На правах рукописи

ХАЗИРИШИ ЭНВЕР ОСМАНОВИЧ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Адыгейского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Габдулхаев Билсур Габдулхаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Габбасов Назим Салихович

доктор физико-математических наук, профессор
Кац Борис Александрович

Ведущая организация: Научно-исследовательский вычислительный центр
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится 18 июня 2009 г. в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Казанском государственном университете по адресу:
420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “___" ______________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Липачёв Е.К.
к. ф.-м. н., доцент

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. **Актуальность темы.** Многочисленные теоретические и прикладные задачи математики, механики, физики и других областей приводят к различным классам сингулярных интегральных и синг3улярных интегро-дифференциальных уравнений (кратко: СИУ и СИДУ) с интегралами Гильберта и Коши, понимаемыми в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

Из теории для таких уравнений известно, что найти решение точно, т.е. в замкнутой форме, удается лишь в очень редких частных случаях, но даже в этих случаях для доведения результата до числа необходимо вычислять соответствующие сингулярные интегралы. Поэтому для теории и, в особенности, для приложений важное значение имеет разработка приближенных методов решения СИУ и СИДУ с соответствующим теоретико-функциональным обоснованием, а также приближенных методов вычисления участвующих в уравнениях сингулярных интегралов.

За последние десятилетия в решении указанной проблемы достигнут значительный прогресс, в основном благодаря работам отечественных математиков и механиков, а также ряда зарубежных авторов. Подробный обзор полученных в этой области результатов можно найти в специальных обзорных работах Б.Г. Габдулхаева (1980 г.), В.В. Иванова (1965 г.), И.К. Лифанова и Е.Е. Тыртышникова (1990 г.), В.А. Цецохо (1983 г.), в монографиях С.М. Белоцерковского и И.К. Лифанова (1985 г.), Б.Г. Габдулхаева (1980, 1994, 1995 гг.), В.А. Золотаревского (1991 г.), В.В. Иванова (1968 г.), И.К. Лифанова (1995 г.), З.Т. Назарчука (1989 г.), В.В. Панасюка, М.П. Саврука и З.Т. Назарчука (1984 г.), З. Пресдорфа (1979 г.), М.А. Шешко (2003 г.), а также в диссертациях Л.А. Апайчевой (1986 г.), М.Г. Ахмадиева (1988 г.), Л.Б. Ермолаевой (1987 г.), И.Н.Мелешко (1975 г. и 2003 г.) Л.А. Онегова (1979 г.), Э.Н. Самойловой (2004 г.) и др. Однако, несмотря на сказанное, в этой области всё еще остается много нерешенных задач. Данная диссертационная работа в некоторой степени восполняет этот пробел.

2. **Цель работы** – дальнейшее развитие методов приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта и разработка полиномиальных и сплайновых методов решения СИУ и СИДУ на отрезке вещественной оси и на замкнутом контуре, охватывающем начало координат, с соответствующим теоретическим обоснованием, под которым, следуя академику Л.В. Канторовичу, понимается следующий круг вопросов:

1) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений;

2) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению и определение скорости сходимости;

3) установление эффективных оценок погрешности приближенного решения, учитывающих структурные свойства исходных данных.

3. **Методика исследования.** При разработке и обосновании приближенных методов в диссертации используются известные результаты из теории функций и приближений, из общей теории приближенных методов функционального анализа и теории СИУ и СИДУ; при этом мы следуем методике исследования аппроксимативных методов решения операторных уравнений, изложенной в монографиях Б.Г. Габдулхаева (1980, 1994, 1995 гг.).

4. **Научная новизна.** Предложено теоретическое обоснование полиномиальных и сплайновых методов решения ряда классов СИУ и СИДУ в пространствах Гёльдера $\boldsymbol{H}_{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$, и в специально построенных пространствах W_p, $1 \leq p \leq \infty$, а также разработаны квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши.

5. **Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть

применены в теории приближения функций и теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, в частности, при дальнейшем развитии аппроксимативных методов решения различных классов сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и вычисления сингулярных интегралов. Они также могут найти применения при решении различных прикладных задач механики, физики, техники, описываемых СИУ и СИДУ.

6. **Апробация работы.** Результаты работы докладывались на научных республиканских конференциях ГССР (г. Батуми 1981г., г. Телави 1982 г.), на пятой всесоюзной школе «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики» (г. Казань, 1984 г.), на всесоюзном симпозиуме по методам комплексного анализа и интегральным уравнениям (г. Сухуми, 1987 г.), на Саратовской зимней школе по теории функций и приближений (г. Саратов, 1987 г.), на V всесоюзном симпозиуме «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (г. Одесса, 1991 г.), на научной конференции, посвященной 5-летию Адыгейского госуниверситета (г. Майкоп, 2000 г.), на международных летних школах-конференциях по теории функций и смежным вопросам (г. Казань, 2002-2004 гг.), на итоговых научных конференциях Казанского госуниверситета (1980-1985 гг. и 2002-2006 гг.). Результаты также докладывались и обсуждались на семинаре при АГУ «Теория сингулярных интегральных уравнений» (руководитель – академик АН ГССР Б.В. Хведелидзе) (1986-1990 гг.), на городском семинаре при КГУ «Теория аппроксимации и её приложения» (руководитель – проф. Б.Г. Габдулхаев) (1980-1987, 1997-1999, 2003-2007 гг.).

7. **Публикации.** По теме диссертации опубликованы 12 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных работ в диссертацию включены лишь те результаты, которые получены лично диссертантом.

8. **Структура и объём работы.** Диссертация общим объемом 123 страницы состоит из введения, трех глав, разбитых на 12 параграфов, и списка литературы из 116 наименований. В пределах каждой главы принята сквозная нумерация формул и результатов (теорем и лемм).

9. **Краткое содержание работы.** Во введении обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор литературы по исследуемой теме и краткое содержание диссертации.

В Главе I (§§ I.1 – I.3) получен ряд новых квадратурных формул (кратко: к.ф.) для сингулярных интегралов (кратко: с.и.) с ядрами Коши и Гильберта, для которых получены эффективные оценки погрешности для известных классов функций. В ряде случаев доказана оптимальность в определенном смысле полученных приближенных формул.

В §I.1 приводится ряд вспомогательных результатов из конструктивной теории функций, а также даётся явный вид многочленов $\boldsymbol{\varphi_n^{(\mu,\nu)}(x)}$, $\mu > -1$, $\nu > -1$, ортогональных на отрезке [-1,1] относительно веса $\boldsymbol{\rho(x) = |x|^{\mu}(1 - x^2)^{\nu}}$. Доказана полнота соответствующей системы, получены для них рекуррентные соотношения и дифференциальные уравнения, решениями которых являются указанные многочлены.

В §1.2 рассматривается сингулярный интеграл вида

$$J(f,x) = \int_{-1}^{1} \rho(t)\frac{f(t)}{t-x}dt\ , \quad -1 < x < 1\ , \tag{I.1}$$

$$\rho(t) = |t|^{\mu}(1 - t^2)^{\nu}\ , \ \mu > -1\ , \ \nu > -1.$$

Для вычисления с.и. (I.1) предлагается к.ф.

$$\int_{-1}^{1} \rho(t)\frac{f(t)}{t-x}dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k(x) f(x_k)\ , \tag{I.2}$$

где x_k – нули многочленов $\varphi_n^{(\mu,\nu)}(x)$, $A_k(x) = \int_{-1}^{1} \rho(t)\frac{l_k(t)}{t-x}dt$, а $l_k(t)$ – фундаментальные интерполяционные многочлены Лагранжа. Коэффициенты $A_k(x)$ квадратурной формулы (I.2) вычислены в явном виде. Доказаны теоремы о сходимости (поточечной и равномерной) квадратурного процесса (I.2) для функций из класса Гёльдера $H_\alpha, 0 < \alpha \le 1$. Скорость сходимости задаётся соответственно формулами

$$|J(f,x) - J(L_n f,x)| = (1-x^2)^\nu\, O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right), \quad \nu > -1, \quad \mu > 0, \quad f \in H_\alpha , \tag{I.3}$$

$$|J(f,x) - J(L_n f,x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad \mu > 0, \quad \nu > 0, f^{(r)} \in H_\alpha , r \in N, \tag{I.4}$$

где $L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа.

В §I.3 решена задача оптимизации к.ф. для с.и. с ядром Гильберта

$$J(x) = J(x,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma) ctg\frac{\sigma - s}{2}d\sigma , \qquad x \epsilon C_{2\pi} \quad , \tag{I.5}$$

на ранее не исследованных классах аналитических, гармонических и целых функций. Получены на соответствующих классах функций порядковые величины оптимальных оценок погрешностей и указаны к.ф., реализующие эти оценки.

Введем в рассмотрение три класса функций: $F_1 \equiv A^h(M)$ – класс функций $x(t) = C_{2\pi}$, допускающих аналитическое продолжение в полосу *{z=t+iu , -h < u < h}*, причем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t+ih)e^{-ikt}dt\right| \le M - const \quad ; \tag{I.6}$$

$F_2 \equiv \Gamma^\rho(L)$) – класс функций $x(t) = C_{2\pi}$, представимых в виде $x(t) = u(\rho,t)$, $0 < \rho < 1$, где $u(\rho,t)$ – гармоническая в единичном круге

$0 < \rho < 1,\ -\pi \le t \le \pi$ функция такая, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(1,t)e^{-ikt}dt\right| \le L - const \quad ; \qquad (I.7)$$

$F_3 \equiv G^{v}(A_\varepsilon)$ – класс целых функций, для которых константа M в (I.6) удовлетворяет соотношению

$$M \le A_\varepsilon exp\left[(v+\varepsilon)e^{h}\right] \quad , \qquad (I.8)$$

где ε, h, v – положительные числа, а контакта A_ε зависит лишь от ε.

С использованием тригонометрических интерполяционных полиномов по узлам $t_k = \frac{2k\pi}{N}$, $k = \overline{1,N}$, по предложенной Б. Г. Габдулхаевым методике для с.и. (I.5) получены к.ф.

$$J_n = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} d_k^{(n)} x(t_k)\sin(n+1)\frac{t_k - t}{2}\sin\frac{n(t_k-t)}{2}cosec\frac{t_k-t}{2} & ,N = 2n-1 \qquad (I.9) \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} d_k^{(n)} x(t_k)\sin^2 n\frac{t_k-t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2} & ,N = 2n \qquad (I.10) \end{cases}$$

где $d_k^{(n)}$ – коэффициенты суммирования рядов, например, $\mathrm{d}_\mathrm{k}^{(\mathrm{n})} = \cos\frac{\mathrm{k}\pi}{2\mathrm{n}+1}$.

Приведём здесь одну из известных задач оптимизации к.ф. для с.и. (I.5). Пусть с.и. (I.5) вычисляется приближенно с помощью всевозможных к.ф. вида

$$Jx \approx J_N(x;t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)x(t_k) \quad , \quad x \in F \ , \qquad (I.11)$$

где $F=\{x\}$ – некоторое множество функций из $C_{2\pi}$, $t_k = t_k^N$ – произвольная система попарно неэквивалентных узлов, а – произвольная система непрерывных функций.

Величина $V_N(F) = \inf\limits_{\{A_k\}\{t_k\}} \sup\limits_{x\in F} \|R_N x\|_{C_{2\pi}}$, $R_N x = J(x;t) - J_N(x;t)$,

называется оптимальной оценкой погрешности класса к.ф. (I.11).

Определение 1^0. Квадратурная формула

$$J(x;t) \approx J_N^0(x;t) = \sum_{-k=1}^{N} A_k^0(t)x(t_k^0) \quad , \quad x \in F \ ,$$

где $A_k^0(t) \in C_{2\pi}$ – некоторые фиксированные функции, а t_k^0 – фиксированные узлы, называется оптимальной по порядку на классе F, если выполняется условие слабой эквивалентности $\sup\limits_{x\in F}\|R_N^0 x\| \asymp V_N(F)$.

Теорема 1.13. *Справедливы двусторонние оценки*

$$V_N(F_1) \asymp M e^{-Nh}\ ,\ h > 0\ ,\ F_1 \equiv A^h(M)\ ,$$

$$V_N(F_2) \asymp L\rho^N\ ,\ 0 < \rho < 1\ ,\ F_2 \equiv \Gamma^\rho(L)\ ,$$

$$V_N(F_3) \asymp A_\varepsilon \left[\frac{(\nu+\varepsilon)e}{N}\right]^N,\ e \approx 2{,}718\ ,\ F_3 \equiv G^\nu(A_\varepsilon),$$

и оптимальными по порядку являются квадратурные формулы (I.9), (I.10).

Полученные результаты переносятся на с.и. с ядром Коши $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}$ по единичной окружности γ с центром в начале координат комплексной плоскости Z. При этом узлами интерполяции оказываются равноотстоящие точки на окружности γ, а роль класса, например, F_1 выполняет класс функций, аналитических в кольце $e^{-h} < |t| < e^h$ с соответствующим ограничением на коэффициенты ряда Фурье-Лорана.

Глава II (§§II.1 – II.6) посвящена разработке и обоснованию прямых и проекционных методов решения СИУ с фиксированной особенностью вида

$$Ax \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)ctg\frac{\sigma}{2}x(\sigma)d\sigma = y(s)\ , \qquad \text{(II.1)}$$

где h(s,σ) , y(s) – известные непрерывные 2π-периодические функции, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В §2.1 даётся постановка задачи и приводятся вспомогательные результаты из общей теории приближённых методов анализа.

В §2.2 проведено обоснование общего проекционного метода решения СИУ (II.1) в пространстве Гёльдера H_β, 0 < β < 1, с обычной нормой

$$||x||_\beta = \max_{t\epsilon\gamma}|x(t)| + \max_{t'\neq t''}\frac{x(t') - x(t'')}{|t' - t''|^\beta}\ .$$

Заметим, что если коэффициенты $h(s,\sigma)$ и $y(s)$ уравнения (II.1) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0,1]$, то (II.1) можно рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x(s) + Bx = y\ , \qquad (x, y \in H_\alpha). \qquad \text{(II.1)}'$$

Пусть $H_{\beta,N} \subset H_\beta$ – произвольно фиксированное подпространство размерности $N=N(n)$. Приближённое решение уравнения (II.1) будем искать, в виде элемента $x_N(s) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k(s) \epsilon H_{\beta,N}$, где неизвестные коэффициенты α_k определим из уравнения

$$A_N x_N \equiv x_N + P_N B x_N = P_N y \quad , \quad x_N, P_N y \epsilon H_{\beta,N}) \quad , \qquad \text{(II.2)}$$

где P_N (а, следовательно, и A_N) – линейный оператор из H_β в $H_{\beta,N}$. Для вычислительной схемы (II.1) – (II.2) справедлива следующая общая

Лемма 2.4. *Пусть операторы* $P_N\colon H_\beta \to H_{\beta,N}$ *таковы, что для* $\forall \varphi(s) \epsilon H_\delta$ *,* $\beta < \delta \le 1$, *в пространстве* H_β *справедлива оценка*

$$||\varphi - P_N \varphi||_\beta = O\left(\frac{C_N}{N^{\delta-\beta}}\right) H(\varphi, \delta)\ , C_N = o\left(N^{\delta-\beta}\right). \qquad \text{(II.3)}$$

Тогда, если уравнение (II.1) однозначно разрешимо в пространстве H_β, *то приближённое уравнение (II.2) также однозначно разрешимо в пространстве* $H_{\beta,N}$, *хотя бы при достаточно больших N. Решение* $x_N^*(s)$ *уравнения (II.2) при* $N \to \infty$ *сходится в пространстве* H_β *к решению* $x^*(s)$ *уравнения (II.1) со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{C_N}{N^{\alpha-\beta_1}}\right), \qquad \text{(II.4)}$$

где $\beta_1 \epsilon (\beta, \alpha)$ *– произвольное число. Если операторы* P_N *проекционные, то справедлива оценка*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\left||x^* - P_N x^*|\right|_\beta\right). \qquad \text{(II.5)}$$

Заметим, что при конкретных способах задания подпространств $H_{\beta,N}$ и операторов P_N лемма 2.4 конкретизируется, а в ряде случаев упрощается и усиливается.

В §2.3 исследуются полиномиальные методы решения уравнения (II.1). Он состоит из пяти пунктов. В пунктах 2.1^0 и 2.2^0 исследованы соответственно метод Галёркина и метод коллокации. Заметим, что если P_N – оператор Фурье $n^{\text{го}}$ порядка или оператор Лагранжа по системе равноотстоящих узлов $\frac{2k\pi}{2n+1}$, то проекционный метод, рассмотренный в §2.2, есть соответственно метод Галёркина или метод коллокации по указанным узлам для уравнения (II.1). Доказано, что при

$$\frac{d^r y(s)}{ds^r} \epsilon H_\alpha \ , \ \frac{\partial^r h(s,\sigma)}{\partial s^r} \epsilon \mathrm{H}_{\alpha,\alpha} \ , \ r \geq 0 \text{ – целое, } 0 < \alpha \leq 1 \qquad \text{(II.6)}$$

в условиях леммы 2.4 указанные методы сходятся в пространстве H_β $(0 < \beta \leq 1)$ со скоростью

$$||x^* - x_N|| = O\left(\frac{lnN}{N^{r+\delta-\beta}}\right) \ , \beta < r + \delta \qquad \text{(II.7)}$$

В пункте 2.3^0 даётся обоснование полиномиального проекционного метода с оператором P_N, полученным применением обобщенного суммирования рядов Фурье и определяемым формулой

$$P_N\varphi = P_{N,\lambda,m}(\varphi;s) = \frac{a_0^{(N)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[1 - \left(1 - \lambda_k^{(N)}\right)^{m+1}\right](a_k^{(N)} \cos ks + b_k^{(N)} \sin ks), \qquad \text{(II.8)}$$

где $a_k^{(N)}$, $b_k^{(N)}$ – коэффициенты Фурье, m=0,1, … , $\lambda_k^{(N)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}$.

Теорема 2.3. *Пусть приближённое решение* $x_N^* \epsilon H_{\beta,N}$ *уравнения (II.1) определяется как точное решение приближённого уравнения*

$$A_N x_N \equiv x_N + P_{N,r,\lambda} B x_N = P_{N,r,\lambda} y \ , \ \ (m = r) \qquad \text{(II.9)}$$

Тогда при выполнении соотношений (II.6) и в условиях леммы 2.4 приближённые решения существуют, единственны и сходятся в пространстве H_β *к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения (II.1) со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{1}{N^{r+\delta-\beta}}\right) \quad , r + \delta > \beta \ . \qquad \text{(II.10)}$$

Отметим, что эта оценка неулучшаемая. Из неё видно, что скорость сходимости приближенных решений к точному решению выше, чем для классических методов Галёркина и коллокации.

Пункт $\mathbf{2.4^0}$ дополняет результаты п. $\mathbf{2.3^0}$; в нем построены вычислительные схемы методов вида (II.9) при фиксированных определенным образом в (II.8) матрице $\lambda_k^{(N)}$ и числа m.

В пункте $\mathbf{2.5^0}$ исследованы сплайн-методы решения уравнения (II.1). Пусть $H_{\beta,N}$ – подпространство 2π-периодических сплайнов $\mathbf{I}^{\text{го}}$ порядка на сетке узлов

$$S_k = S_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N} \quad , \quad k = \overline{0, N} \, , \tag{II.11}$$

и пусть $P_N = S_N^1$ – соответствующий оператор сплайн-интерполирования по узлам (II.11). Приближенное решение уравнения (II.1) будем искать как точное решение уравнения

$$A_N x_N \equiv x_N + S_N^1 B x_N = S_N^1 y \quad , \ (x_N, S_N^1 y \epsilon H_{\beta,N}). \tag{II.12}$$

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия леммы 2.4 и соотношения (II.6). Тогда, хотя бы при достаточно больших N, уравнение (II.12) однозначно разрешимо и приближённые решения x_N^* сходятся в пространстве H_β к точному решению x^* уравнения (II.1) со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{1}{N^{r+\alpha-\beta_1}}\right) \ \text{при } r + \alpha \le 2, r = 0,1 \tag{II.13}$$

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{1}{N^{2-\beta_1}}\right) \ \text{при } r + \alpha \ge 2, \beta_1 \epsilon(\beta, \alpha) \tag{II.14}$$

В §2.4 исследуется простой с точки зрения реализации на практике и наиболее сложный с точки зрения обоснования метод механических квадратур (м.м.к.) решения уравнения

$$Ax \equiv x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma) ctg\frac{\sigma}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \qquad (II.15)$$

где b(s), g(s,σ), y(s) – известные 2π-периодические непрерывные функции.

Построены три варианта вычислительных схем м.м.к. В первом варианте приближённые решения ищутся в виде тригонометрического полинома

$$x_N(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k \Delta_n(s - s_k), \quad n = \left[\frac{N}{2}\right] \qquad (II.16)$$

где $\Delta_n(\varphi)$ – ядро Дирихле, узлы S_k определяются формулой (II.11). Неизвестные коэффициенты c_k согласно методу м.м.к. определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$c_j + \frac{b(s_j)}{N}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k c_k + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(s_j, s_k)c_k = y(s_j), \ j = \overline{1, N} \qquad (II.17)$$

где

$$\alpha_k = \left[\left\{0, k - \text{чётно};\ -2ctg\frac{s_k}{2}, k - \text{нечётно}\right\}, N = 2n\right]. \qquad (II.18)$$

Для вычислительной схемы (II.15) – (II.18) справедлива следующая

Теорема 2.5. *Пусть функции* ***b(s), g(s,σ)*** *,* $y(s) \epsilon H_\alpha^r$ *,* $r \geq 0$ *– целое, 0 < α ≤ 1. Если уравнение (II.15) однозначно разрешимо в пространстве гёльдеровых функций* H_β*, 0 < β ≤ 1, β < r+α, то при всех N (хотя бы достаточно больших) система (II.17) также имеет единственное решение* c_k^**. Приближённые решения*

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k^* \Delta_n(s - s_k)$$

сходятся к точному решению $x^*(s)$ *уравнения (II.15) в пространстве* H_β *со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{lnN}{N^{r+\alpha-\beta}}\right) \qquad (II.19)$$

Во втором варианте приближённое решение уравнения (II.15) определяется как точное решение следующего операторного уравнения:

$$A_N x_N \equiv x_N(s) + P_{N,r,\lambda} T P_N(g x_N) = P_{N,r,\lambda} y \ , \tag{II.20}$$

где $P_{N,r,\lambda}$ определён в пункте 2.3^0, а оператор P_N определяется формулой

$$P_N = P_N(\varphi; s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k)\Delta_n(s - s_k) \ , \ \ n = \left[\frac{N}{2}\right] \tag{II.21}$$

Теорема 2.6. *В условиях теоремы 2.5 уравнение (II.20) имеет единственное решение* x_N^* *(хотя бы при достаточно больших N), которое сходится в пространстве* H_β *к точному решению* x^* *уравнения (II.15) со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O\left(\frac{1}{N^{r+\alpha-\beta}}\right) \ , \ \ r + \alpha > \beta \tag{II.22}$$

Здесь также доказана оптимальность оценки погрешности приближенных решений.

Аналогичные результаты с оценками (II.13)–(II.14) получены для третьего варианта м.м.к., основанного на сплайнах $\mathbf{I}^{\text{го}}$ порядка.

В §2.5 исследуются проекционные методы решения СИУ с фиксированными особенностями вида

$$Ax \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma) ctg\frac{\sigma - s^0}{2} x(\sigma) d\sigma = y(s) \tag{II.23}$$

Доказано, что скорость сходимости приближенных решений x_n, полученных проекционным методом с оператором P_N, к решению x^* уравнения (II.23), в пространстве H_β даётся неравенством:

$$||x^* - x_n||_\beta \le M \min\left\{||x^* - P_n x^*||; ||P_n|| \cdot ||x^* - x_n||\right\} \tag{II.24}$$

В §2.6 даётся теоретическое обоснование метода вырожденных ядер для СИУ (II.1) и (II.15). Итак, ядро h(s,σ) заменим вырожденным аппроксимирующим ядром

$$h_N(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} A_k(s) B_k(\sigma) \ , \tag{II.25}$$

где $\{A_k(s)\}_1^N$ и $\{B_k(s)\}_1^N$ – системы непрерывных 2π-периодических функций, хотя бы одна из которых линейно независима. Тогда СИУ (II.1) будет соответствовать приближённое уравнение

$$A_N x \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_N(s,\sigma) ctg\frac{\sigma}{2} x(\sigma) d\sigma = y(s) \qquad \text{(II.26)}$$

Имеет место следующая

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия:*

а) функции $y(s)\epsilon H_\alpha$ *и* $h(s,\sigma)\epsilon H_{\alpha,\alpha}$ *, 0 < α ≤ 1;*

б) уравнение (II.1) однозначно разрешимо в пространстве H_β *,* $\beta = \frac{\alpha}{2}$ *;*

в) $\varepsilon_N \equiv ||h - h_N||_{C_{[0,2\pi]^2}} + H_\sigma(h - h_N;\beta) + H_s(h - h_N;\beta) \to 0$ при $N \to \infty$.

Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, решения $x_N^*(s)$ *приближённого уравнения (II.26) сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения (II.1) со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O(\varepsilon_n). \qquad \text{(II.27)}$$

Далее, ядро g(s,σ) уравнения (II.15) заменим вырожденным ядром вида

$$g_N(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} a_k(s)\, b_k(s) \qquad \text{(II. 25)}'$$

Здесь для с.и.у. (II.15) получен более сильный результат.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия:*

а) $b(s), y(s)\epsilon H_\alpha$ и $g(s,\sigma)\epsilon H_{\alpha,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$;

б) уравнение (II.15) однозначно разрешимо в пространстве H_β , $0 < \beta < 1$;

в) $\delta_N = ||g - g_N||_{C_{[0.2\pi]^2}} + H(g - g_N;\beta) \to 0$, при $N \to \infty$.

Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, уравнение

$$A_N x \equiv x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma) ctg\frac{\sigma}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_N(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s) \qquad \text{(II.28)}$$

имеет единственное решение $x_N^*(s)$. *При* $N \to \infty$ *приближённые решения* $x_N^*(s)$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *со скоростью*

$$||x^* - x_N^*||_\beta = O(\delta_N)\,, \quad 0 < \beta < \alpha \le 1 \tag{II.29}$$

В главе III (§§ III.1–III.3) даётся теоретическое обоснование приближенных методов решения СИУ и СИДУ с ядрами Коши в специально построенных пространствах $\boldsymbol{W_p}$**,** тесно связанных с пространствами суммируемых функций $\boldsymbol{L_p}$, но которые более удобны с точки зрения приложений к приближенным методам решения указанных уравнений, чем пространства $\boldsymbol{L_p}$**.**

Итак, пусть

$$W_p(\Gamma) = \{\varphi \in L_p(\Gamma) : S(\varphi;t) \in L_p(\Gamma)\}\,,\ \ 1 \le p \le \infty$$

с нормой

$$||\varphi||_{W_p(\Gamma)} = ||\varphi||_{L_p(\Gamma)} + ||S\varphi||_{L_p(\Gamma)}\,, \qquad 1 \le p \le \infty \tag{III.1}$$

где с.и.

$$S\varphi = S(\varphi;t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\,, \tag{III.2}$$

$t \in \Gamma$ – замкнутый контур, охватывающий начало координат.

Заметим, что это пространство может быть введено эквивалентным образом:

$$W_p(\Gamma) = \{\varphi \in L_p(\Gamma) : \varphi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)\}$$

с нормой

$$||\varphi||_{W_p(\Gamma)} = ||\varphi^+||_{L_p(\Gamma)} + ||\varphi^-||_{L_p(\Gamma)}\,, \qquad 1 \le p \le \infty \tag{III.1$'$}$$

где $\varphi^{\pm}$ - соответствующие предельные значения интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\,,\ \ z \overline{\in} \Gamma\,.$$

Отметим, что при $p = \infty$ под $L_\infty(\Gamma)$ понимается пространство существенно ограниченных функций с нормой $\sup\limits_{a \le t \le b} vrai\, |\varphi(t)|$. Пространство W_∞ введено и исследовано В.В. Ивановым.

В §3.1 рассматриваются некоторые конструктивные свойства пространств $W_p\,, 1 \le p \le \infty$**,** а именно, имеют место следующие результаты.

Теорема 3.1. *Пространство* $W_p(\Gamma)$ *полно по норме (III.1) при всех*

$\boldsymbol{p=[1,\infty]}$. *При всех* $\boldsymbol{p=(1,\infty)}$ *пространства* $\boldsymbol{W_p}$ *топологически эквивалентны пространствам* $\boldsymbol{L_p}$*; а в случае* $\boldsymbol{p=1,\infty}$ *пространства* $\boldsymbol{W_p}$ *являются подпространствами пространства* $\boldsymbol{L_p}$**.**

Теорема 3.2. *При любых* $\boldsymbol{p=[1,\infty]}$ *сингулярный оператор (III.2) ограничен в пространстве* $\boldsymbol{W_p(\Gamma)}$, *причем справедливо равенство*

$$||\boldsymbol{S\varphi}||_{W_p(\Gamma)}=\mathbf{1}\ ,\qquad 1\le p\le\infty \tag{III.3}$$

В связи с равенством (III.3) заметим, что хотя в пространствах $\boldsymbol{L_p}$ оператор S и ограничен при $\forall\boldsymbol{p}\in(\mathbf{1},\infty)$, но его норма $\|\boldsymbol{S}\|$ задается весьма громоздким выражением; более того, при $\boldsymbol{p=1},\infty$

$$\|\boldsymbol{S}\|_{L_p}=\infty\,.$$

Этот факт сильно усложняет исследования СИУ и СИДУ в пространствах суммируемых функций. Построенные в этой главе пространства $\boldsymbol{W_p}$ лишены этого недостатка, т.е. они гораздо удобнее с точки зрения применения и исследования приближенных методов решения СИУ и СИДУ, чем пространства $\boldsymbol{L_p}$. Заметим также, что $\boldsymbol{W_1(\Gamma)}$ является самым широким пространством, на котором оператор сингулярного интегрирования ограничен, и при этом его норма достигает своего наименьшего возможного значения. Из выше сказанного следует оправданность введения специальных пространств $\boldsymbol{W_p}$.

Теорема 3.3. *Для любой функции* $\boldsymbol{f\in L_p(\gamma)}$ *и любых* $\boldsymbol{p=[1,\infty]}$ *справедлива оценка*

$$||\boldsymbol{\Phi_n f}||_{W_p(\gamma)}=O\left(\boldsymbol{ln^\delta n}\right)||\boldsymbol{f}||_{L_p(\gamma)}\,, \tag{III.4}$$

где

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{cases}\mathbf{0}\ \text{при}\ \boldsymbol{p}\in(\mathbf{1},\infty)\\ \mathbf{1}\ \text{при}\ \boldsymbol{p=1},\infty,\end{cases} \tag{III.5}$$

$\boldsymbol{\Phi_n f}$ – $n^{ый}$ *отрезок ряда Фурье по системе функций* $t^k, k=0,\pm1,\dots,t\in\gamma$ – *единичная окружность с центром в начале координат.*

Теорема 3.4. *Для любой функции $f(t)$ из класса С.М. Никольского $H_p^{r+\alpha}$ (т.е. имеющих на γ, r производных, удовлетворяющих в L_p условию Гёльдера с показателем α при $\forall p \in [1, \infty], r + \alpha > 0,\ 0 < \alpha \le 1$), справедлива оценка*

$$||f - \phi_n f||_{W_p(\gamma)} = O\left(\frac{ln^\delta n}{n^{r+\alpha}}\right), \qquad \text{(III.6)}$$

где величина δ определена в формуле (III.5).

В §3.2 рассматриваются приложения полученных выше результатов к обоснованию метода Галёркина приближенного решения характеристического СИУ

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)S(\varphi; t) = f(t),\ \ t \in \gamma \qquad \text{(III.7)}$$

нормального типа и с нулевым индексом.

Приближенное решение уравнения (III.7) будет искать в виде полинома

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k t^k \ , \qquad t \in \gamma \qquad \text{(III.8)}$$

а неизвестные коэффициенты c_k определим по методу Галёркина из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{j-k} + b_{j-k})c_k + \sum_{k=-n}^{-1} (a_{j-k} + b_{j-k})c_k = f_j\,, \qquad j = \overline{-n, n}\ , \qquad \text{(III.9)}$$

где a_j , b_j , f_j - коэффициенты Фурье соответственно функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ по системе функций $t^k, k = 0, \pm 1, \dots$ на γ.

Приведем здесь лишь один результат.

Теорема 3.5. *Пусть $a(t), b(t) \in H_\infty^{r+\alpha}$, $f(t) \in H_p^{r+\alpha}$, где $1 \le p \le \infty$, $r + \alpha > 0,\ 0 < \alpha \le 1$. Тогда система (III.9) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при всех достаточно больших n, и приближенные решения*

$$\varphi_n^*(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* t^k \ , \qquad t \in \gamma$$

сходятся к точному решению $\varphi^*(t)$ уравнения (III.7) по норме права $W_p(\gamma)$, $1 \le p \le \infty$ со скоростью

$$||\varphi^* - \varphi_n^*||_{W_p(\gamma)} = O\left(\frac{ln^\delta n}{n^{r+\alpha}}\right), \qquad \text{(III.10)}$$

$r + \alpha > 0$, *а* δ *определена в (III.5).*

В §3.3 даётся теоретическое обоснование метода редукции для нормально разрешимых СИДУ с ядрами Коши

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau = y(t), \qquad \text{(III.11)}$$

при условиях

$$\int_\gamma \varphi(t)t^{-k-1}dt = 0, \qquad k = \overline{0, m-1} \qquad \text{(III.12)}$$

где a_k, $b_k \in H_\infty^{r+\alpha}$, $y \in H_p^{r+\alpha}$ (r ≥ 0-целое, 0 < α ≤ 1, 1 ≤ p ≤ ∞).

Приближенное решение ищется в виде полинома

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+m} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k, \quad t \in \gamma \qquad \text{(III.13)}$$

который определяется как точное решение функционального уравнения

$$\Phi_n\left[\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\varphi_n^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_n^{(k)}(\tau)d\tau}{\tau - t}\right] = \Phi_n y \qquad \text{(III.14)}$$

где

$$\Phi_n\varphi = \sum_{j=-n}^{n} c_j(\varphi)\, t^j, \quad c_j(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau^{j+1}} \qquad \text{(III.15)}$$

Пусть

$Y = W_p(\gamma), \qquad 1 \le p \le \infty$

$$X = W_p^{(m)}(\gamma) = \left\{\varphi \in W_p(\gamma):\ \varphi^{(m)} \in W_p(\gamma), \int_\gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{t^{k+1}} = 0, \qquad k = \overline{0, m-1}\right\},$$

с нормой $\|\varphi\|_X = \sum_{k=0}^{m} \left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_Y$.

Тогда задача (III.11)–(III.12) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$K\varphi = y \quad (\varphi \in X, y \in Y; K : X \to Y).$$

Теорема 3.6. *Пусть* $a_m^2 - b_m^2 \neq 0$, *ind* $K = 0$ *и задача (III.11)–(III.12) имеет единственное решение* φ^* *при любой правой части* $\boldsymbol{y(t) \in W_p(\gamma), 1 \leq p \leq \infty}$. *Тогда при всех n, хотя бы достаточно больших, уравнение (III.14) также имеет единственное решение* $\boldsymbol{\varphi_n^*(t) \in X_n}$. *При* $\boldsymbol{n \to \infty}$ *приближенные решения*

$$\boldsymbol{\varphi_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^* t^{k+m} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k^* t^k\,, \quad t \in \gamma} \qquad (III.13)'$$

сходятся к точному решению $\varphi^*(t)$ *в пространстве* $X = W_p^{(m)}(\gamma)$ *со скоростью*

$$\|\boldsymbol{\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)}\| = O\left(\frac{\boldsymbol{ln^\delta n}}{\boldsymbol{n^{r+\alpha}}}\right) \qquad \text{(III.16)}$$

Следствие. *В условиях теоремы 3.6 приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *и их производные* $\boldsymbol{\varphi_n^{*(j)}(t),\ j = \overline{1, m}}$ *, равномерно сходятся к точному решению* $\varphi_n^*(t)$ *и к его соответствующим производным* $\boldsymbol{\varphi^{*(j)}(t),\ j = \overline{1, m}}$ *, со скоростью*

$$\left\|\frac{d^j \varphi^*(t)}{dt^j} - \frac{d^j \boldsymbol{\varphi_n^*}(t)}{dt^j}\right\| = O\left(\frac{\ln n}{\boldsymbol{n^{r+\alpha}}}\right) \qquad \text{(III.17)}$$

Отметим, что некоторые из полученных здесь результатов распространены на полные СИДУ

$$\boldsymbol{Mx \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi^{(k)}(\tau)d\tau}{\tau - t} + (T\varphi)(t) = y(t),} \qquad \text{(III.18)}$$

где T – линейный оператор из пространства X в пространство Y.

Основные результаты, выносящиеся на защиту:

1. Разработаны полиномиальные аппроксимации для сингулярного интеграла с ядром Коши на отрезке [-1;1] с весом $\boldsymbol{\rho(x) = |x|^\mu(1 - -x^2)^\nu}$, $\boldsymbol{\mu} > -1$, $v > -1$. Найдены порядковые величины оптимальных оценок погрешностей для с.и. с ядрами Гильберта и Коши в трех новых классах периодических функций, и построены квадратурные формулы, реализующие эти оценки на данных классах плотностей.
2. Установлено теоретическое обоснование общего проекционного метода

решения одного класса СИУ с фиксированными особенностями и его конкретных реализаций (методов Галёркина, коллокации, суммирования рядов Фурье, сплайн-методов).

3. Разработаны и теоретически обоснованы три варианта метода механических квадратур решения СИУ с фиксированными особенностями, основанные на аппроксимации тригонометрическими многочленами и сплайн-функциями первого порядка.
4. Построены и изучены свойства функциональных пространств W_p, в которых норма сингулярного оператора с ядром Коши ограничена и равна *1* при любых $1 \leq p \leq \infty$.
5. Дано теоретическое обоснование в пространствах W_p полиномиальных проекционных методов решения сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Коши по единичной окружности с центром в начале координат.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Б.Г. Габдулхаеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Хазириши Э.О. О некоторых ортогональных системах функций. /Э.О. Хазириши/ Изв. вузов. Матем., 1981, №6 (229), с.59-64.
2. Хазириши Э.О. О приближенном вычислении сингулярных интегралов со специальными весами. /Э.О. Хазириши/ Тезисы IX конф. мат-ов высш. уч. заведений, Груз. ССР, г. Батуми, 1981. с. 75-76.
3. Хазириши Э.О. О приближенном вычислении сингулярных интегралов с ядрами Коши. /Э.О. Хазириши/ Тез. докл. научной сессии АГУ, Сухуми, 1982, с.20-21.
4. Хазириши Э.О. О приближенных решениях сингулярных интегро-

дифференциальных уравнений. /Э.О. Хазириши/ Вестник Адыгейского ун-та, №2, 1999, с. 56-59.

5. Хазириши Э.О. Об оптимальных по точности квадратурных формулах для сингулярного интеграла. /Э.О. Хазириши/ Труды Абх. ун-та, 1987, т.5, с. 161-169.
6. Хазириши Э.О. Один аналог формулы Кристофеля-Дарбу. /Э.О. Хазириши/ Труды Абх. ун-та, 1985,т.3, с.230-233.
7. Хазириши Э.О. Оптимизация квадратных формул для сингулярных интегралов. /Э.О. Хазириши/ Доклады Адыгейской (Черкесской) международной Академии наук, т.2, №1, Н., 1996, с.34-39.
8. Хазириши Э.О. Численные методы решения сингулярных интегральных уравнений с дискретными особенностями. /Э.О. Хазириши/ Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума, г. Одесса, 1991, с.61-62.
9. Габдулхаев Б.Г. О приближенных решениях сингулярных интегральных уравнений. /Б.Г. Габдулхаев, Э.О. Хазириши/ Сообщ. АН ГССР, 1985, т.117, с.249-252.
10. Габдулхаев Б.Г. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений с фиксированными особенностями. /Б.Г. Габдулхаев, Э.О. Хазириши/ Актуальные проблемы математики механики. Материалы международной научной конференции, Казань, 2004, с.76-78.
11. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. /Б.Г. Габдулхаев, Э.О. Хазириши/ Дифференц. уравнения. 1986. т.XXII, №3, с.496-503.
12. Хазириши Э.О. Прямой метод решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. /Э.О. Хазириши, Н.Т. Халитов, Л.Е. Шувалова/. Труды матем. центра имени Лобачевского Н.И. Материалы международной научной конференции, Казань, 2002, с.125-127.