На правах рукописи

Никоненкова Татьяна Владимировна

ЗАДАЧА $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЛИНИЙ РАЗДЕЛА РАЗНОРОДНЫХ ФАЗ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2014

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Обносов Юрий Викторович.
Официальные оппоненты:	Сильвестров Василий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина»
	Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет»
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Защита состоится «5» июня 2014 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, Институт математики и механики им.Н.И.Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «__» ________ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию одной из общепринятых в теории гетерогенных сред моделей, описываемой краевой задачей для эллиптического уравнения (уравнения Лапласа).

Актуальность темы диссертации. Математические модели, описываемые краевой задачей для уравнения Лапласа в неоднородных средах, часто привлекаются для объяснения различных явлений, таких как, распространение тепла, явление диффузии, движение электрического тока в проводящей среде, ламинарное движение идеальной жидкости, распространение магнитного потока и потока электрического смещения и т.д. в композиционных материалах. Несмотря на то, что уравнение Лапласа является одним из самых простых в математической физике, поиск его точного решения, удовлетворяющего краевым условиям, описывающим поведение поля на произвольных межзональных границах, вызывает порой значительные трудности.

В числе многих проблем, возникающих при изучении различных явлений в системах с неоднородной структурой, задача точного описания распределения силовых полей занимает одно из центральных мест. Этой проблемой исследователи занимаются уже более ста лет, начиная с Максвелла и Рэллея. При изучении электрофизических, теплофизических, диффузионных, магнитных и механических свойств неоднородных сред было предложено значительное количество методов, приемов исследования, эмпирических и полуэмпирических формул и т.д. Наибольшее число таких работ было опубликовано в период с 1960-1980гг., среди них упомянем монографии А.В. Лыкова, В.Л. Бердичевского, Л.Л. Васильева, Е.А. Литовского и И.А. Пучкелевич, Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко.

Обилие работ по данной проблеме обусловлено запросами ряда областей техники, например, приборостроения (композиционные электрообогреватели, электроавтоматические и радиотехнические устройства) или разработка нефтяных и газовых месторождений. Однако, и по сегодняшний день, преобладающее большинство результатов не имеют строгих аналитических решений проблемы, а базируется в основном на численных, вариационных и асимптотических методах. Конечно, роль последних подходов при решении современных задач неоспорима. Но в ряде случаев, когда необходимо более полно описать структуру поля в области контактов разнородных фаз, объяснить поведение эффективных параметров особенностями формирования полей, а также для оценки численных методов расчета физических полей, для обоснования приближенных приемов вычисления эффективных параметров важное значение имеют точные решения. Результаты посвященные последнему направлению представлены, к примеру, в работах В.В. Митюшева, Ю.П. Емеца, С.В. Рогозина, В.В. Сильвестрова, Г.А. Гринберга, G.W. Milton, P.M. Adler, и др.

Цель работы. Целью данной диссертации является построение точных аналитических решений в классах кусочно-голоморфных и кусочно-мероморфных функций краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения для многофазных сред с гиперболическими линиями раздела между разнородными компонентами среды.

Методы исследования. При обосновании полученных в диссертации результатов применялись общие методы теории функции комплексного аргумента (конформное отображение, метод симметрии, метод аналитического продолжения) и методы краевой задачи Римана. С помощь пакета Mathematica произведена численная проверка точности всех полученных результатов, а также дан расчет линий тока и эквипотенциалей полученных полей, что позволило наиболее полно воссоздать реальную картину для всего множества физических и геометрических параметров, характеризующих конкретную среду.

Научная новизна. В диссертационной работе получены аналитические решения новых краевых задач $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, позволяющие восстановить точную картину установившихся плоскопараллельных силовых полей в многофазных гетерогенных структурах с гиперболическими линиями раздела их разнородных фаз. Рассмотрены также предельные случаи вырождения гипербол, когда каждая ветка гиперболы заменяется парой ее асимптот. Для полученной таким образом веерообразной среды, симметричной относительно вещественной оси, найдены точные решения соответствующих краевых задач. Все результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, представляют как самостоятельный теоретический интерес, так и могут использоваться специалистами при решении конкретных прикладных задач. Они также могут служить тестовыми для существующего стандартного программного продукта и для разрабатываемых приближенных методов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре отдела математического анализа НИИММ им. Н. Г.Чеботарева Казанского университета (руководитель – профессор Ф. Г.Авхадиев); на Девятой и Десятой международных Казанских летних научных школах-конференциях "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (Казань, 2009, 2011 г.г.); на итоговой научной конференции Казанского университета (2009 – 2012 г.г.), на молодежной научной школе–конференции “Лобачевские чтения” (Казань, 2010 и 2012 г.г.); на всероссийском конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки (Москва, 2011 г.; Ульяновск, 2012 г.), на кафедре дифференциальных уравнений КФУ.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 117 страницах машинописного текста и состоит из введения, двух глав и списка литературы из 100 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования, постановку рассматриваемой задачи, обзор литературы по теме диссертации и краткое изложение основных результатов.

В введении говорится о том, что общепринятая в теории гетерогенных сред математическая модель, описываемая краевой задачей для уравнений в частных производных, может быть сведена к эквивалентной задаче в терминах комплексного потенциала. Эта задача состоит в построении пары сопряженных гармонических функций в каждой изотропной фазе S_k, рассматриваемой многофазной среды, которые являются действительной и мнимой частью комплексного потенциала $\mathbf{w}(z) = \varphi_k(x, y) + \mathrm{i}\,\psi_k(x, y)$, где $z = x + \mathrm{i}\,y$. При этом, функции φ_k, ψ_k должны удовлетворять условиям сопряжения на границе $\mathcal{L}_{kl}$ контакта двух фаз S_k и S_l за исключением угловых точек M:

$$\rho_k\varphi_k = \rho_l\varphi_l, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial s} = \frac{\partial\psi_l}{\partial s}, \tag{1}$$

где s – натуральный параметр (длина дуги), ρ_k – постоянный в фазе S_k коэффициент, характеризующий среду.

Ю.П. Емец,[1] изучая электрические поля в полупроводниковых пластинах и плазменных каналах, предложил метод сведения задачи (1) к однородной задаче

[1] Емец, Ю.П. Краевые задачи электродинамики анизотропнопроводящих сред. – Киев: Наук.думка. 1987. – 254 с.

Маркушевича (задаче $\mathbb{R}$-линейного сопряжения)

$$\Phi^{+}(t) = a(t)\Phi^{-}(t) + b(t)\overline{\Phi^{-}(t)}, \quad t \in \mathcal{L}.$$

Именно, интерпретируя физическую плоскость (x, y) как плоскость комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}\, y$, а вектор $\mathbf{v}$ как комплекснозначную функцию $\mathbf{v}(z) = v_x + \mathrm{i}\, v_y$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{i}\, y$, Ю.П.Емец в качестве неизвестной функции, рассматривает функцию

$$v(z) = \mathbf{w}'(z) = \partial\varphi/\partial x - \mathrm{i}\,\partial\varphi/\partial y = v_x - \mathrm{i}\, v_y,$$

которая является комплексно сопряженной с функцией $\mathbf{v}(z)$. Функция $v(z)$ должна быть голоморфной в каждом из компонентов S_k. В замыкании $\overline{S}_k$ функция $v(z)$ непрерывна всюду, за исключением разве лишь угловых точек M на границе ∂S_k (если таковые имеются), где у нее допускается наличие интегрируемых особенностей. Ю.П.Емец показал, что вещественные граничные условия (1) преобразуются к следующей эквивалентной комплексной форме

$$v_k(t) = A_{kl} v_l(t) - B_{kl}[t'(s)]^{-2}\overline{v_l(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_{kl}, \tag{2}$$

где $t(s)$ – функция точки контура $\mathcal{L}_{kl}$ от натурального параметра s, производная $t'(s) = \exp(\mathrm{i}\,\alpha(s))$ совпадает с единичным вектором касательной к $\mathcal{L}_{kl}$ в точке $t = t(s)$ ($\alpha(s)$ – угол, который касательная к дуге $\mathcal{L}_{kl}$ в точке t образует с вещественной осью),

$$A_{kl} = \frac{\rho_k + \rho_l}{2\rho_k}, \qquad B_{kl} = \frac{\rho_k - \rho_l}{2\rho_k}, \tag{3}$$

или в более общем случае

$$A_{kl} = \frac{\rho_k + \rho_l}{2\rho_k} - \mathrm{i}\,\frac{\rho_k\beta_k - \rho_l\beta_l}{2\rho_k}, \qquad B_{kl} = \frac{\rho_k - \rho_l}{2\rho_k} - \mathrm{i}\,\frac{\rho_k\beta_k - \rho_l\beta_l}{2\rho_k}, \tag{4}$$

где ρ_k – сопротивление (величина обратная проводимости), а β_k – параметр Холла материала фазы S_k ($\rho_k \geq 0$, $\beta_k \lesseqgtr 0$).

Диссертация состоит из двух глав, которые посвящены изучению краевой задачи (2), в случае гиперболических линий раздела разнородных фаз.

В первой главе рассматривается случай, когда искомая функция $v(z)$ не имеет особенностей на комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, в окрестности которой справедлива оценка

$$|v(z)| = \mathrm{o}(|z|) \qquad \text{при} \qquad |z| \gg 1.$$

В первом параграфе приведено решение двухфазной задачи о двух гиперболических включениях, имеющих одинаковые физические свойства и расположенных симметрично относительно обеих осей координат (линия раздела фаз – обе ветви гиперболы $\mathcal{L} = \{z = x + \mathrm{i}\, y : (x/a)^2 - (y/b)^2 = 1\}$. Прежде всего показывается, что функции $v(z)$, $v(-z)$, $\overline{v(\overline{z})}$ и $\overline{v(-\overline{z})}$ удовлетворяют краевому условию (2) одновременно, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$. В дальнейшем в этом параграфе дополнительно предполагается, что искомое решение четно. Следует отметить, что данные исследования являются продолжением работы Ю.В. Обносова[2], в которой, задача (2) рассматривалась в случае одного гиперболического включения. Также как и в работе Ю.В. Обносова общий случай сводится к двум частным – построению решений $v_R(z)$ и $v_I(z)$, принимающих в точках, симметричных относительно осей координат, значения, симметричные относительно действительной и мнимой оси, соответственно. Ограничиваясь затем лишь первой четвертью плоскости, мы, с помощью конформного отображения $z(\zeta) = c/2(\zeta + 1/\zeta)$ (c – фокус гиперболы) и последующего аналитического продолжения, получили в первой четверти плоскости ζ относительно кусочно голоморфной функции $V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)v_R(z(\zeta))$ задачу $\mathbb{R}$-линейного сопряжения с постоянными коэффициентами $A = A_{12}$, $B = B_{12}$ на луче $\mathcal{L}^* = \{\zeta : \arg\zeta = \pi\alpha\}$ – образе верхней половины правой ветви гиперболы $\mathcal{L}$. Функция $V(\zeta)$ должна быть вещественной на действительной и мнимой на мнимой полуосях, удовлетворять условию симметрии $\overline{V(1/\overline{\zeta})} \equiv -V(\zeta)$ и иметь в начале координат и на бесконечности степенные особенности ниже второго порядка. К аналогичной задаче сводится и проблема построения решения $v_I(z)$. В обоих случаях соответствующие решения найдены в виде линейных комбинаций степенных функций $\zeta^{\pm\gamma}$. Показатель γ при этом определяется из следующих трансцендентных уравнений

$$\cos(\pi\gamma/2) \mp \Delta\cos[\pi\gamma(1/2 - 2\alpha)] = 0, \tag{5}$$

[2]Обносов, Ю.В. Решение задачи R-линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз / Ю.В. Обносов // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 53–62.

где $|\Delta| = |B/A| \leq 1$. Показывается, что каждое из двух последних уравнений имеет на интервале $(0,2)$ по одному корню, при этом соответствующие решения вспомогательных задач определяются с точностью до постоянного действительного множителя. Общее четное решение исходной задачи, сумма $v_R(z)+v_I(z)$, получается зависящим от двух произвольных вещественных параметров. Справедлива

Теорема 1. *Если $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\rho_{1,2} \neq 0, \infty$, то задача* (2) *для пары симметричных гиперболических включений имеет четное решение вида*

$$v_1(z) = \mathrm{i}\, c_1 \chi_1(z;\gamma_1) + c_2 \chi_1(z;\gamma_2), \qquad z \in S_1,$$

$$v_2(z) = c_1 \frac{\cos(\pi\gamma_1/2)}{B\sin(2\pi\gamma_1\alpha)} \chi_2(z;\gamma_1) + \mathrm{i}\, c_2 \frac{\cos(\pi\gamma_2/2)}{B\sin(2\pi\gamma_2\alpha)} \chi_2(z;\gamma_2), \quad z \in S_2,$$

где γ_1, γ_2 – корни уравнений (5), $\alpha = \pi^{-1}\arg(a+\mathrm{i}\, b) \in (0,1/2)$, ($\alpha \neq \frac{1}{4}$), *однозначные ветви функций*

$$\chi_1(z;\gamma) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\gamma/2}(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma/2}(z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma}{2\sqrt{z^2-c^2}},$$
$$\chi_2(z;\gamma) = \frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma - (z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma}{2\sqrt{z^2-c^2}},$$

фиксированы в соответствующих областях S_1, S_2 и принимают мнимое и вещественное значения на мнимой и действительной осях соответственно, c_1, c_2 – произвольные вещественные параметры.

Если $\alpha = 1/4$, то общее решение задачи (2) *определяется по формулам*

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \mathrm{i}\, c_1 \chi_1(z;\gamma) - c_2 \chi_1(z; 2-\gamma), & z \in S_1,\\ v_2(z) &= (A^2-B^2)^{-1/2}\left(c_1\chi_2(z;\gamma) + \mathrm{i}\, c_2 \chi_2(z;2-\gamma)\right), & z \in S_2, \end{aligned}$$

где $\gamma = 2\pi^{-1}\arccos\Delta$.

В отличие от работы Ю.В. Обносова[2], где было получено три линейно независимых решения, четное решение задачи о двух симметричных гиперболических включениях всегда зависит лишь от двух произвольных вещественных параметров. Поэтому единственность решения в этом случае обеспечивается заданием его значения в одной точке, например, в фокусе c.

Далее, в этом параграфе изучается задача (2), в случае вырождения ветвей гиперболы в пару пересекающихся прямых. С помощью замены $V(z) = zv(z)$ эта задача сводится к ранее изученной, что позволяет сразу выписать ее общее решение в классе четных функций. Фиксация значения искомого решения в точке $z = 1$ обеспечивает единственность решения.

Характер линий тока, построенных с помощью результатов этого параграфа, показывает, что при выбранном ограничении на поведение искомого решения в бесконечно удаленной точке и требовании его четности, соответствующее поле порождается диполем на бесконечности. В следующем параграфе будет показано, что отказ от четности приводит к еще одному решению, которое соответствует полю, порожденному квадруполем на бесконечности.

В §2, ограничиваясь случаем вещественных коэффициентов (3), рассматривается существенное обобщение предыдущей задачи на случай n-фазной среды, в предположении, что граница контакта разнородных фаз состоит из $(n-1)$ ветвей различных софокусных гипербол. В общем случае такая структура, в отличие от рассмотренной ранее, имеет лишь одну ось симметрии – вещественную ось. Однако, и здесь показывается, что вместе с функцией $v(z)$ соответствующим краевым условиям (2) будет удовлетворять и функция $\overline{v(\overline{z})}$. Это позволяет опять представить общее решение нашей задачи в виде суммы двух частных – $v_R(z)$ и $v_I(z)$, принимающих в точках, симметричных относительно вещественной оси, значения, симметричные относительно действительной и мнимой оси соответственно. Такие частные решения достаточно построить лишь в верхней полуплоскости. Тем же способом, что и в первом параграфе, относительно функции $V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)v_R(z(\zeta))$ мы приходим к задаче $\mathbb{R}$-линейного сопряжения с постоянными коэффициентами $A_k = A_{k\,k+1}$, $B_k = B_{k\,k+1}$ на совокупности $n-1$ лучей $l_k = \{\tau : \arg\tau = \pi\alpha_k\}$. Решение последней задачи отыскивается в следующем виде:

$$V_k(\zeta) = c_{1k}(e^{\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^{\gamma} - e^{-\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^{-\gamma}), \quad \pi\alpha_{k-1} \le \arg\zeta \le \pi\alpha_k, \quad k = \overline{1,n},$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = 1$, $\varphi_1 = 0$, а остальные вещественные параметры c_{1k}, $-1/2 < \varphi_k < 1/2$, $k = \overline{1,n}$ и $0 < \gamma < 2$ подлежат определению из системы $2n-2$ трансцендентных уравнений при условии, что $\varphi_n = -\gamma$. Условие разрешимости полученной системы представляет из себя следующее уравнение относительно γ:

$$\sin[\pi\gamma]W_n^1(\gamma) - \cos[\pi\gamma]W_n^2(\gamma) = 0, \tag{6}$$

где $\Delta_k = B_k/A_k$ $(-1 < \Delta_k < 1)$, $W_1^1(\gamma) \equiv 1$, $W_1^2(\gamma) \equiv 0$,

$$\begin{array}{l} W_{k+1}^1 = W_k^1(1 + \Delta_k \cos[2\pi\gamma\alpha_k]) + W_k^2 \Delta_k \sin[2\pi\gamma\alpha_k], \\ W_{k+1}^2 = W_k^1 \Delta_k \sin[2\pi\gamma\alpha_k] + W_k^2(1 - \Delta_k \cos[2\pi\gamma\alpha_k]), \end{array} \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Каждому решению уравнения (6) соответствует единственный набор параметров φ_k, $k = \overline{2, n-1}$, а коэффициенты $c_{1\,k}$, $k = \overline{1, n}$, определяются с точностью до одного произвольного мультипликативного множителя.

Решение $v_I(z)$ строится аналогично и сводится к решению уравнения (6), в котором надо лишь заменить все Δ_k на $-\Delta_k$. Уравнение (6) и получаемое из него указанной заменой при $n = 2$ сводятся к уравнениям, полученным в работе Ю.В. Обносова[2], где было показано, что оба уравнения разрешимы, а в совокупности они имеют три решения (исключение – случай равносторонней гиперболы, когда каждое из уравнений имеет по одному решению). При $n > 2$ нам не удалось аналитически исследовать вопрос о разрешимости уравнения (6). Однако, многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные с помощью команды FindRoot в пакете Mathematica в широком диапазоне изменения n при случайном выборе как вершин гипербол $\mathcal{L}_k$, так и сопротивлений фаз S_k, показали, что уравнение (6) имеет не менее одного и не более двух решений. В совокупности пара уравнений (6) и с ним родственное имеют от двух до четырех решений $\gamma_k \in (0, 2)$ и, соответственно, исходная задача имеет от двух до четырех линейно независимых частных решений. Причем случаи двух и четырех решений можно считать исключительными, а три стандартной ситуацией. Исходя из физических соображений, мы потребуем, чтобы решение было единственным при фиксации его значения в одной точке, например, в фокусе c:

$$v_1(c) = V_0 = V_{0x} - iV_{0y}. \tag{7}$$

Тогда, если число частных решений больше двух, то встает вопрос – линейную комбинацию какой пары $v_R(z)$ и $v_I(z)$ из трех (четырех) построенных частных решений следует брать в качестве решения исходной задачи? Построение линий тока показало, что следует брать пару $v_R(z)$, $v_I(z)$, отвечающую двум наименьшим значениям γ_k, если поле порождается диполем и любую другую пару, если поле порождается квадруполем.

В конце этого параграфа приведено решение задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения для симметричного “веера” – структуры, в которую вырождается выше рассмотренная, если в качестве линий раздела разнородных фаз вместо гипербол взять их асимптоты.

Вторая глава посвящена изучению задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения в более широком классе функций, а именно, в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированной главной частью.

В §1 изучается задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, в случае, когда инородным включением является прямоугольный “клин” $S_1 = \{z = x + \mathrm{i}y : \ x > 0, \ y > 0\}$. Следует упомянуть, что подобными проблемами, т.е. проблемами секториального распределения проводящих сред занимались Г.А. Гринберг[3] и А.Я. Чилап[4]. В частности, А.Я. Чилап изучал задачу о прямоугольном клине, в классе функций имеющих лишь логарифмические особенности. Он сводил эту задачу к системе интегральных уравнений Фредгольма, точное решение которой было получено операционным методом.

Нами же исследуется случай, когда у заданного потенциала $f(z)$ помимо логарифмических особенностей имеется и конечное число полюсов произвольного порядка в конечных точках областей, т.е. $F(z) = f'(z) = F_1(z) + F_2(z)$, где $F_1(z)$, $F_2(z)$ – произвольные рациональные функции с полюсами в областях S_1 и S_2 соответственно. Для поставленной задачи получено математически замкнутое решение, в предположении, что коэффициенты краевого условия (2) являются вещественными числами.

С помощью условия сопряжения на мнимой оси, функция $v_1(z)$ аналитически продолжается из первого квадранта во второй. Таким образом, относительно продолженной кусочно-голоморфной в плоскости $\mathbb{C}$ функции $V(z)$ приходим к задаче сопряжения на всей вещественной оси. Далее вводятся функции

$$\Phi_1(z) = V(z), \quad \Phi_2(z) = V(-z), \quad \Phi_3(z) = \overline{V(\overline{z})}, \quad \Phi_4(z) = \overline{V(-\overline{z})},$$

и показывается, что вектор-функция $\mathbf{\Phi(z)} = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z), \Phi_4(z))$ удовлетворяет краевым условиям векторной задачи Римана с кусочно-постоянным

[3] Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г.А. Гринберг. – М.–Л.: Издательство Академии наук СССР, 1948. – 727 с.

[4] Чилап А.Я. Задача нахождения поля давлений в некоторых кусочно-однородных пластах / А.Я. Чилап // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1958. – Т. 118, Вып. 2. – С. 234–251

матричным коэффициентом, а именно,

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}^{+}(x) = G\mathbf{\Phi}^{-}(x) + \mathbf{H}(x), \ x > 0; \\ \mathbf{\Phi}^{+}(x) = PGP\mathbf{\Phi}^{-}(x) + P\overline{\mathbf{H}(-x)}, \ x < 0. \end{cases}$$

Здесь $G = E - \Delta G_0$ – постоянная невырожденная матрица (E – единичная матрица, $G_0 = \{(\Delta, \Delta, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)\}$), а P – перестановочная матрица с единичными элементами на побочной диагонали. Компоненты свободного члена, вектор-функции $\mathbf{H}(x)$, являются рациональными функциями, они однозначно определяются через заданные главные части $F_1(z)$ и $F_2(z)$ искомого решения. Для решения последней задачи применяется развитый аппарат матричной задачи Римана, при этом все интегралы типа Коши, входящие в решение, удается вычислить в квадратурах.

В §2 задача о прямоугольном "клине" обобщается на случай гиперболического включения с границей в виде правой ветви равносторонней гиперболы. Задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения в случае одного гиперболического включения и заданного невозмущенного комплексного потенциала $f(z)$ рассматривалась в работе О.В. Голубевой и А.Я. Шпилевого[5]. Авторы этой работы сначала идентично переносят задачу на дубль – риманову поверхность радикала $\sqrt{z^2 - c^2}$. Затем дубль разрезается по одной из гипербол и с помощью функции, обратной к функции $z = c\cos(\zeta - \alpha/2)$ (c – фокус, α – угол между асимптотами гиперболы), отображается на полосу ширины 2π. При этом внутренность обеих гипербол переходит полосу $\{\zeta : -\alpha/2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \alpha/2\}$, а их внешность в ее дополнение. Наконец, с помощью 2π периодического распространения получается задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения для 2π-периодической системы двухкомпонентных полос. Решение последней задачи выписывается в виде формальных рядов, сходимость которых не доказывается. Мы же свели задачу о равносторонней гиперболе к рассмотренной ранее задаче о прямоугольном "клине" и получили ее решение в элементарных функциях. В частности, доказана

Теорема 7. *Если заданный комплексный потенциал имеет в области S_1 единственную логарифмическую особенность: $f(z) = \gamma_1 \log(z - z_1)$, то решение*

[5] Голубева О.В. О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка / О.В. Голубева, А.Я. Шпилевой // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. - С. 174–179.

задачи (2) находится по формулам

$$v_k(z) = \frac{c}{\sqrt{z^2-c^2}}\psi_k\left(\frac{e^{\pi\mathrm{i}/4}}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})\right),\ z\in S_k,\ k=1,2,$$

где

$$\psi_1(\eta) = \mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(\mathrm{i}/\eta) - \Delta\left(\overline{\mathcal{F}(-\overline{\eta})} - \overline{\mathcal{F}(\mathrm{i}/\overline{\eta})}\right) + \\ + U(\eta) - U(\mathrm{i}/\eta) - \Delta\left(\overline{U(-\overline{\eta})} - \overline{U(\mathrm{i}/\overline{\eta})}\right),\ \eta\in\mathbb{C}_+^+,$$

$$\psi_2(\eta) = (1+\Delta)\left(\mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(\mathrm{i}/\eta) + U(\eta) - U(\mathrm{i}/\eta)\right),\ \eta\in\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{C}_+^+},$$

в свою очередь

$$\mathcal{F}(\eta) = \frac{2\gamma_1}{c}\left(\frac{\eta_1}{\eta-\eta_1} + \frac{\eta}{\eta-\mathrm{i}/\eta_1}\right),$$

$$\eta_1 = \frac{e^{\pi\mathrm{i}/4}}{c}(z_1+\sqrt{z_1^2-c^2}),\ \Delta = \frac{B}{A},\ \lambda = 1-\frac{\Delta^2}{2}+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\sqrt{4-\Delta^2}) = e^{\pi\mathrm{i}\alpha},\ |\alpha|<1/2,$$

$$U(-\eta) = \frac{\gamma_1}{c}\left[\mathrm{i}\,\eta_1\left(X(\eta;\eta_1)+X(\eta;-\eta_1)\right) - \frac{1}{\eta_1}\left(X(\eta;\mathrm{i}/\eta_1)+X(\eta;-\mathrm{i}/\eta_1)\right)\right] + \\ + \frac{\Delta\overline{\gamma_1}}{c(\overline{\lambda}-1)}\left[\mathrm{i}\,\overline{\eta_1}\left(Y(\eta;\eta_1)+Y(\eta;-\eta_1)\right) + \frac{1}{\overline{\eta_1}}\left(Y(\eta;-\mathrm{i}/\overline{\eta_1})+Y(\eta;\mathrm{i}/\overline{\eta_1})\right)\right],$$

$$X(\eta;\eta_1) = N(\eta;\eta_1)\left(\chi(\eta)-\chi_1(\eta_1)\right),\ Y(\eta;\eta_1) = N(\eta;\overline{\eta_1})\left(\chi(\eta)+\overline{\lambda}\chi_1(\overline{\eta_1})\right),$$

$$N(\eta,\eta_1) = \frac{(\chi^{-1}(\eta_1)+\lambda\chi_1^{-1}(\eta_1))(1-\chi(\eta_1)/\chi(\eta))}{(1+\lambda)(\Delta^2-4)(\eta-\eta_1)},$$

функции $\chi(z)$ и $\chi_1(z)$ – однозначные ветви функции z^α, фиксированные условиями $|\arg z|<\pi$ и $0<\arg z<2\pi$ соответственно.
Аналогичный результат имеет место и в случае, когда особенность заданного потенциала расположена во внешности гиперболы.

В третьем параграфе исследуется задача в случае двухфазной среды с линией сопряжения в виде правой ветви гиперболы, величина угла, $2\alpha\pi$, между асимптотами которой рационально кратна π, т.е. $\alpha = p/k < 1/2$ и p/k – несократимая правильная дробь. Предполагается, что заданный комплексный потенциал $f(z)$ не имеет особенностей на линии сопряжения и что число логарифмических особенностей и полюсов $f(z)$ конечно. Как и в предыдущем параграфе наша задача сначала сводится относительно функции $V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)v(c/2(\zeta + 1/\zeta))$ к задаче о "клине" (в данном случае раствора $2\pi p/k$). Затем ζ-плоскость разбивается лучами $\{\tau : \arg\tau = \pi(p+2j)/k\}$, $j = \overline{0, k-1}$ на k равных секторов. В каждом секторе формально вводится новая функция, совпадающая с искомой. Таким образом получается задача о правильном k лепестковом "веере". Затем задача переносится на k листную риманову поверхность радикала степени k, причем каждый сектор переходит на свой лист римановой поверхности, а его граница переходит в разрез по положительной части вещественной оси. Избавляясь обычным приемом от комплексно сопряженных функций, мы окончательно приходим к векторной задаче Римана на $\mathbb{R}^+$ относительно $2k$-мерной вектор функции с постоянным матричным коэффициентом. Решение последней задачи сводится к проблеме представления в жордановой форме матрицы порядка $2k$, которая в нашем случае успешно решается.

В заключение отметим, что для всех полученных решений были проведены аналитические и численные проверки. На примерах продемонстрировано распределение линий тока и эквипотенциалей в соответствующих структурах.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Obnosov, Yu.V. Solution of an R-linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface / Yu.V. Obnosov, T.V. Nikonenkova // Lithuanian Mathematical Journal. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.

[2] Никоненкова, Т.В. Об одной трехфазной задаче R-линейного сопряжения / Т.В. Никоненкова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 127–136.

[3] Никоненкова, Т.В. Решение n-фазной задачи R-линейного сопряжения / Т.В. Никоненкова // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №4. – С. 1–8.

[4] Никоненкова, Т.В. Задача R-линейного сопряжения для прямоугольного клина в классе кусочно-мероморфных функций / Т.В. Никоненкова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 154, № 1. – С. 134–146.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно-практических конференциях

[5] Никоненкова, Т.В. Решение одной n-фазной задачи R-линейного сопряжения / Т.В. Никоненкова // Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2009 года). Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, 2009. – Т. 38. – С. 194–196.

[6] Никоненкова, Т.В. Обобщенная теорема Милн-Томсона для прямоугольного клина / Т.В. Никоненкова // Материалы молодежной школы-конференции (Казань, 1 - 6 октября 2010 года). Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, 2010. – Т. 40. – С. 244–245.

[7] Никоненкова, Т.В. Задача R-линейного сопряжения для параболического кольца в классе кусочно-мероморфных функций / Т.В. Никоненкова // Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2011 года). Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, 2011. – Т. 43. – С. 265–266.

[8] Никоненкова, Т.В. Задача R -линейного сопряжения для прямоугольного клина в классе кусочно-мероморфных функций / Т.В. Никоненкова // Сборник научных трудов победителей всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках всероссийского фестиваля наук. – Издательство РГСУ. – М., 2011. – С. 210–216.

[9] Никоненкова, Т.В. Задача R-линейного сопряжения в классе кусочно-мероморфных функций для одного гиперболического включения / Т.В. Никоненкова // Материалы молодежной школы-конференции (Казань, 1–6 ноября 2012 года). Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, 2012. – Т. 45. – С. 154–156.

[10] Никоненкова, Т.В. Обобщение теоремы Милн-Томсона на случай гиперболического включения / Т.В. Никоненкова // Всероссийский конкурс научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук: сборник работ победителей / под общ. ред. А. С. Андреева. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – С. 27–28.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертационной работе получены аналитические решения следующих краевых задач сопряжения

1. Задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения в классе кусочно-голоморфных функций в случае, когда линиями раздела разнородных фаз являются ветви софокусных гипербол, а также в случае веерообразной структуры симметричной относительно оси абсцисс.

2. Задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированной главной частью для прямоугольного "клина".

3. Задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения в классе кусочно-мероморфных функций в случае, когда линией сопряжения является ветвь гиперболы, асимптоты к которой образуют угол рационально кратный π. Наиболее полно изучен случай равносторонней гиперболы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Обносову Юрию Викторовичу за постоянное внимание к работе, поддержку, за ценные советы и критические замечания.