вектор, η – ковектор, называемые структурным вектором и ковектором соответственно.

Сасаки и Хатакеуяма [41] доказали, что на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$, где M – многообразие с заданной на нем $\{\Phi, \xi, \eta\}$-структурой, $\boldsymbol{R}$ – вещественная прямая, определяется почти комплексная структура J. В 1963 году Таширо У. [54] исследовал почти контактное метрическое $(2n+1)$-мерное многообразие M, т.е. многообразие с заданной на нем $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ —структурой. Вместе с Сасаки они доказали, что на декартовом произведении $M \times \boldsymbol{R}$ естественным образом определяется почти комплексная структура J, которая вместе с метрикой прямого произведения, т.е. с метрикой $G = (G_{\lambda\mu}) = e^{-2t}\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ задает почти эрмитову структуру на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$.

Хервелла Л. и Грей А.[20] в 1980 году систематизировали почти эрмитовы структуры. Естественно, перед геометрами возникла задача о классификации почти контактных метрических структур на многообразии M в соответствии со систематизацией эрмитовой структуры, индуцированной на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$. Так, например, классификацию пространств M^{2n+1} Накаяма [35] проводит следующим образом. Он нашел необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять различные геометрические объекты пространства M, такие, как Φ, ξ, η, g, объекты, полученные при первом продолжении этих объектов, тензор

Нейенхейса и другие охваченные ими объекты для того, чтобы пространство $M \times \boldsymbol{R}$ принадлежало к одному из классов почти эрмитовых многообразий. В этом направлении автор находит девять подклассов пространств с $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$-структурой. В частности, Накаяма доказал ставший уже классическим результат: нормальность почти контактной метрической структуры на многообразии M равносильна тому, что структура на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$ эрмитова.

Поскольку между почти контактной метрической структурой на многообразии M и почти эрмитовой структурой на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$ имеет место тесная взаимосвязь, то ее изучение позволяет выделить интересные классы почти контактных метрических структур. Так, например, Обинъя [36] рассматривал почти контактные метрические структуры на многообразии M, у которых естественно ассоциированная ей почти эрмитова структура на многообразии $M \times \boldsymbol{R}$ принадлежит классам W_4 и $W_2 \oplus W_4$ при классификации Грея-Хервеллы [20]. Такие структуры назвали транссасакиевыми и почти транссасакиевыми, соответственно. Класс почти транссасакиевых многообразий включает класс транссасакиевых многообразий. Класс транссасакиевых многообразий включает классы сасакиевых, Кенмоцу и косимплектических структур [20]. Там же приведены тождества, характеризующие эти классы структур. Приводятся соотношения между квазисасакиевыми и транссасакиевыми структурами. Блэр и Обинья [12] получили также некоторые фундаментальные результаты для транссасакиевых структур. Кроме того, они определи транссасакиевые структуры типа (α, β). Локальную классификацию транссасакиевых многообразий изучал Марреро [30]. В работах [22], [23], [25] получены необходимые и достаточные условия для CR-подмногообразия транссасакиева многообразия чтобы быть контактным CR-произведением по свойствам основного тензора Вайнгартена по отношению к нормальному сечению, а также к канонической структуре. В работах [22], [23], [25] также получены некоторые результаты о CR-подмногообразиях α-Сасакиевых и β-Кенмоцу многообразий. Дальнейшее изучение CR-подмногообразий проводится в работе [13], где определяются нормальные CR-подмногообразия транссасакиева многообразия и получены фундаментальные результаты о геометрии этих подмногообразий. Изучению подмногообразий транссасакиевых многообразий посвящены работы [5], [28], [58], [45], [47], [52], [56], [29], [24], [4], [42], [31]. Особо следует отметить работу В.Ф. Кириченко и Е.В. Родиной [1], в которой получена полная классификация транссасакиевых многообразий постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны с неинтегрируемой структурой, а также полная классификация транссасакиевых многообразий с неинтегрируемой структурой, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных плоскостей. Деформации D-гомотетии, а также векторные поля и кривые на транссасакиевом многообразии изучаются в работах [44], [37], [50], [51], [15], [11]. Свойства Эйнштейновых, η-эйнштейновых, рекуррентных, Риччи-рекуррентных, полусимметричных, а также геометрию тензоров кривизны (конформной, проективной, квазиконформной и др.) транссасакиевых многообразий изучались в работах [43], [18], [10], [6], [19], [5], [9], [38], [7], [2], [16], [3],[9],[26], [48], [53], [33]. Конформно плоские, Ф-конформно плоские, проективно, конгармонически плоские транссасакиевы многообразия изучаются в работах [46], [39].

Особо исследовались 3-х мерные транссасакиевые многообразия. В этом направлении следует отметить работы [55], [48], [17], [32], [34], [27], [57].

Объект исследования – транссасакиевы многообразия.

Целями диссертационного исследования являются:

1) Вывод полной группы структурных уравнении TS-многообразий;

2) Нахождение дополнительных свойств симметрии тензора римановой кривизны TS-многообразий и выяснение их геометрического смысла;

3) Изучение геометрии TS-многообразий постоянно кривизны.

Для достижения поставленных целей автором были успешно решены следующие **задачи:**

1. Получена полная группа структурных уравнений транссасакиевых структур, содержащая всю информацию о локальном строении таких структур.

2. Вычислены компоненты тензора римановой кривизны, тензора конформной кривизны, тензора Риччи, скалярная кривизна, TS-мнгообразий на пространстве присоединенной *G*-структуры.

3. Получено исчерпывающее описание TS-мнгообразий постоянной кривизны .

4. Получены дополнительные тождества симметрии ,которым удовлетворяет тензор римановой кривизны транссасакиевых многообразий, и на их основе выделить подклассы трансасакиевых многообразий.

5. Изучено локальное строение выделенных классов транссасакиевых многообразий.

Новизна результатов. Основные результаты данной диссертационной работы являются новыми. Эти результаты решают поставленные в исследовании основные задачи, а именно:

1. На пространстве присоединенной *G*-структур получена полная группа структурных уравнений транссасакиевых структур и изучено строение компонент тензора римановой кривизны, Риччи и скалярной кривизны.

2. Установлена связь между квазисасакиевыми и транссасакиевыми структурами.

3. Приведены частные случаи транссасакиевых структур.

4. Рассмотрены транссасакиевы многообразия постоянной кривизны.

5. Получены дополнительные тождества, которым удовлетворяет тензор римановой кривизны транссасакиевых многообразий, получены условия, при которых тензор римановой кривизны транссасакиевых многообразий удовлетворяет контактным аналогам тождеств Грея.

6. Изучено локальное строение транссасакиевых многообразий классов R_1, R_2, R_3, R_4.

Методы исследования.

Результаты диссертационного исследования получены, главным образом, методом присоединенных G-структур. Суть метода заключается в том, что изучение геометрии гладкого многообразия сводится к изучению геометрии главного расслоения реперов над этим многообразием. Эта геометрия определяется системой дифференциальных форм, определенных внутренним образом как на пространстве самого расслоения, так и на пространстве его подрасслоения. Такое подрасслоение со структурной группой Ли G называется (присоединенной) G-структурой. Сам метод получил название метода присоединенных G-структур и является обобщением и уточнением хорошо известного метода подвижного репера Эли Картана. Наряду с этим при изучении отдельных вопросов использовался аппарат классического тензорного анализа и метод инвариантного исчисления Кошуля.

Теоретическое и прикладное значение работы.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения транссасакиевых структур, в соответствующих разделах дифференциальной геометрии и в направлении ее естественных контактов с математической физикой. Кроме того, данная работа может быть использована при чтении спецкурсов по близкой тематике, для написания дипломных и курсовых работ, для решения дифференциальных уравнений.

Апробация работы.

Основные результаты настоящего исследования докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре по дифференциальной геометрии математического факультета МПГУ (руководитель профессор В.Ф. Кириченко); на научно-исследовательском семинаре математического факультета Тверской Государственный Университет (руководитель профессор А.М.Шелехов); на научно-исследовательском семинаре механика-математического факультета Казанского федерального университета (руководитель В.В.Шурыгин) ; на конференцию: «XII Всероссийское совещание по проблемам управления» " Геометрические методы"(г. Москва 16-19 июня 2014), на конференцию: «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV», Ростов-на-Дону, 27 апреля – 1 мая, 2014 ; на международной молодежной конференции «Геометрия и управление» г. Москва, Россия, 14-18 апреля 2014г. ; на международной конференции «Геометрия и топология» в честь 60-летия Олега Рустамовича Мусина, г.Москва, Россия 10-11 февраля 2014г. ; на международной конференции «Геометрический анализ и его приложения», г. Волгоград, Россия, 26-30 мая 2014г. ; на заседаниях кафедры геометрии, математического факультета МПГУ.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации.

Основное содержание диссертации изложено на 127 страницах. Диссертация состоит из введения, четырех глав, состоящих из 12 параграфов, и списка литературы содержащего 103 наименования работ российских и зарубежных авторов.

Краткое содержание основного текста диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы, представляется исторический обзор по развитию тематики, формулируются основные цели и задачи диссертационного исследования, излагаются основные результаты, полученные в работе.

В главе 1 «Предварительные сведения» даны сведения, носящие в основном реферативный характер.

Глава 2 «Транссасакиевы структуры» состоит из трех параграфов. В §1 «Определение и структурные уравнения транссасакиевых многообразий» приводится определение транссасакиевой структуры, подсчитаны компоненты тензора $\nabla\Phi$ на пространстве присоединенной G-структуры , доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1.2. Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – АС-структура (почти контактная метрическая структура). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ интегрируемая TS-структура;

(2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – TS-структура, имеющая замкнутую контактную форму;

(3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – нормальная TS-структура.

Теорема 2.1.3. TS-структура является квазисасакиевой тогда и только тогда, когда $\beta^0 = \beta_0 = 0$, т.е. $\delta\eta = 0$.

Теорема 2.1.4. TS-структура является:

сасакиевой $\Leftrightarrow$ $\beta^0 = -\beta_0 = \sqrt{-2}$;

косимплектической $\Leftrightarrow$ $\beta^0 = \beta_0 = 0$;

Кенмоцу $\Leftrightarrow$ $\beta^0 = \beta_0 = -\sqrt{2}$.

Найдено дифференциальное продолжение второй группы структурных уравнений, получена полная группа структурных уравнений. В §2 «Свойства транссасакиевых многообразий» рассматриваются конформные преобразования транссасакиевых многообразий, получены некоторые аналитические соотношения для транссасакиевых многообразий, доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2.2. Транссасакиева структура на многообразии M в некоторой окрестности неособой точки является f-сасакиевой тогда и только тогда, когда вектор Ли линейного расширения принадлежит каноническому распределению Δ. При этом $\langle\beta, \nu\rangle = -2f = const$, где β – вектор Ли многообразия $M \times R$, ν – направляющий вектор прямой R.

Теорема 2.2.3. AC-многообразие является f-сасакиевым многообразием $f = const$ тогда и только тогда, когда оно гомотетично сасакиеву многообразию.

Теорема 2.2.5. Класс транссасакиевых многообразий с замкнутой контактной формой совпадает с классом нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий.

Теорема 2.2.6. На TS-многообразии справедливы следующие формулы:

1) $\nabla_\xi(\Phi)\xi = 0$;

2) $\nabla_{\xi}(\Phi)\Phi^2 X = 0$;

3) $\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y - \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = 0$;

4) $\nabla_X(\Phi)Y - \eta(Y)\nabla_X(\Phi)\xi - \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = 0$;

5) $\nabla_X(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y = 0$;

6) $\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 \Phi X$;

7) $\nabla_X(\Phi)\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 \Phi X$;

8) $\nabla_{\xi}(\eta)X = 0$;

9) $\Phi\nabla_X \xi = \nabla_{\Phi X}\xi$;

10) $\Phi \circ \nabla\xi = \nabla\xi \circ \Phi$; $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Теорема 2.2.7. *TS*-многообразие *M* с киллинговым характеристическим вектором является либо косимплектическим (если $\beta^0 = \beta_0 = 0$), либо гомотетично многообразию Сасаки.

Теорема 2.2.8. *TS*-многообразие *M*, для которого выполнено условие $div\xi = 0$, гомотетично многообразию Сасаки.

В §3 «Вычисление некоторых классических тензоров транссасакиевой структуры» подсчитаны компоненты тензора римановой кривизны и тензора Риччи, а также вычислена скалярная кривизна транссасакиевой структуры на пространстве присоединенной *G*-структуры.

Глава 3 «Свойства изотропности транссасакиевых многообразий» содержит 3 параграфа. В §1 «Транссасакиевые многообразия постоянной кривизны» рассматриваются транссасакиевы многообразия постоянной кривизны и доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *TS*-многообразие M^{2n+1} является многообразием постоянной кривизны k, причем $k = 0$ тогда и только тогда, когда $\beta_0 = 0$, т.е. *TS*-многообразие M^{2n+1} плоское косимплектическое многообразие.

В §2 «Точечное постоянство Ф-голоморфной секционной кривизны транссасакиевых многообразий» исследуются транссасакиевы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны и доказана следующая

Теорема 3.2.1. *TS*-многообразие *M* является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $\boldsymbol{c}$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры тензор A^{ad}_{bc} имеет вид $A^{ad}_{bc}=-\frac{1}{2}\delta^{(a}_{(b}\delta^{d)}_{c)}\beta^0\beta_0-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta^0\beta_0+c\right)\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

В §3 «Эйнштейновость и квазиэйнштейновость транссасакиевых многообразий» рассматриваются транссасакиевы многообразия Эйнштейна и η-эйнштейновые транссасакиевы многообразия, доказаны теоремы:

Теорема 3.3.1. *AC*-многообразие является η-эйнштейновым тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры имеют место следующие равенства:

$$1)\ S_{00}=a+b;\ 2)\ S_{0a}=0;\ \ 3)\ S_{ab}=0;\ \ 4)\ S_{a\hat{b}}=a\delta^b_a.$$

Теорема 3.3.2. Для η-Эйнштейнова *TS*-многообразия имеем:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{n}A^{ab}_{ab}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^{00}+\dfrac{1-3n}{4}(\beta^0)^2-\dfrac{1+n}{4}\beta^0\beta_0; \\ b=-\dfrac{1}{n}A^{ab}_{ab}+\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}}\beta^{00}-\dfrac{n+1}{4}(\beta^0)^2+\dfrac{1+n}{4}\beta^0\beta_0. \end{cases}$$

Теорема 3.3.3. *AC*-многообразие является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры выполнены следующие равенства: 1) $S_{00}=\varepsilon$; 2) $S_{0a}=0$;

$$3)\ S_{ab}=\ 0;\ \ 4)\ S_{a\hat{b}}=\varepsilon\delta^b_a.$$

Теорема 3.3.4. Для транссасакиева многообразия Эйнштейна имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon=n\sqrt{2}\left\{\beta^{00}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}, \\ A^{ab}_{ab}=\left(n^2\sqrt{2}-\frac{n}{\sqrt{2}}\right)\left\{\beta^{00}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}+\frac{3n(n-1)}{4}(\beta^0)^2+\frac{n(n+1)}{4}\beta^0\beta_0. \end{cases}$$

Глава 4 «Тождества кривизны и подклассы транссасакиевых многообразий» состоит из трех параграфов. В §1 «Тождества кривизны транссасакиевых многообразий» рассмотрены аналоги тождеств Грея и доказана основная

Теорема 4.1.3. TS-многообразия являются AC-многообразиями классов CR_2 и CR_3. TS-многообразие размерности больше 3 является AC-многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием.

Следствие. TS-многообразие класса CR_1, размерности больше 3, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

В параграфе 2 «Дополнительные тождества кривизны транссасакиевых многообразий» получены 4 дополнительные тождества кривизны и доказана **Теорема 4.2.1.** Тензор R римановой кривизны транссасакиевых многообразий обладает следующими свойствами:

1. $R(\xi,\Phi^2X)\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\Phi^2X$
2. $R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\xi = R(\Phi X,\Phi Y)\xi = 0$
3. $R(\xi,\Phi^2X)\Phi^2Y - R(\xi,\Phi X)\Phi Y = 0$
4. $R(\xi,\Phi^2X)\Phi^2Y = R(\xi,\Phi X)\Phi Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\langle\Phi X,\Phi Y\rangle\xi$
5. $R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z - R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z - R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z = 0$
6. $$\begin{aligned} R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z - R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z &= 4A(Z,X,Y) + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\{\Phi^2Z\langle\Phi X,\Phi Y\rangle - \Phi Z\Omega(X,Y)\} \\ &- \frac{1}{4}\beta^0(\beta^0+\beta_0)\{\Phi^2X\langle\Phi Z,\Phi Y\rangle - \Phi X\Omega(Z,Y)\} \end{aligned}$$

$$7.\ R\big(\Phi^2X,\Phi^2Y\big)\Phi^2Z - R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z = -\frac{1}{2}(\beta^0)^2\big\{\Phi^2X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle + \Phi X\langle Z,\Phi Y\rangle - \Phi^2Y\langle\Phi X,\Phi Z\rangle - \Phi Y\langle Z,\Phi X\rangle\big\}, \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$$

В §3 «Классы транссасакиевых многообразий» рассмотрены некоторые классы транссасакиевых многообразий и дается их локальная характеризация.

Определение 4.3.1. Назовем *TS*-многообразие многообразием класса $\boldsymbol{R_1}$,если его тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$R\big(\xi,\Phi^2X\big)\xi = 0, \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Теорема 4.3.1. *TS*-многообразие является многообразием класса $\boldsymbol{R_1}$ тогда и только тогда, когда $\beta^{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2$.

Теорема 4.3.2. *TS*-многообразие класса $\boldsymbol{R_1}$ является либо косимплектическим, либо нормальным локально конформным почти косимплектическому многообразию.

Определение 4.3.2. Назовем *TS*-многообразие многообразием класса $\boldsymbol{R_2}$,если его тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$R\big(\xi,\Phi^2X\big)\Phi^2Y = 0, \forall X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Теорема 4.3.3. *TS*-многообразие является многообразием класса $\boldsymbol{R_2}$ тогда и только тогда, когда $\beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2$.

Определение 4.3.3. Назовем *TS*-многообразие многообразием класса $\boldsymbol{R_3}$ если его тензор кривизны удовлетворяет тождеству $R\big(\Phi^2X,\Phi^2Y\big)\Phi^2Z - R\big(\Phi X,\Phi^2Y\big)\Phi Z = 0, \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.

Теорема 4.3.4. *TS*-многообразие является многообразием класса $\boldsymbol{R_3}$ тогда и только тогда, когда $A_{bc}^{ad} = -\frac{1}{2}\delta_{[b}^{a}\delta_{c]}^{d}(\beta^0)^2 + \frac{1}{2}\delta_{(b}^{a}\delta_{c)}^{d}\beta^0\beta_0$.

В случае когда $A_{bc}^{ad} = 0$ многообразие является косимплектическим.

Определение 4.3.4. Назовем *TS*-многообразие многообразием класса $\boldsymbol{R_4}$ если его тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z - R\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right)\Phi Z = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Теорема 4.3.5. *TS*-многообразие размерности свыше 3 является многообразием класса $\boldsymbol{R_4}$ тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием.

Теорема 4.3.6. Многообразия класса $\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_3}, \boldsymbol{R_4}$ пересекаются на косимплектическом многообразии.

ЛИТЕРАТУРА

[1].Кириченко В.Ф., Родина Е.В. *О геометрии транссасакиевых многообразий*. Фундаментальная и прикладная математика, 1997, т. 3, №3, с.837–846.

[2]. Absos Ali Shaikh and Shyamal Kumar Hui. *On weak symmetries of trans-Sasakian manifolds*. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2009, 58, 4, 213–223.

[3] Absos Ali Shaikh, Shyamal Kumar Hui. *On locally Φ-symmetric β-Kenmotsu manifolds*. Extracta mathematicae, Vol. 24, № 3 (2009), 301 – 316.

[4] Arindam Bhattacharyya, Bandana Das. *Contact CR-submanifolds of an indefinite trans-sasakian manifold*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, № 26, 1271 – 1282.

[5] Avik De. *Totally geodesic submanifolds of a trans-Sasakian manifold*. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2013, 62, 4, 249–257.

[6] Bagewadi Channabasappa, Basavarajappa N.S., Prakasha D.G., and Venkatesha. *Some results on K-contact and Trans-Sasakian Manifolds*. European journal of pure and applied mathematics, Vol. 1, No. 2, 2008, 21-31.

[7] Bagewadi C.S., E. Kumar Girish. *Note on trans-Sasakian manifolds* // Tensor. N.S. V.65. 2004. P.80-88.

[8] C.S. Bagewadi, E. Girish Kumar, Venkatesha. *On irrotational D-conformal curvature tensor*. Novi Sad J. Math., Vol. 35, № 2, 2005, 85-92.

[9] C.S. Bagewadi, D.G. Prakasha and Venkatesha. *Conservative projective curvature tensor on trans-sasakian manifold with respect to semi-symmetric metric connection*. Analele St. ale Univ. Ovidius Constanta, Seria Matematica, Vol. 15(2), 2007, 5–18.

[10] C.S. Bagewadi and Venkatesha. *Some Curvature Tensors on a Trans-Sasakian Manifold*. Turk. J. Math., 31 (2007), 111 – 121.

[11] C.S.Bagewadi and Venkatesha. *Torseforming vector field in a 3-dimensional trans-Sasakian manifold*. Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.8, 2006, pp. 23-28.

[12] Blair D.E., Oubina J.A. *Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds,* Publ. Mathematiques, 1990, 34, 199-207.

[13] C. Călin. *Normal contact CR-submanifolds of trans-sasakian manifold*. Bulletinul Institutului Politehnic Din Iaşi, 42, №1-2, 1996, 9–15

[14] Chern C.C. *Pseudo-groupes continus infinis*. Colloque de Géométrie Differentielle vol. Strasbourg, 1953, p.119-136.

[15] D. Chinea, C. Gonzales. *Curvature relations in trans-Sasakian manifolds*. (Spanish), in «Proceedings of the XIIth Portuguese-Spanish Conference on Mathematics, Vol. II, (Portuguese), Braga, 1987», Univ. Minho, Braga, (1987), 564 – 571.

[16] Dakshayani A. Patil, C.S. Bagewadi. *On weakly concircular symmetries of three-dimensional trans-sasakian manifolds*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 86, №5, 2013, 799-810.

[17] De U.C., Sarkar A. *On three-dimensional trans-Sasakian manifolds*. Extracta Math. 23 (2008), № 3, 265–277.

[18] D. Debnath. *On a type of concircular φ-recurrent trans-sasakian manifolds*. Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences 28(4) (2012) 341-348.

[19] Falleh R. Al-Solamy, Jeong-Sik Kim, M.M. Tripathi. *On η-Einstein Trans-Sasakian Manifolds*. Analele Stiintifice Ale Universitatii «AL.I. CUZA» Din Iasi (S.N.), Matematica, Tomul LVII, 2011, f.2, 417–440.

[20] Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*. Ann. Math. Pure and Appl., 1980, v.123, №3, 35-58

[21]Gray J.W. *Some global properties of contact structures*. Ann. Math., vol. 69, 3, 1959, p. 421–450.

[22] M. Hasan Shahid. *CR-submanifolds of a trans-Sasakian manifold*. Indian J. Pure and Appl. Math. 22(1991). 1007-1012.

[23] M. Hasan Shahid. *CR-submanifolds of a trans-Sasakian manifold*. Indian J. Pure and Applied Maths, vol. 25, № 3 (1994), 299-307.

[24] M. Hasan Shahid. *Some results on anti-invariant submanifolds of a trans-sasakian manifold*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 27 (2004), 117−127.

[25] M. Hasan Shahid, M. Shoeb, A. Sharfuddin. *Contact **CR**-product of a trans-sasakian manifold*. Note Di Matematica, 14, 1(1994), 1-10.

[26] Jeong-Sik Kim, Rajendra Prasad, Mukut Mani Tripathi. *On generalized ricci-recurrent trans-sasakian manifolds*. J. Korean Math. Soc. 39 (2002), № 6, pp. 953–961.

[27] Kalyan Halder, Dipankar Debnath, Arindam Bhattacharyya. *Semi-symmetric metric connection on a 3-dimensional trans-sasakian manifold*. International journal of mathematical combinatorics, volume 3, 2013, 16–21.

[28] M.A. Khan and K.S. Chahal. *Warped product pseudo-slant submanifold of trans-sasakian manifolds*. Thai Journal of Mathematics, Volume 8 (2010), Number 2, 263–273. www.math.science.cmu.ac.th/thaijournal.

[29] K.A. Khan, V.A. Khan and Sirajuddin. *Warped product contact CR-submanifolds of trans-sasakian manifolds*. Filomat, 21:2 (2007), 55–62.

[30] J.C. Marrero. *The local structure of trans-Sasakian manifolds*. Ann. Mat. pura appl., № 4, 162 (1992), 77-86.

[31]Marian-Ioan Munteanu. *A note on doubly warped product contact CR-submanifolds in trans-Sasakian manifolds*. **arXiv:math/0604008** [math.DG] 25, май 2007.

[32] Mine Turana, Uday Chand Deb, Ahmet Yildiza. *Ricci solitons and gradient Ricci solitons in three-dimensional trans-Sasakian manifolds*. Filomat 26:2 (2012), 363–370. http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat.

[33] H.G. Nagaraja. *Φ-recurrent trans-sasakian manifolds*. Математички весник, 63, 2 (2011), 79–86.

[34] H.G. Nagaraja, C.R. Premalatha. *Ricci solitons in f-Kenmotsu manifolds and 3-dimensional trans-sasakian manifolds*. Progress in Applied Mathematics, vol. 3, № 2, 2012, pp. 1-6.

[35] Nakayama S. *On a classification of an almost contact metric structures*. Tensor, 1968, v. 9, №1, 1-7.

[36] Oubiña J.A. *New classes of almost contact metric structures.* Publ. Mat., 1985, v. 32, № 3-4, p. 187-193.

[37] Patra C., A. Bhattacharyya. *Deformation of a Trans-Sasakian Manifold*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, № 37, 1845 – 1853.

[38] D.G. Prakasha, C.S. Bagewadi and Venkatesha. *Conformally and quasi-conformally conservative curvature tensors on a trans-Sasakian manifold with respect to semi-symmetric metric connections*. Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.10, 2008, pp. 263-274.

[39] Rajendra Prasad, Vibha Srivastava. *Some results on trans-sasakian manifolds*. Математички весник, 65, 3 (2013), 346–352.

[40] Sasaki S. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related with almost contact structures*. Tohoku Math. J., vol, 12, 3, 1960, p.

459–476.

[41] Sasaki S., Hatakeyama J. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure*. II, Tohoku Math. J., 1961, 13, №2, p. 281–294.

[42] Sarkar Avijit, Sen Matilal. *On invariant submanifolds of trans-Sasakian manifolds*. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, v.61, №1, 2012, p.29(9).

[43] R.J. Shah. *On trans-sasakian manifolds*. Kathmandu university journal of science, engineering and technology vol. 8, no. 1, 2012, p. 81-87.

[44] Shaikh A.A., K.K. Baishya, S. Eyasmin, *D-homothetic deformations on trans-Sasakian manifold*, Demonstratio Math. 41 (2008), 171–188.

[45] M.H. Shahid, F.R. Al-Solamy, Jae-Bok Jun, M. Ahmad. *Submersion of semi-invariant submanifolds of trans-sasakian manifold*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), **36** (2), 2013, 63–71.

[46] A.A. Shaikh, Y. Matsuyama. *Conformally flat trans-Sasakian manifolds*. SUT J. Math. 43 (2003), 247–255.

[47]A.K. Sengupta, U.C. De. *Generalised CR-submamifolds of a trans-sasakian manifold*. Indian J. pure appl. Math., 32(4), 2011, 573-580.

[48] Sharief Deshmukh, Mukut Mani Tripathi. *A note on trans-sasakian manifolds*. Math. Slovaca **63** (2013), № 6, 1361–1370.

[49] Shyamal Kumar Hui. *On weak concircular symmetries of trans-Sasakian manifolds*. CUBO, A Mathematical Journal, vol.13, № 03, 2011, 141–152

[50] Somashekhara G., H.G. Nagaraja. *On K-torse-forming vector field in a trans-Sasakian generalized Sasakian space-form*. International Journal of Mathematical Archive 3(7), 2012, 2583-2588.

[51]Srivastava S.K. *Almost contact curves in trans-sasakian 3-manifolds*. arXiv:1401.6429v1 [math.DG] 10 Dec 2013.

[52] Sunil Yadav, Dayalal Suthar. *Semi-invariant* $\xi^{\perp}$*-Submanifolds of trans-Sasakian Manifolds*. Caspian Journal of Applied Sciences Research, 2(2), 2013, pp. 23-28.

[53] M. Tarafdar, A. Bhattacharyya, and D. Debnath. *A type of pseudo projective* φ*-recurrent trans-Sasakian manifold*. Analele Ştinţfice Ale Universitatii, Al.I.Cuza, Iaşi, Tomul LII, S.I, Mathematica, 52 (2006), 417-422.

[54]Tashiro J. *On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds, I*. Tohoku Math. J., 1963, 15, №1, p. 62–78; II. Tohoku Math. J., 1963, 15, №2, p. 167–175.

[55] M.M. Tripathi and U.C. De. *Ricci tensor in 3-dimensional trans-Sasakian manifolds*. Kyungpook. Math J., 43 (2003), 247–255.

[56] Turgut A.V., Sari R. *Invariant submaifolds of trans-Sasakian manifolds*. Diff. Geom.-Dynamical Systems, vol.12, 2010, pp. 277-288.

57. Uday Chand De, Krishnendu De. *On a class of three-dimensional trans-sasakian manifolds*. Commun. Korean Math. Soc. 27 (2012), № 4, pp. 795–808. http://dx.doi.org/10.4134/CKMS.2012.27.4.795.

[58] Viqar Azam Khan, Meraj Ali Khan. *Semi-slant submanifolds of trans-sasakian manifolds*. Sarajevo journal of mathematics, vol. 2 (14) (2006), 83–93.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

1. Аила Демедерос. О геометрии транссасакиевых многообразий. // Преподаватель XXI век, 2013, №3, стр. 212 – 223.

2. Аила Демедерос. Тождества кривизны транссасакиевых многообразий. // Преподаватель XXI век, 2013, №4, стр. 232 – 239.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно-практических конференциях

3. Аила Демедерос. Тождества кривизны транссасакиевых многообразий. // Международная научно-практическая конференция: Современные проблемы гуманитарных и естественных наук. Москва, 25-26 июня 2013 г., стр. 15 – 17.

4.Аила Демедерос. О геометрии транссасакиевых многообразий. // Научная конференция: теория и практика современной науки. Москва, 27-28 июня 2013, стр.16 –26.

5. Аила Демедерос. Геометрия транссасакиевых многообразий. // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV», Ростов-на-Дону, 27 апреля – 1 мая, 2014, стр. 85.www.karapetyants.sfedu.ru/conf/