

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ПРАКТИКУМ ПО КОМПЬЮТЕРНОМУ  
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ.  
ЧАСТЬ II:  
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Казанский университет

2015

УДК 004.94  
ББК 32.973.26–018

Рекомендовано к печати решением кафедры высшей математики и математического моделирования отделения педагогического образования Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

**Научный редактор –**  
кандидат физ.-мат. наук Ф. Ш. Зарипов

**Рецензенты:**

доктор тех. наук Н. Н. Зиятдинов  
канд. тех. наук Т. Ю. Гайнутдинова

**Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебно-методическое пособие / О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2015. – 85с.**

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для обеспечения самостоятельных занятий изучающим компьютерное моделирование студентам специальности «Информатика» отделения педагогического образования Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ. Пособие содержит теоретический материал, примеры и задания по следующим темам: «Свободное падение тела с учетом сопротивления среды», «Движение тела, брошенного под углом к горизонту с учетом сопротивления среды», «Движение тела с переменной массой: взлет ракеты», «Моделирование движения космических тел», «Задача о распределении тепла в стержне». Учебно-методическое пособие содержит теоретический и практический материал по компьютерному моделированию физических процессов с использованием разнообразных прикладных программ и программных сред: MS Excel, Visual Basic Application (VBA) в Excel, среды Delphi, среды MS Visual Studio.

УДК 004.94  
ББК 32.973.26–018  
© Казанский университет, 2015  
© Широкова О.А., 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛА С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ .....</b>	<b>5</b>
<b>ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА .....</b>	<b>5</b>
<b>СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛА .....</b>	<b>5</b>
<i>Задача 1. Свободное падение при затяжном прыжке .....</i>	<i>6</i>
<b>МЕТОД ЭЙЛЕРА-КОШИ .....</b>	<b>9</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 .....</b>	<b>14</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 .....</b>	<b>15</b>
<i>Задача 2. Свободное падение шарика в вязкой среде .....</i>	<i>17</i>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 .....</b>	<b>22</b>
<b>ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ .....</b>	<b>25</b>
<b>ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ БЕЗ УЧЕТА СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ .....</b>	<b>26</b>
<i>Задача 1. Вычисление характеристик полета .....</i>	<i>26</i>
<i>Задача 2. Построение траектории полета при горизонтальном бросании мяча с высоты без учета сопротивления воздуха .....</i>	<i>30</i>
<b>ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ.....</b>	<b>31</b>
<b>ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ ЗАДАЧИ.....</b>	<b>32</b>
<i>Задача 3. Построение траектории полета при бросании под углом с учетом сопротивления.....</i>	<i>34</i>
<b>Моделирование движения в системе DELPHI .....</b>	<b>35</b>
<b>Моделирование движения средствами VBA в EXCEL .....</b>	<b>42</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 .....</b>	<b>49</b>
<b>ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ: ВЗЛЕТ РАКЕТЫ .....</b>	<b>52</b>
<i>Задача. Изменение скорости и высоты полета ракеты от времени.....</i>	<i>53</i>
<b>Моделирование движения ракеты средствами языка C++ .....</b>	<b>55</b>

<i>Настройка GLUT на Visual Studio 2013.....</i>	<i>55</i>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ.....</b>	<b>62</b>
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА C++ .....	66
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА PASCAL .....	73
<b>ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ .....</b>	<b>75</b>
<i>Задача. Определение динамики изменения температуры в</i>	
<i>стержне .....</i>	<i>76</i>
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5 .....	81
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>83</b>
<b>ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ.....</b>	<b>85</b>

# СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛА С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

## Второй закон Ньютона

В рассматриваемых ниже физических задачах фундаментальную роль играет второй закон Ньютона. Он гласит, что ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально действующей на него силе (если их несколько, то равнодействующей, т.е. векторной сумме сил) и обратно пропорционально его массе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В ситуации, когда сила или масса не являются величинами постоянными, необходимо записать этот закон в более общей математической форме. Поскольку ускорение есть приращение скорости  $\vec{v}(t)$ , а скорость — приращение перемещения  $\vec{s}(t)$ , то

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}(t), \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{s})}{m(t, \vec{v}, \vec{s})}$$

## Свободное падение тела

Математическая модель свободного падения тела следует из уравнения второго закона Ньютона с учетом двух сил, действующих на падающее тело — силы тяжести и силы сопротивления среды:  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}_{\text{тяж}}$ , где  $\vec{F}_{\text{сопр}} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \vec{v}^2$ ,  $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$ .

Рассматриваемое движение является одномерным. Проецируя силу  $\vec{F}$ , скорость  $\vec{v}$  и перемещение  $\vec{h}$  на ось, направленную вертикально вниз, получаем

$$\frac{dh}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - k_1v - k_2v^2}{m} \quad (1)$$

В конкретных задачах можно одной из составляющих силы сопротивления пренебречь (если она заведомо много меньше другой).

Если скорость движения мала ( $v = 0,1$  м/с), т. е.  $k_1v \gg k_2v^2$ , то отбрасывается квадратичная составляющая скорости в формуле силы сопротивления.

Если скорость движения велика ( $v = 1000$  м/с), т. е.  $k_1v \ll k_2v^2$ , то отбрасывается линейная составляющая скорости в формуле силы сопротивления.

Частичное тестирование моделирующей программы можно провести для движения без сопротивления. Аналитическое решение в этом случае общеизвестно.

Входные параметры модели:

- Начальная высота тела;
- Начальная скорость тела;
- Величины, определяющие коэффициенты сопротивления среды.

### **Задача 1. Свободное падение при затяжном прыжке**

Паращютист совершает затяжной прыжок. Считая массу паращютиста заданной ( $m=80$  кг), определить, начиная с какого времени, после начала полета скорость человека в затяжном прыжке становится постоянной. Построить график зависимости скорости падения «безпаращютиста» от времени.

#### Решение

Нужно определить характер изменения скорости со временем, если все параметры, входящие в уравнения системы (1), заданы. При такой

постановке модель носит дескриптивный характер. Ясно, что при наличии сопротивления, растущего со скоростью, в какой-то момент сила сопротивления сравняется с силой тяжести, после чего скорость больше возрастать не будет. Выберем путь численного моделирования. Итак, математическая модель выражается системой дифференциальных уравнений (1), однако, поскольку нужен график изменения скорости, то будем рассматривать только второе уравнение системы (1).

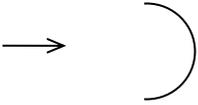
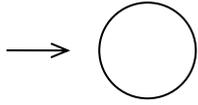
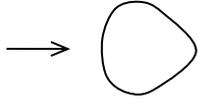
Скорость движения достаточно большая, поэтому вкладом линейной составляющей силы сопротивления  $k_1 \cdot v$  можно пренебречь. Тогда получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{mg - k_2 v^2}{m} \end{aligned} \quad (2)$$

Из данных уравнений будем рассматривать только второе уравнение. Здесь  $v$  – скорость,  $t$  – время,  $h$  – высота,  $m$  – масса,  $g$  – ускорение свободного падения,  $k_2$  – коэффициент квадратичной составляющей скорости.

Таблица 1.

Коэффициенты лобового сопротивления

	Полусфера	$c = 1,33$
	Шар	$c = 0,4$
	Каплевидное тело	$c = 0,045$

Величина  $k_2$  пропорциональна площади сечения тела  $S$ , поперечного по отношению к потоку, и плотности среды  $\rho_{\text{среды}}$  и зависит от формы тела. Обычно представляют  $k_2=0,5cS\rho_{\text{среды}}$ , где  $c$  - коэффициент лобового сопротивления - безразмерен. Некоторые значения  $c$  приведены в таблице 1.

Таблица 2.

Таблица вязкости и плотности жидкостей

<b>Жидкость</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\rho, \text{кг/м}^3</math></b>
Бензин	0,65	$0,75 \cdot 10^3$
Глицерин	1499	$1,26 \cdot 10^3$
Керосин	2,17	$0,78 \cdot 10^3$
Мазут	3870	$0,8 \cdot 10^3$

Таблица 3.

Таблица плотности разных веществ

<b>Вещество</b>	<b><math>\rho, \text{кг/м}^3</math></b>	<b>Вещество</b>	<b><math>\rho, \text{кг/м}^3</math></b>
Воздух	1,29	Олово	$7,3 \cdot 10^3$
Вода	$1 \cdot 10^3$	Титан	$4,5 \cdot 10^3$
Глицерин	$1,26 \cdot 10^3$	Резина	$1,2 \cdot 10^3$
Алюминий	$2,7 \cdot 10^3$	Сталь	$7,7 \cdot 10^3$
Серебро	$10,5 \cdot 10^3$	Никель	$8,8 \cdot 10^3$
Чугун	$7,8 \cdot 10^3$	Золото	$19,3 \cdot 10^3$
Кварцевое стекло	$2,21 \cdot 10^3$	Медь	$8,89 \cdot 10^3$

Вычислим значение коэффициента  $k_2$  для данной задачи. Средний рост человека возьмем средний - 1,7 м, а полубхват грудной клетки – характерный размер – это приблизительно 0,4 м.

Выберем число  $c = 1,22$  как среднее между коэффициентами для диска и для полусферы (выбор для качественной оценки правдоподобен). Оценим площадь поперечного сечения:

$$S = 1,7 \cdot 0,4 = 0,7 \text{ [м}^2\text{]}.$$

$$\rho_{\text{среды}} = 1,29 \text{ [кг/м}^3\text{]}.$$

$$\text{Тогда } k_2 = 0,5cS\rho_{\text{среды}} = 0,5 \cdot 1,22 \cdot 0,7 \cdot 1,29 = 0,55083 \text{ [кг/м]}.$$

$m$  – масса парашютиста,  $m = 80 \text{ кг}$ .

$g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,8 \text{ [кг/м}^2\text{]}$

Теперь можно приступить к численному решению задачи. При этом следует воспользоваться одним из известных численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение находится с помощью, так называемого, модифицированного метода Эйлера – метода Эйлера-Коши.

### Метод Эйлера-Коши

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной форме.

Пусть дано уравнение 
$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

с начальным условием 
$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

Получение значений искомой функции  $y(x)$  по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \end{aligned} \tag{5}$$

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность. Модификации метода обычно направлены на то, чтобы более точно определить направление перехода из точки  $(x_i, y_i)$  в точку  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . В методе Эйлера-Коши, например, предлагается следующий порядок вычислений:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

Геометрически это означает, что мы определяем направление интегральной кривой в исходной точке  $(x_i, y_i)$  и во вспомогательной точке  $(x_{i+1}, y_{i+1}^*)$ , а в качестве окончательного берем среднее этих направлений. В соответствии с методом Эйлера-Коши запишем итерационные уравнения нахождения значения скорости  $v_{i+1}$  в следующий момент времени из предыдущего значения  $v_i$ . Обозначим через  $\tau$  – шаг по времени:  $\tau = t_{i+1} - t_i$ . Обозначим правую часть второго уравнения системы (1) через:

$$f(t_i, v_i) = \frac{mg - k_2 v_i^2}{m}, \quad (7)$$

Тогда в момент времени  $t_{i+1}$  согласно методу Эйлера-Коши запишем формулы:

$$\begin{aligned} v_{i+1}^* &= v_i + \tau \cdot f(t_i, v_i), \\ v_{i+1} &= v_i + \tau \cdot \frac{f(t_i, v_i) + f(t_{i+1}, v_{i+1}^*)}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В итоге, подставляя (7) в формулы (8), в итоге получим:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\tau}{2} [(mg - k_2 v_i^2) / m + (mg - k_2 \cdot (v_i + \tau(mg - k_2 v_i^2) / m)^2) / m]$$

Для ускорения процесса работы над задачей целесообразно вместо составления программы на алгоритмическом языке воспользоваться готовой прикладной программой (например, табличным процессором Excel).

### Вычисления в Excel

На рабочем листе Excel в ячейках D2, D4, D6, D8 будем хранить соответственно значения: шага вычислений -  $\tau$ , массы «безпарашютиста» -  $m$ , величины -  $mg$ , коэффициента  $k_2$ . Все константы удобно хранить в отдельных ячейках. Будем вычислять в столбце А – значения времени –  $t_i$ , в столбце В – значения скорости -  $v_i$ . В ячейку A3 занесём начальное значение  $t_0=0$ , в ячейку B3 занесём начальное значение  $v_0 = 0$ . Тогда для вычисления значения  $v_1$  в ячейке B4 нужно записать формулу:  $=B3+\$D\$2/2*((\$D\$6-\$D\$8*B3^2)/\$D\$4+(\$D\$6\$D\$8*(B3+\$D\$2*(\$D\$6\$D\$8*B3^2)/\$D\$4)^2)/\$D\$4)$  и произвести автозаполнение столбца В. В столбце А в ячейку A4 нужно записать формулу:  $= A3+\$D\$2$  и произвести автозаполнение столбца А.

### Построение графика в Excel

Выделим диапазон ячеек B3:B20, содержащий данные для построения графика. Значения из столбца А (диапазон A3:A20) будут откладываться по оси ОХ (ось времени), значения из столбца В (диапазон B3:B20) – по оси ОУ.

Выберем команду **Вставка, Диаграмма**. С помощью мастера диаграмм построим график в четыре этапа (шага):

#### Шаг 1.

В диалоговом окне **Тип диаграммы** на вкладке **Стандартные** выбрать тип диаграммы **Точечная** и вид – **Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями**. Щелкнуть на кнопку **Далее**.

#### Шаг 2.

В окне **Источник данных диаграммы** на вкладке **Диапазон данных** проверить, что диапазон данных выбран правильно и установлен флажок опции **Ряды в столбцах**. Выбрать вкладку **Ряд** и в поле **Имя**: ввести название графика **Зависимость  $v$  от  $t$** . Установить курсор в поле «**Подписи оси X**» и занести диапазон ячеек по переменной  $t$  (столбец А – диапазон А3:А20). Щелкнуть на кнопку **Далее**.

### Шаг 3.

На этом шаге задаются параметры диаграммы (окно **Параметры диаграммы**). На вкладке **Заголовки** ввести название диаграммы и наименования осей координат с указанием единиц измерения величин, откладываемых по этим осям:

в поле **Название диаграммы** — **График зависимости  $v$  от  $t$** ;

в поле **Ось X** (категорий) — **Время  $t$ , (с)**;

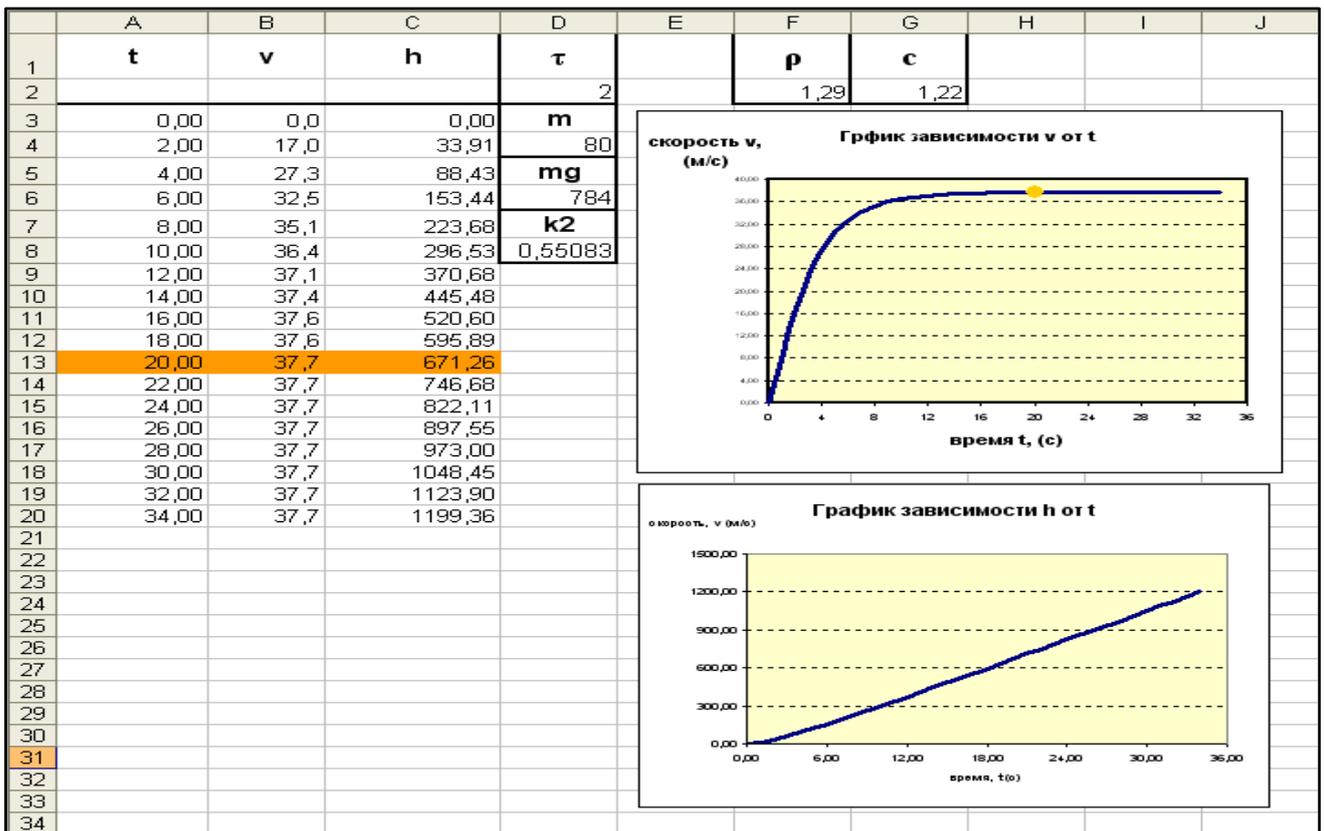
в поле **Ось Y** (значений) — **Скорость  $v$ , (м/с)**.

### Шаг 4.

Последний шаг определяет местоположение диаграммы – окно **Размещение диаграммы**. Выбрать вариант – **на том же листе**. Щелкнуть на кнопку **Готово**.

Результаты вычислений, выполненных в табличном процессоре:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t	v	h	τ		ρ	с			
2				2		1,29	1,22			
3	0,00	0,00	0,00	m						
4	=A3+\$D\$2	=B3+\$D\$2	=C3+B4*\$D\$2	80						
5				mg						
6				=D4*9,8						
7				k2						
8				=0,5*G2*0,7*F2						
9										



Учтем, что шаг  $\tau$  для разных задач нужно выбирать индивидуально. Если в задаче о безпарашютисте можно  $\tau$  взять равным 2 сек., то в задаче о парашютисте (при  $k_2=20$ )  $\tau$  равно 0,2 сек, т.к. скорость падения меньше. При падении в вязкой среде скорость чрезвычайно мала, поэтому  $\tau$  берется очень маленьким – например, 0,01 – 0,02 сек. При падении в вязкой среде нужно учитывать линейную составляющую скорости в силе сопротивления.

Примерно через 20 сек. после начала полета скорость становится постоянной и остается такой до приземления. Отметим, что в рассматриваемой ситуации сопротивление воздуха радикально меняет характер движения; при отказе от его учета график скорости заменился бы касательной к нему в начале координат.

## Лабораторная работа №1

Паращютист совершает затыжной прыжок. Считая массу, рост, полуобхват грудной клетки заданными (данные приведены в таблице), определить, начиная с какого времени, после начала полета скорость - «безпаращютиста» становится постоянной. Построить график зависимости скорости падения «безпаращютиста» от времени и высоты полета от времени.

№ варианта	Масса (кг)	Рост (м)	Полуобхват грудной клетки (м)
1	60	1,65	0,35
2	50	1,40	0,3
3	80	1,65	0,33
4	65	1,65	0,35
5	80	1,8	0,45
6	70	1,65	0,4
7	60	1,7	0,3
8	64	1,53	0,4
9	65	1,5	0,5
10	80	1,62	0,37
11	50	1,65	0,35
12	60	1,65	0,4
13	67	1,72	0,32
14	60	1,65	0,35
15	54	1,68	0,32
16	61	1,65	0,45
17	100	1,95	0,55
18	50	1,55	0,30
19	90	1,85	0,40
20	100	1,85	0,45

## Лабораторная работа №2

1. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2,5 \text{ м}$ , масса спортсмена  $m = 60 \text{ кг}$ .
2. Парашютист прыгает с высоты  $1 \text{ км}$ , сразу открывает парашют. Какова скорость при приземлении, если радиус парашюта  $2,7 \text{ м}$ , а масса  $75 \text{ кг}$ ?
3. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,7 \text{ м}$ , масса парашютиста  $m = 80 \text{ кг}$ .
4. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,5 \text{ м}$ , масса парашютиста  $m = 70 \text{ кг}$ .
5. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2 \text{ м}$ , масса парашютиста  $m = 60 \text{ кг}$ .
6. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,2 \text{ м}$ , масса парашютиста  $m = 65 \text{ кг}$ .
7. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,5 \text{ м}$ , масса парашютиста  $m = 75 \text{ кг}$ .
8. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2 \text{ м}$ , масса спортсмена  $m = 80 \text{ кг}$ .
9. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2,5 \text{ м}$ , масса спортсмена  $m = 80 \text{ кг}$ .
10. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2 \text{ м}$ , масса спортсмена  $m = 70 \text{ кг}$ .

11. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2$  м, масса спортсмена  $m = 65$  кг.

12. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2,4$  м, масса спортсмена  $m = 65$  кг.

13. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 2$  м, масса спортсмена  $m = 50$  кг.

14. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 3$  м, масса спортсмена  $m = 85$  кг.

15. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 3,1$  м, масса спортсмена  $m = 80$  кг.

16. В какой момент скорость спортсмена станет постоянной, если он прыгает с парашютом, имеющим форму шара, радиус которого  $R = 3,4$  м, масса спортсмена  $m = 85$  кг.

17. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,1$  м, масса парашютиста  $m = 85$  кг.

18. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,9$  м, масса парашютиста  $m = 100$  кг.

19. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,1$  м, масса парашютиста  $m = 60$  кг.

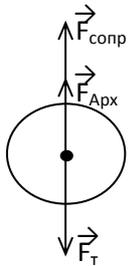
20. Парашютист прыгает и сразу открывает парашют. В какой момент скорость парашютиста станет постоянной, если радиус парашюта  $R = 2,5$  м, масса парашютиста  $m = 100$  кг.

## Задача 2. Свободное падение шарика в вязкой среде

Шар, сделанный из чугуна, радиуса  $r = 0,1$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости и силу гидростатического выталкивания (силу Архимеда). Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

### Решение:

На шарик, падающий в вязкой среде, по вертикали действуют три силы:



- сила тяжести (тяготения)  $\vec{F}_m = m \cdot \vec{g} = \rho \cdot V_{об} \cdot \vec{g}$  где  $V_{об}$  – объем шара;
- сила гидростатического выталкивания (сила Архимеда):  

$$\vec{F}_{Арх} = \rho_{жс} \cdot V_{об} \cdot \vec{g}$$

где  $\rho_{жс}$  – плотность жидкости,

- сила сопротивления среды:  $\vec{F}_{сопр}$ .

Учитывая действие трех сил, аналогично системе (1) в проекции на вертикальную ось в данном случае получим:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{(\rho - \rho_{жс})V_{об}g - F_{сопр}}{m} \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем, что скорость мала и квадратичную составляющую скорости в  $F_{сопр}$  можно не учитывать. При относительно малых скоростях величина силы сопротивления пропорциональна скорости и имеет место соотношение  $F_{сопр} = k_1 v$ , где  $k_1$  определяется свойствами среды и формой тела. Например,

для шарика  $k_I = 6\pi\mu r$  - это формула Стокса, где  $r$  - радиус шарика,  $\mu$  - динамическая вязкость среды.

Таблица 4.

Таблица вязкости текучих веществ при  $t = 20^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм

Вещество	$\mu, [\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2]$
Воздух	0,0182
Вода	1,002
Глицерин	1480

Оценим, при какой скорости для падающего вертикально шара силы сопротивления и выталкивания сравняются с силой тяжести и движение станет равномерным, то есть:  $F_m = F_{\text{Арх}} + F_{\text{сопр}}$ ,

Имеем  $m \cdot g = \rho_{\text{ж}} \cdot V_{\text{об}} \cdot g + 6\pi\mu \cdot r \cdot v$ , или

$$\rho \cdot V_{\text{об}} \cdot g - \rho_{\text{ж}} \cdot V_{\text{об}} \cdot g = (\rho - \rho_{\text{ж}}) \cdot V_{\text{об}} \cdot g = 6\pi\mu \cdot r \cdot v^*,$$

Пусть  $r = 0,1 \text{ м}$ , плотность чугуна:  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,

плотность глицерина  $\rho_{\text{ж}} = 1260 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Учитывая  $1 \text{ Ньютон} = 1 \text{ Н} = 1(\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с}^2$ , тогда:

$$v^* = (\rho - \rho_{\text{ж}}) \frac{\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 g}{6\pi\mu \cdot r} = (\rho - \rho_{\text{ж}}) \frac{2r^2 g}{9\mu} = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot (7800 - 1260) \cdot 9,8}{9 \cdot 1480} =$$

$$= \frac{1281,8}{13320} = 0,096 \text{ [м/с]} \approx 0,1.$$

Итак, при падении шара в глицерине скорость, при которой движение

станет равномерным, равна  $v^* \approx 0,1$  м/с. Таким образом, скорость достаточно мала, поэтому вкладом квадратичной составляющей силы сопротивления можно пренебречь, то есть действительно  $F_{comp} = k_1 v$ . Учитывая обозначение:  $\bar{m} = (\rho - \rho_{ж}) V_{об}$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\bar{m}g - k_1 v}{m} \end{aligned} \quad (10)$$

Это эквивалентно системе (9), что и требовалось доказать.

В соответствии с методом Эйлера-Коши запишем итерационное уравнение нахождения значения скорости  $v_{i+1}$  через  $v_i$ . Обозначим правую часть второго уравнения системы (10), записанного в дискретном виде, через  $f(t_i, v_i)$ :

$$f(t_i, v_i) = \frac{\bar{m}g - k_1 v_i}{m} \quad (10)$$

Согласно методу Эйлера – Коши запишем формулы:

$$\begin{cases} v_{i+1}^* = v_i + \tau \cdot f(t_i, v_i) \\ v_{i+1} = v_i + \tau \frac{f(t_i, v_i) + f(t_i, v_{i+1}^*)}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Тогда подставляя (11) в формулы (12), получаем

$$\begin{aligned} v_{i+1}^* &= v_i + \tau \cdot \frac{\bar{m}g - k_1 v_i}{m} \\ f(t_{i+1}, v_{i+1}^*) &= (\bar{m}g - k_1 (v_i + \tau \frac{\bar{m}g - k_1 v_i}{m})) / m \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\bar{m}g - k_1 v_i}{m} + (\bar{m}g - k_1 (v_i + \tau \frac{\bar{m}g - k_1 v_i}{m})) / m \right] \quad (13)$$

Рассмотрим теперь первое уравнение в системе (10), поскольку нам необходимо также исследовать зависимость высоты полета  $h$  от времени:

$$\frac{dh}{dt} = v,$$

получим итерационную формулу для вычисления  $h$

$$\frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i} = v_{i+1}, \quad h_{i+1} = h_i + v_{i+1}(t_{i+1} - t_i),$$

Поскольку  $t_{i+1} - t_i = \tau$ ,

Тогда

$$h_{i+1} = h_i + v_{i+1} \cdot \tau \quad (14)$$

Данная задача решается с помощью табличного процессора Excel.

В таблице Excel расположим в столбце D начальные данные:

в D2 – значение  $\tau = 0,02$ ,

в D4 – значение  $\bar{m}$  ( $\bar{m} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_{\text{ж}}) = 27,381 [\text{кг}]$ )

в D6 – значение  $\bar{m} \cdot g$

в D8 – значение  $k_1$  ( $k_1 = 6\pi\mu r = 2788,32 [\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}]$ )

в D10 – значение  $m$  ( $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = 32,656 [\text{кг}]$ )

С использованием итерационных формул (13) и (14) таблица имеет вид:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>t</b>	<b>v</b>	<b>h</b>	<b><math>\tau</math></b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\rho_{\text{чугун}}</math></b>	<b><math>\rho_{\text{глиц}}</math></b>
2				0,02	0,1	1480	7800	1260
3	0	0	0	<b><math>\bar{m}</math></b>				
4	0,02	=B3+\$D\$2/2* (((\$D\$6-\$D\$8*B3)/\$D\$10+(\$D\$6-\$D\$8*(B3+\$D\$2*(\$D\$6-\$D\$8*B3)/\$D\$10)))/\$D\$10)	=C3+B4*\$D\$2	=4/3*3,14*E2^3*(G2-H2)				
5				<b><math>\bar{m}g</math></b>				
6				=D4*9,8				
7				<b><math>k_1</math></b>				
8				=6*3,14*F2*E2				
9				<b><math>m</math></b>				
10				=(4/3)*3,14*E2^3*G2				

Результаты вычислений, выполненных в табличном процессоре:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>t</b>	<b>v</b>	<b>h</b>	<b><math>\tau</math></b>	<b>г</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\rho_{\text{жидк}}</math></b>	<b><math>\rho_{\text{плас}}</math></b>		
2				0,02	0,1	1480	7800	1260		
3	0	0	0	<b><math>\bar{m}</math></b>						
4	0,02	0,0240	0,00	27,3808						
5	0,04	0,0420	0,00	<b><math>\bar{m}g</math></b>						
6	0,06	0,0556	0,00	268,3318						
7	0,08	0,0657	0,00	<b>k1</b>						
8	0,10	0,0733	0,01	2788,32						
9	0,12	0,0790	0,01	<b>m</b>						
10	0,14	0,0833	0,01	32,656						
11	0,16	0,0866	0,01							
12	0,18	0,0890	0,01							
13	0,20	0,0908	0,01							
14	0,22	0,0921	0,02							
15	0,24	0,0932	0,02							
16	0,26	0,0939	0,02							
17	0,28	0,0945	0,02							
18	0,30	0,0949	0,02							
19	0,32	0,0953	0,03							
20	0,34	0,0955	0,03							
21	0,36	0,0957	0,03							
22	0,38	0,0958	0,03							
23	0,40	0,0959	0,03							
24	0,42	0,0960	0,03							
25	0,44	0,0961	0,04							
26	0,46	0,0961	0,04							
27	0,48	0,0961	0,04							
28	0,50	0,0962	0,04							
29	0,52	0,0962	0,04							
30	0,54	0,0962	0,05							
31	0,56	0,0962	0,05							
32	0,58	0,0962	0,05							
33	0,60	0,0962	0,05							
34	0,62	0,0962	0,05							
35	0,64	0,0962	0,06							
36	0,66	0,0962	0,06							
37	0,68	0,0962	0,06							



Вывод: примерно через  $t=0,5$  сек. после начала падения скорость становится постоянной и остается такой до конца (график выравнивается, становится параллельным оси изменения времени). При падении в вязкой среде скорость мала, за доли секунды она становится постоянной, поэтому шаг по времени  $\tau$  берется очень маленьким, например 0,02 сек.

### Лабораторная работа №3

Изучить влияние вязкости среды на характер движения.

1. Шар, сделанный из алюминия радиуса  $r = 0,15$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

2. Шар, сделанный из серебра радиуса  $r = 0,2$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

3. Шар, сделанный из стали радиуса  $r = 0,17$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

4. Шар, сделанный из олова радиуса  $r = 0,13$  м падает в керосине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

5. Шар, сделанный из титана радиуса  $r = 0,2$  м падает в бензине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

6. Шар, сделанный из стали радиуса  $r = 0,25$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

7. Шар, сделанный из меди радиуса  $r = 0,14$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти

изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

8. Шар, сделанный из меди радиуса  $r = 0,1$  м падает в бензине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

9. Шар, сделанный из меди радиуса  $r = 0,1$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

10. Шар, сделанный из олова радиуса  $r = 0,15$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

11. Шар, сделанный из серебра радиуса  $r = 0,1$  м падает в бензине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

12. Шар, сделанный из олова радиуса  $r = 0,2$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

13. Шар, сделанный из резины радиуса  $r = 0,15$  м падает в бензине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

14. Шар, сделанный из кварца радиуса  $r = 0,15$  м падает в бензине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

15. Шар, сделанный из титана радиуса  $r = 0,2$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

16. Шар, сделанный из кварца радиуса  $r = 0,25$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

17. Шар, сделанный из олова радиуса  $r = 0,3$  м падает в глицерине, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

18. Шар, сделанный из олова радиуса  $r = 0,4$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

19. Шар, сделанный из стали радиуса  $r = 0,45$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

20. Шар, сделанный из стали радиуса  $r = 0,1$  м падает в мазуте, встречая силу сопротивления, пропорциональную скорости. Найти изменение скорости и высоты падения при изменении времени. Построить графики зависимости скорости и высоты от времени.

## ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Будучи брошенным, под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ , тело летит без учета сопротивления воздуха по параболе и через некоторое время падает на землю. Решим задачу о брошенном под углом теле без учета сопротивления воздуха. Разложим скорость  $v_0$  на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$v_x^{(0)} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y^{(0)} = v_0 \sin \alpha. \quad (1)$$

Движение по вертикали не равномерно. Оно является равнозамедленным до достижения верхней точки на траектории и равноускоренным после неё. Движение по горизонтали является равномерным. Для вертикальной составляющей  $v_y = v_y^{(0)} - gt$ ; Вычислим время достижения верхней точки траектории. Имеем в верхней точке  $v_y=0$ , тогда в верхней точке  $\{v_y = v_y^{(0)} - gt\}$ ,  $v_y^{(0)} = gt$ . Отсюда время достижения верхней точки:

$$\tilde{t} = \frac{v_y^{(0)}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2)$$

Высота этой точки  $h$  равна:

$$h = v_y^{(0)} \tilde{t} - \frac{g \tilde{t}^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (3)$$

Полное время до падения на землю  $2\tilde{t}$ ; за это время, двигаясь равномерно вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_x^{(0)}$ , тело пройдет путь:

$$l = v_x^{(0)} \cdot 2\tilde{t} = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (4)$$

Для нахождения траектории достаточно из текущих значений  $x$  и  $y$  исключить  $t$ :

$$x = v_x^{(0)}t, \quad y = v_y^{(0)}t - \frac{gt^2}{2}; \quad (5)$$

следовательно:

$$y = v_y^{(0)} \frac{x}{v_x^{(0)}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_x^{(0)2}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (6)$$

Уравнение (6) – уравнение параболы.

### **Задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту без учета сопротивления среды**

#### **Задача 1. Вычисление характеристик полета**

Будучи брошенным, под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ , тело летит без учета сопротивления воздуха по параболе и через некоторое время падает на землю. Выяснить, как зависит дальность полета  $l$ , высота верхней точки траектории  $h$ , время достижения верхней точки траектории  $\tilde{t}$  от угла броска  $\alpha$ .

#### Решение

Вычислим параметры  $l$ ,  $\tilde{t}$ ,  $h$ , т. е. типичные для данной задачи характеристики по формулам (2) – (4).

На рабочем листе Excel расположим данные. Отметим, что величина угла броска  $\alpha$  должна быть указана в радианах:

C9	fx = (\$B\$9^2*SIN(2*A9*3,14/180))/9,81	
	A	B
1	задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту	
2	исходные данные	
3	начальная скорость	60
4	угол бросания	15
5	шаг увеличения угла	15
6	расчеты	
7	промежуточные расчеты	результат
8	угол бросания	начальная скорость
9	0	60

Получим:

A10	fx = A9+\$B\$5	
	Имя	A
4	угол бросания	15
5	шаг увеличения угла	15
6	расчеты	
7	промежуточные расчеты	результат
8	угол бросания	начальная скорость
9	0	60
10	15	183,4018725
11	30	317,7100328
12	45	366,9723607
13	60	318,0021285

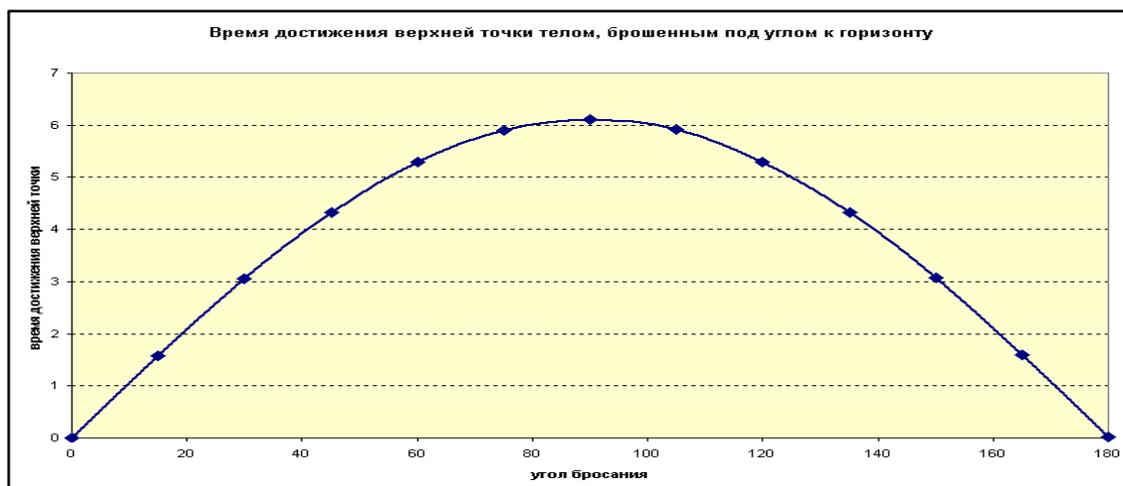
Изобразим результат графически:



Аналогично вычислим  $\tilde{t}$ ,  $h$ . Время достижения верхней точки траектории  $\tilde{t}$

	А	В	С
1	задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту		
2	исходные данные		
3	начальная скорость	60	
4	угол бросания	15	
5	шаг увеличения угла	15	
6	расчеты		
7	промежуточные расчеты		результат
8	угол бросания	начальная скорость	время достижения верхней точки
9	0	60	0
10	15	60	1,582206997
11	30	60	3,056697875
12	45	60	4,323089793
13	60	60	5,295167214
14	75	60	5,906751436
15	90	60	6,116206012
16	105	60	5,909271344
17	120	60	5,300035474
18	135	60	4,329974976
19	150	60	3,065131242
20	165	60	1,591614405
21	180	60	0,009740996

Изобразим результат графически:



## Высота верхней точки траектории $h$ :

	А	В	С
1	задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту		
2	исходные данные		
3	начальная скорость	60	
4	угол бросания	15	
5	шаг увеличения угла	15	
6	расчеты		
7	промежуточные расчеты		результат
8	угол бросания	начальная скорость	высота верхней точки
9	0	60	0
10	15	60	24,55814782
11	30	60	91,65877266
12	45	60	183,3401235
13	60	60	275,060587
14	75	60	342,2680799
15	90	60	366,9722444
16	105	60	342,5601754
17	120	60	275,5665888
18	135	60	183,9245831
19	150	60	92,16523968
20	165	60	24,85104923
21	180	60	0,000930842

Изобразим результат графически:



## Задача 2. Построение траектории полета при горизонтальном бросании мяча с высоты без учета сопротивления воздуха

Построить траекторию полета мяча, если он брошен с высоты с начальной горизонтальной скоростью  $v_x^{(0)} = 20 \frac{м}{сек}$ .

### Решение

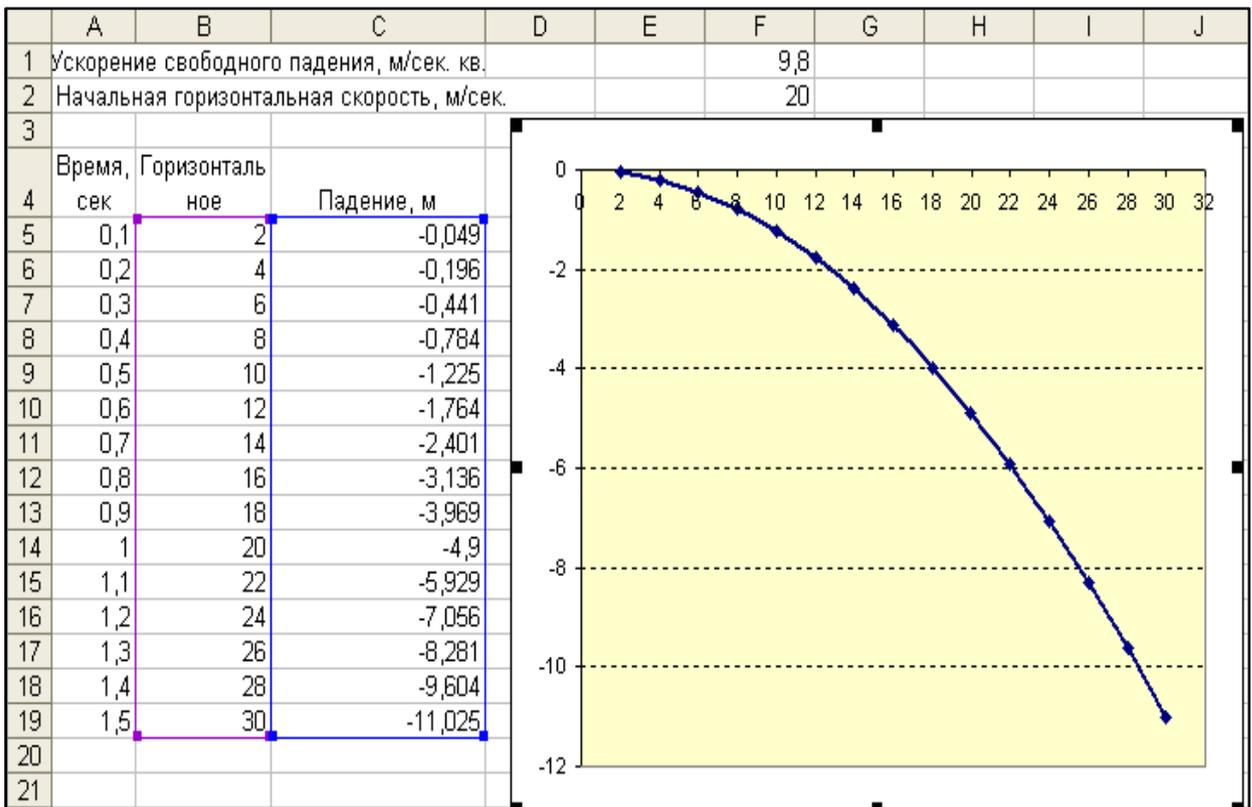
Начальная горизонтальная скорость задана:  $v_x^{(0)} = 20 \frac{м}{сек}$ . Начальная

вертикальная скорость:  $v_y^{(0)} = 0$ .

Тогда горизонтальное смещение  $x = v_x^{(0)} \cdot t$ , а падение (вертикальное смещение) вычисляется по формуле  $y = v_y^{(0)}t - \frac{gt^2}{2} = -\frac{gt^2}{2}$ ;

При построении траектории следует учитывать зависимость падения от горизонтального смещения.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ускорение свободного падения, м/сек. кв.						9,8
2	Начальная горизонтальная скорость, м/сек.						20
3							
4	Время, сек	Горизонтальное	Падение, м				
5	0,1	=F\$2*A5	=-1*F\$1*(A5^2)/2				
6	0,2	=F\$2*A6	=-1*F\$1*(A6^2)/3				
7	0,3	=F\$2*A7	=-1*F\$1*(A7^2)/4				
8	0,4	=F\$2*A8	=-1*F\$1*(A8^2)/5				
9	0,5	=F\$2*A9	=-1*F\$1*(A9^2)/6				
10	0,6	=F\$2*A10	=-1*F\$1*(A10^2)/7				
11	0,7	=F\$2*A11	=-1*F\$1*(A11^2)/8				
12	0,8	=F\$2*A12	=-1*F\$1*(A12^2)/9				
13	0,9	=F\$2*A13	=-1*F\$1*(A13^2)/10				
14	1	=F\$2*A14	=-1*F\$1*(A14^2)/11				
15	1,1	=F\$2*A15	=-1*F\$1*(A15^2)/12				
16	1,2	=F\$2*A16	=-1*F\$1*(A16^2)/13				
17	1,3	=F\$2*A17	=-1*F\$1*(A17^2)/14				
18	1,4	=F\$2*A18	=-1*F\$1*(A18^2)/15				
19	1,5	=F\$2*A19	=-1*F\$1*(A19^2)/16				
20							



### Практическое задание

Построить траекторию полета мяча, если он брошен с высоты под углом  $\alpha = 15^\circ$  с начальной скоростью  $v^{(0)} = 30 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ .

### Задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту с учетом сопротивления среды

При большой начальной скорости полета тела сопротивление воздуха может значительно изменить движение.

При учете силы сопротивления:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = k_1 \vec{v} + k_2 \vec{v}^2$$

получим уравнения движения в переменных  $v_x, v_y$  :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_1 + k_2 \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}}{m} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k_1 + k_2 \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}}{m} v_y \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку представляет интерес и траектория движения, дополним систему (7) еще двумя уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (8)$$

Решая системы (7) и (8), получим четыре функции:

$$v_x(t), \quad v_y(t), \quad x(t), \quad y(t).$$

Системы (7) и (8) описывают движение с учетом сопротивления среды.

### Обезразмеривание задачи

Обезразмеривание заключается в переходе от абсолютных значений – расстояний, скоростей, времен ( $s, V, t$ ) и т.д. – к относительным, причем отношения строятся к величинам типичным для данного движения. В рассматриваемой ситуации это хорошо просматривается. В задаче без сопротивления воздуха мы имеем значения  $l, h, \tilde{t}$ , полученные по формулам (2)-(4). Сопротивление воздуха изменит характер движения. Возьмем значения  $l, h, \tilde{t}$  в качестве типичных для данной задачи и введем в качестве переменных величины

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{t}{\tilde{t}}.$$

$X, Y, \tau$  – это безразмерные расстояния по осям и безразмерное время. Тогда при отсутствии сопротивления воздуха они будут изменяться в диапазоне от 0 до 1, а в задаче с учетом сопротивления отличия их

максимальных значений от единицы ясно характеризуют влияние этого сопротивления.

Введем безразмерные переменные для скоростей. Их естественно ввести, соотнося проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  с начальной скоростью  $v_0$ :

$$V_x = \frac{v_x}{v_0}, \quad V_y = \frac{v_y}{v_0}.$$

Покажем, как перейти к безразмерным переменным в уравнениях системы (7) на примере второго уравнения этой системы.

Имеем:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d(v_0 V_y)}{d(\tilde{t} \cdot \tau)} = \frac{v_0}{\tilde{t}} \cdot \frac{dV_y}{d\tau}, \quad \text{так как постоянный}$$

множитель можно вынести за знак производной.

Подставляя это в уравнение (7), получаем:

$$\frac{v_0}{\tilde{t}} \cdot \frac{dV_y}{d\tau} = -g - \frac{k_1 + k_2 \sqrt{(v_0^2 V_x^2 + v_0^2 V_y^2)}}{m} v_0 V_y$$

Или

$$\frac{dV_y}{d\tau} = -\frac{\tilde{t} g}{v_0} - \frac{\tilde{t}}{v_0} \cdot \frac{k_1 + k_2 \sqrt{(v_0^2 V_x^2 + v_0^2 V_y^2)}}{m} v_0 V_y.$$

Подставляя  $\tilde{t} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ , получаем:

$$\frac{dV_y}{d\tau} = -\sin \alpha - \underline{a} \sin \alpha \cdot V_y - \underline{b} \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{(V_x^2 + V_y^2)} \cdot V_y$$

где  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  -- безразмерные комбинации параметров, входящих в исходные

уравнения,

$$\underline{a} = \frac{k_1 v_0}{mg}, \quad \underline{b} = \frac{k_2 v_0^2}{mg}.$$

Аналогично выполним обезразмеривание во всех уравнениях систем (7), (8) и получим:

$$\frac{dV_x}{d\tau} = -\underline{a} \cdot \sin \alpha \cdot V_x - \underline{b} \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{(V_x^2 + V_y^2)} \cdot V_x,$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{V_x}{2 \cos \alpha}, \tag{9}$$

$$\frac{dV_y}{d\tau} = -\sin \alpha - \underline{a} \cdot \sin \alpha \cdot V_y - \underline{b} \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{(V_x^2 + V_y^2)} \cdot V_y,$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{2V_y}{\sin \alpha}.$$

Начальные условия для безразмерных переменных имеют вид:

$$V_x(0) = \cos \alpha, \quad V_y(0) = \sin \alpha, \quad X(0) = 0, \quad Y(0) = 0$$

### Задача 3. Построение траектории полета при бросании под углом с учетом сопротивления

Рассмотрим полет чугунного ядра радиуса  $R=0,1$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 60$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к поверхности Земли. Определим, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется. Будем решать обезразмеренные уравнения (9), чтобы сократить число параметров. Вычислим значения параметров  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  с помощью формул (10), после чего решим систему дифференциальных уравнений (9) с начальными условиями (11) методом Рунге-Кутты. Учтем, что плотность чугуна  $\rho_{\text{чуг}} = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

$$\underline{a} = \frac{k_1 v_0}{mg} = \frac{6\pi\mu R v_0}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{чуг}} g} = \frac{9\mu v_0}{2r^2 \rho_{\text{чуг}} g} \approx 0,0063,$$

$$\underline{b} = \frac{k_2 v_0^2}{mg} = \frac{\frac{1}{2} C \pi R^2 \rho_{\text{возд}} v_0^2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{чуг}} g} = \frac{3C \rho_{\text{возд}} v_0^2}{8R \rho_{\text{чуг}} g} \approx 0,034.$$

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ DELPHI

Исследование задачи при произвольных значениях  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  выполним с помощью программы на языке Delphi, чтобы составить ясное представление о влиянии линейной и квадратичной частей силы сопротивления на изучаемое движение.

Расчеты провести с шагом интегрирования 0.1, и получить траектории движения для трех вариантов исследования:

1. при учете только линейной части силы сопротивления  $a$ ,
2. при учете только квадратичной части силы сопротивления  $b$ ,
3. при учете обеих составляющих силы сопротивления  $a$  и  $b$ .

Расчеты надо проводить до тех пор, пока ядро не достигнет земли, т.е. пока значение  $Y$  не станет равным 0 (в программе это цикл `While Y[4] >= 0 Do`

Для вариантов самостоятельного выполнения дается таблица:

Таблица 5.

Таблица плотности разных веществ

<i>Вещество</i>	<i><math>\rho</math>, кг/м<sup>3</sup></i>	<i>Вещество</i>	<i><math>\rho</math>, кг/м<sup>3</sup></i>
Воздух	1,29	Олово	$7,3 \cdot 10^3$
Резина	$1,2 \cdot 10^3$	Титан	$4,5 \cdot 10^3$
Алюминий	$2,7 \cdot 10^3$	Сталь	$7,7 \cdot 10^3$
Серебро	$10,5 \cdot 10^3$	Никель	$8,8 \cdot 10^3$
Чугун	$7,8 \cdot 10^3$	Золото	$19,3 \cdot 10^3$
Кварцевое стекло	$2,21 \cdot 10^3$	Медь	$8,89 \cdot 10^3$

### Реализация программы

```
unit Unit1;
```

```
interface
```

```
uses Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
    Dialogs, Buttons, StdCtrls;
```

```
Type
```

```
G = Array[1..4] Of Real;
```

```
 TForm1 = class(TForm)
```

```
 Button1: TButton;
```

```
 CheckBox1: TCheckBox;
```

```
 CheckBox2: TCheckBox;
```

```
 Label1: TLabel;
```

```
 Label2: TLabel;
```

```
 Edit1: TEdit;
```

```
 Edit2: TEdit;
```

```
 Button2: TButton;
```

```
 BitBtn1: TBitBtn;
```

```
 Label3: TLabel;
```

```
 Edit3: TEdit;
```

```
 Procedure grafun(xgmin,xgmax,ygmin,ygmax: integer);
```

```
 procedure Button1Click(Sender: TObject);
```

```
 procedure Button2Click(Sender: TObject);
```

```
 private
```

```
 { Private declarations }
```

```
 public
```

```
 { Public declarations }
```

```
 end;
```

```
 Const //A=0.010636; B=0.251299; // (параметры модели)
```

```
 Alpha = PI/18; // (угол - параметр модели)
```

```
 H=0.001; Hpr=0.1; //(шаг интегрирования и шаг вывода результатов)
```

```
 var
```

```
 Form1: TForm1;
```

```
 N, I, J, M, L, K, Angl: Integer;
```

```
 Y0, Y : G;
```

```
 X0, X, Xpr, A1, B1, Cosinus, Sinus : Real;
```

```
 LS : String;
```

```
 A, B, Alpha:Real;
```

```
 implementation
```

```
 {$R *.dfm}
```

```
 Function Ff (I:Integer;X:Real;Y:G):Real; {описание правых частей
дифференциальных уравнений}
```

```
 begin
```

Case I Of

- 1: Ff:=-A1\*Sinus\*Y[1]-B1\*Sinus\*Sqrt(Sqr(Y[1])+Sqr(Y[2]))\*Y[1];
- 2: Ff:=-Sinus-A1\*Sinus\*Y[2]-B1\*Sinus\*Sqrt(Sqr(Y[1])+Sqr(Y[2]))\*Y[2];
- 3: Ff:=Y[1]/(2\*Cosinus);
- 4: Ff:=2\*Y[2]/Sinus

End

End;

Procedure Right(X : Real; Y : G; Var F : G) ; {вычисление правых частей дифференциальных уравнений}

var I : Integer;

Begin

For I := 1 To N Do F[I]:=Ff(I, X, Y)

End;

Procedure Runge\_Kut (N: Integer; Var X: Real; Y0: G; Var Y: G; H: Real);  
//(метод Рунге-Кутты четвертого порядка)

Var I : Integer; Z, K1, K2, K3, K4 : G;

Begin

Right(X, Y0, K1);

X:=X+H/2;

For I := 1 To N Do Z[I]:=Y0[I]+H\*K1[I]/2;

Right(X,Z,K2);

For I := 1 To N Do Z[I]:=Y0[I]+H\*K2[I]/2;

Right(X,Z,K3);

X:=X+H/2;

For I := 1 To N Do Z[I]:=Y0[I]+H\*K3[I];

Right(X,Z,K4);

For I := 1 To N Do Y[I]:=Y0[I]+H\*(K1[I]+2\*K2[I]+2\*K3[I]+K4[I])/6;

End;

Procedure TForm1.grafun(xgmin,xgmax,ygmin,ygmax: integer);

var SColor:array [1..4] of LongInt;

i,j,k:Integer;

begin

SColor[1]:=Clred;

SColor[2]:=clGreen;

SColor[3]:=clNavy;

```

SColor[4]:=clBlue;
A1:=0;
B1:=0;
If CheckBox1.Checked then A1:=A;
If CheckBox2.Checked then B1:=B;
L:=1;
Sinus:=Sin(Alpha);
Cosinus:= Cos(Alpha);
  Form1.Canvas.Font.Size:=14;
  Form1.Canvas.Font.Style:=[fsbold];
  Form1.Canvas.Brush.Color := clWhite;
  Form1.Canvas.FillRect(rect(xgmin-30, ygmin-30, xgmax+40, ygmax+30));

//оси
  Form1.Canvas.Pen.Color:=clBlack;
  Form1.Canvas.MoveTo(xgmin,ygmax);
  Form1.Canvas.LineTo(xgmax, ygmax);
  Form1.Canvas.MoveTo(xgmin, ygmin);
  Form1.Canvas.LineTo(xgmin, ygmax);

//стрелки на осях
  Form1.Canvas.Brush.Color := clBlack;
  Form1.Canvas.Polygon([Point(xv-5,ygmin-5),Point(xv,ygmin-10),Point(xv+5,ygmin-5)]);
  Form1.Canvas.Polygon([Point(xgmin-5,ygmin),Point(xgmin,ygmin7),Point(xgmin+5,ygmin)]);
  Form1.Canvas.Polygon([Point(xgmax,ygmax5),Point(xgmax+7,ygmax),Point(xgmax,ygmax+5)]);
Form1.Canvas.Brush.Color := clWhite;
Form1.Canvas.TextOut(xgmin-20,ygmin-25, 'Y');
Form1.Canvas.TextOut(xgmax,ygmax+5, 'X');

//засечки оси X
  Form1.Canvas.Pen.Width:=2;
  Form1.Canvas.MoveTo(xgmax-20, ygmax-5);// 1
  Form1.Canvas.LineTo(xgmax-20, ygmax+5); // 1
  Form1.Canvas.MoveTo((xgmax-xgmin+25)div 2, ygmax-5);// 0.5
  Form1.Canvas.LineTo((xgmax-xgmin+25)div 2, ygmax+5); // 0.5
Form1.Canvas.Font.Size:=12;
Form1.Canvas.Font.Style:=[];
Form1.Canvas.TextOut(xgmax-30, ygmax+5, '1');//надпись оси x
Form1.Canvas.TextOut((xgmax-xgmin)div 2, ygmax+5, '0.5');//надпись оси x
Form1.Canvas.TextOut(xgmin-10, ygmax+5, '0');//надпись оси x
Form1.Canvas.Pen.Width:=2;
Form1.Canvas.MoveTo(xgmin-5, ygmin+20);// 1

```

```

Form1.Canvas.LineTo(xgmin+5, ygmin+20); // 1
Form1.Canvas.TextOut(xgmin-15, ygmin+10, '1'); //надпись оси y

k:=(ygmax-ygmin-20) div 5;

for i:=1 to 4 do
//засечки и надписи оси y
begin

    Form1.Canvas.MoveTo(xgmin-5, ygmin+20+k*i);// 1
    Form1.Canvas.LineTo(xgmin+5, ygmin+20+k*i); // 1
    Form1.Canvas.TextOut(xgmin-27, ygmin+10+k*i, '0.'+IntToStr(10-2*i));

end;

While L<5 Do

Begin
    N := 4; //(Количество уравнений в системе)
    X0:=0;
    Y0[1]:=Cosinus; //(Начальные условия}
    Y0[2]:=Sinus;
    Y0[3]:=0;
    Y0[4]:=0;
    Form1.Canvas.Pen.Color:=SColor[L];
    X:=X0;
    Y[4]:=Y0[4];

    While Y[4]>=0 Do

        Begin

            Runge_Kut(N, X, Y0, Y, H);

            Y0:=Y;

            Form1.Canvas.Pixels[Abs(Trunc(xgmin+Y0[3]*(xgmax-50))),ygmax-
                Abs(Trunc(Y0[4]*(ygmax-50)))]:=SColor[L];

        End;

    Form1.Canvas.MoveTo(xgmax-100,50+20*(L-1));
    Form1.Canvas.LineTo(xgmax-60,50+20*(L-1));
    Form1.Canvas.TextOut(xgmax-50,40+20*(L-1),'L = ');
    Form1.Canvas.TextOut(xgmax-20, 40+20*(L-1), intToStr(L));
    B1:=B1*10;
    A1:=A1*10;
    L:=L+1;

end;

```

```
end; // конец grafun
```

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
try
```

```
  A:=StrToFloat(Edit1.Text);
```

```
  B:=StrToFloat(Edit2.Text);
```

```
  Alpha:=PI/(180/StrToInt(Edit3.Text));
```

```
  grafun(30, 500, 30,500);
```

```
except
```

```
on EConvertError do
```

```
  MessageBox(Handle,'Ошибка в записи числа!', 'ERROR', (MB_ICONERROR+  
  MB_OK));
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
Edit1.Clear;
```

```
Edit2.Clear;
```

```
Edit3.Clear;
```

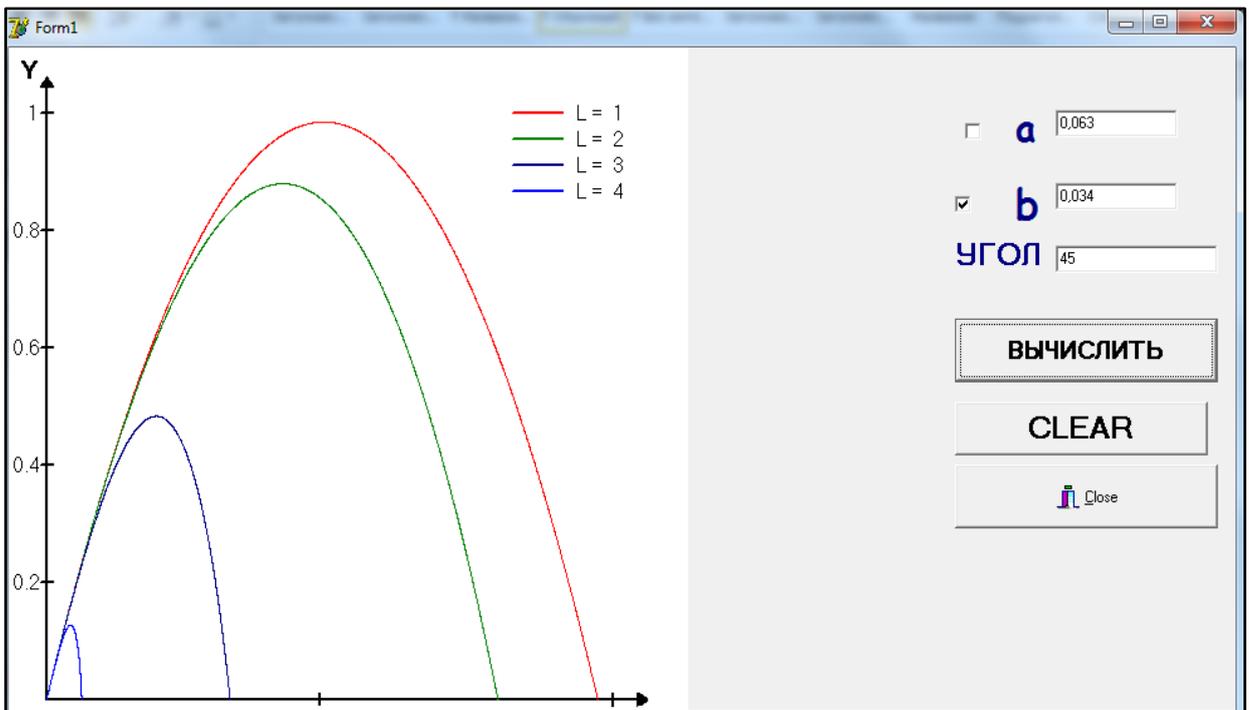
```
end;
```

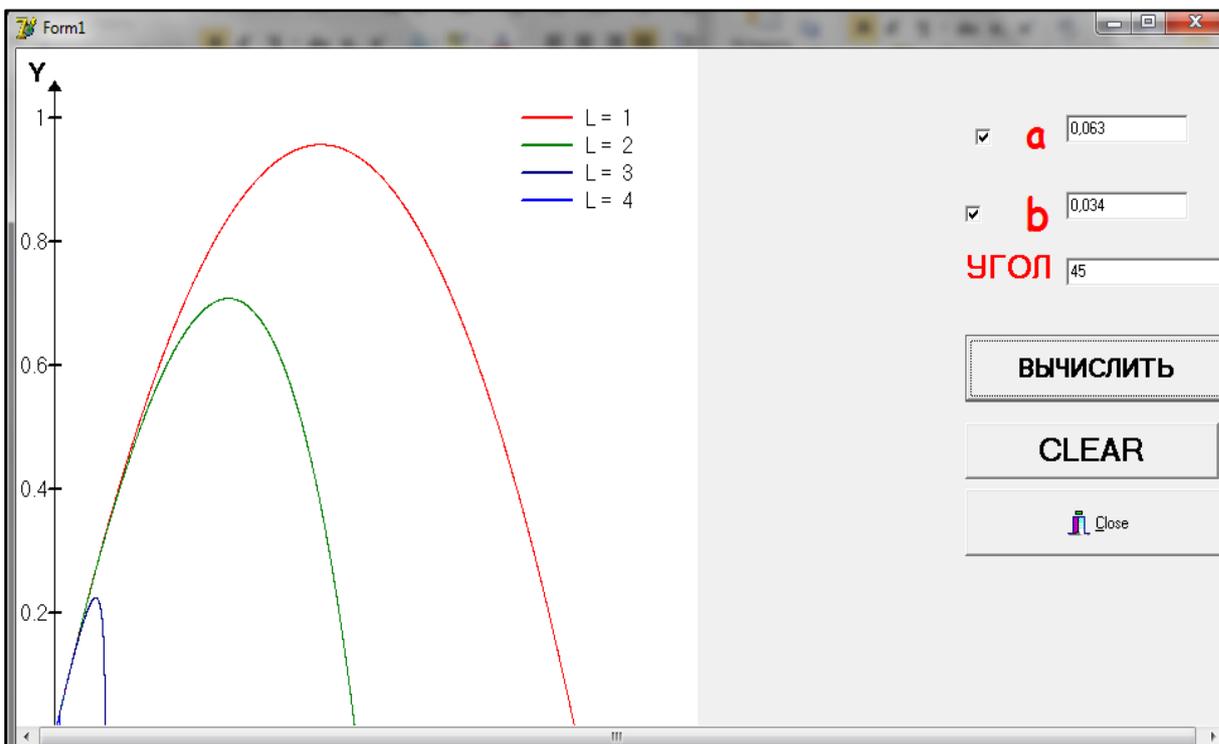
```
end.
```

На рисунках ниже показано влияние параметров  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\alpha$  на движение чугунного ядра, брошенного под углом к горизонту, при  $\underline{a}=0,063$   $\underline{b}=0,034$   $\alpha=45^\circ$

Программа выдает в графическом режиме семейство траекторий, отличающихся значениями одного из трех безразмерных параметров (в первом случае  $\underline{a}$ , характеризующего линейную часть силы сопротивления).

Можно провести общее исследование при произвольных значениях  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$ , где  $\underline{a}$  – характеризует линейную часть силы сопротивления, а  $\underline{b}$  – квадратичную часть силы сопротивления.





### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ VBA В EXCEL

Для решения задачи (3)-(5) при произвольных значениях угла  $\alpha$  и коэффициентов  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ , создадим проект средствами VBA в Excel, используя технологию визуального программирования. Проект должен иметь диалоговое окно для исследования влияния линейной (коэффициент  $\underline{a}$ ) и квадратичной (коэффициент  $\underline{b}$ ) частей силы сопротивления на изучаемое движение. Подробное описание разработки проекта содержится в учебном пособии [5]

Разработанный на VBA проект позволяет получить три графика:

1. Первый представляет траекторию движения при учете линейной части силы сопротивления  $\underline{a}$  ( $\underline{a} \neq 0$ ,  $\underline{b} = 0$ ).
2. Второй представляет траекторию движения при учете квадратичной части силы сопротивления  $\underline{b}$  ( $\underline{a} = 0$ ,  $\underline{b} \neq 0$ ).
3. Третий представляет траекторию движения при учете обеих составляющих силы сопротивления  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  ( $\underline{a} \neq 0$ ,  $\underline{b} \neq 0$ ).

Интерфейс проекта создается с помощью пользовательской формы. Для получения диалогового окна на пользовательской форме размещаются элементы управления – поля ввода и управляющие кнопки (рис.1):

1. шаг интегрирования метода Рунге-Кутта,
2. угол бросания  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 90^\circ)$ ,
3. входные данные  $a$ ,  $b$  для решения задачи в трех вариантах:
  - вариант1 –  $a(1) \neq 0$ ,  $b(1) = 0$ , (причем установленное в поле ввода нулевое значение не подлежит изменению, т. е. для текста ввода в свойство Enabled установлено False),
  - вариант2 –  $a(2) = 0$ ,  $b(2) \neq 0$ ,
  - вариант3 –  $a(3) \neq 0$ ,  $b(3) \neq 0$ ,
4. управляющие кнопки «Вычислить», «Очистить», «Заккрыть».

Диалоговое окно решения задачи:

The dialog box 'UserForm1' contains the following data:

Parameter	Value
Шаг интегрирования	0.01
Угол бросания	45
Введите коэффициенты a и b в трех вариантах	
a(1)	1
a(2)	0
a(3)	1
b(1)	0
b(2)	1
b(3)	1

Buttons: Вычислить, Очистить, Заккрыть

При нажатии на кнопку «Вычислить» на двух рабочих листах Excel будут получены результаты. На рабочем Листе 1 будет выведена таблица с результатами вычислений (рис.2):

- В столбце A – получены значения времени  $t$  с заданным шагом интегрирования.
- В столбцах B, C – значения координат траектории  $x(1)$ ,  $y(1)$ , полученных при первом варианте решения.
- В столбцах D, E – значения координат траектории  $x(2)$ ,  $y(2)$ , полученных при втором варианте решения.
- В столбцах F, G – значения координат траектории  $x(3)$ ,  $y(3)$ , полученных при третьем варианте решения.

Результаты вычислений:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	t (время)	x(1)	y(1)	x(2)	y(2)	x(3)	y(3)				
3	0	0	0	0	0	0	0				
4	0,01	0,004982	0,01983	0,004982	0,01983	0,004965	0,01976				
5	0,02	0,00993	0,03932	0,00993	0,039323	0,009861	0,039047				
6	0,03	0,014842	0,058475	0,014844	0,058482	0,014689	0,05787				
7	0,04	0,01972	0,077295	0,019724	0,077312	0,019452	0,076236				
8	0,05	0,024563	0,095783	0,024572	0,095816	0,02415	0,094156				
9	0,06	0,029373	0,113941	0,029387	0,113998	0,028785	0,111637				
10	0,07	0,034148	0,131773	0,034171	0,131861	0,033359	0,128687				
11	0,08	0,03889	0,149279	0,038924	0,149409	0,037872	0,145314				
12	0,09	0,043599	0,166463	0,043646	0,166645	0,042326	0,161525				
13	0,1	0,048274	0,183327	0,048339	0,183573	0,046723	0,177327				
14	0,11	0,052916	0,199872	0,053002	0,200196	0,051063	0,192728				
15	0,12	0,057526	0,216102	0,057636	0,216516	0,055348	0,207734				
16	0,13	0,062103	0,232018	0,062242	0,232537	0,059579	0,222351				
17	0,14	0,066648	0,247623	0,066682	0,248261	0,063757	0,236587				
18	0,15	0,071161	0,262918	0,071137	0,263693	0,067883	0,250447				
19	0,16	0,075642	0,277907	0,075894	0,278833	0,071958	0,263937				
20	0,17	0,080092	0,292591	0,080391	0,293686	0,075983	0,277064				
21	0,18	0,08451	0,306971	0,084863	0,308253	0,079959	0,289833				
22	0,19	0,088897	0,321052	0,089308	0,322538	0,083888	0,302248				
23	0,2	0,093253	0,334834	0,093729	0,336542	0,087769	0,314317				
24	0,21	0,097579	0,348319	0,098125	0,350269	0,091605	0,326044				
25	0,22	0,101874	0,36151	0,102496	0,36372	0,095395	0,337433				

На рабочем Листе 2 в Excel будут представлены три графика с траекториями, соответствующими трем вариантам решения (рис.3). Для построения графиков траекторий необходимо создать макросы `grafic1`, `grafic2`, `grafic3` (подробное описание разработки проекта содержится в учебном пособии [5]).

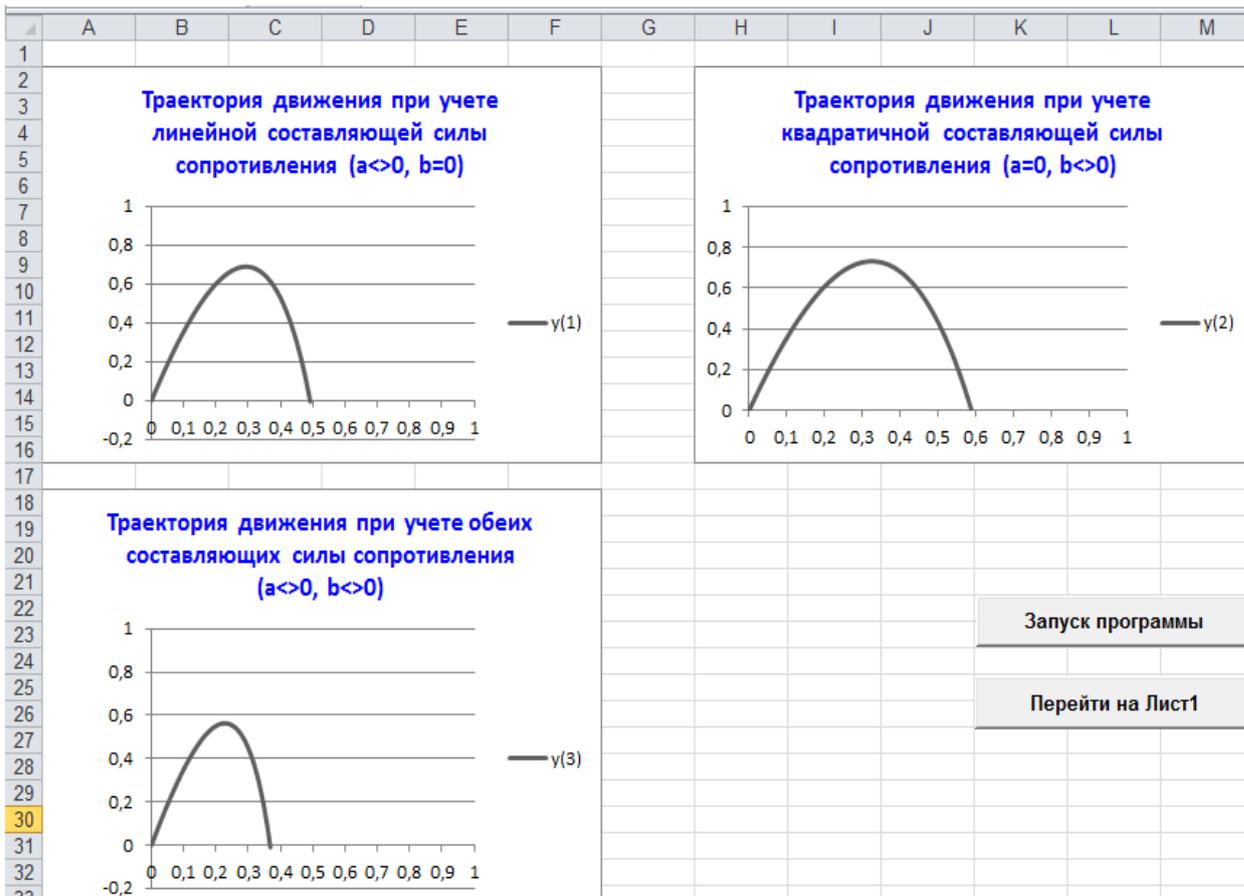
Макрос построения диаграммы создается для конкретного диапазона данных. При изменении исходных данных, диапазон данных, по которому строится диаграмма, тоже меняется. Для того чтобы перестраивать диаграмму при изменении диапазона, в общей части (General) модуля макросов необходимо описать глобальную переменную `r` типа `Range: Public r As Range`

Ссылка на диапазон, по которому будет строиться диаграмма, устанавливается в модуле формы в процедуре `CommandButton1_Click`:

```
Set r = Sheets("Лист 1").Range("B2:" + s(1))
r.Select (для первого графического объекта).
```

Для остальных графических объектов ссылки на диапазоны устанавливаются аналогично. В макросах для `SetSourceData` также необходимо установить ссылку на соответствующий диапазон: `ActiveChart.SetSourceData Source:=r`

## Графики с траекториями движения:



### Код модуля формы:

Const pi = 3.14

Dim s(1 To 3) As String

Dim a, b, C, vx, vy, dt, t As Single

Dim y0(0 To 3), y(0 To 3) As Single

Dim pa(1 To 3), pb(1 To 3) As Single

Dim p1, i, j, m, n, L, nom As Integer

' Ff - функция вычисления правых частей диф. уравнений системы (3)

Function Ff(i, y As Variant) As Single

Select Case i

Case 0 ' vx

Ff = -a \* Sin(C) \* y(0) - b \* Sin(C) \* (y(0) ^ 2 + y(1) ^ 2) ^ (1 / 2) \* y(0)

Case 1 ' vy

$$Ff = -\sin(C) - a * \sin(C) * y(1) - b * \sin(C) * (y(0) ^ 2 + y(1) ^ 2) ^ (1 / 2) * y(1)$$

Case 2 ' x

$$Ff = y(0) / (2 * \cos(C))$$

Case 3 ' y

$$Ff = 2 * y(1) / \sin(C)$$

End Select

End Function ' конец Ff

*' right - вычисление набора значений правой части*

Sub right(y, F As Variant)

For j = 0 To n - 1

$$F(j) = Ff(j, y)$$

Next

End Sub ' конец right

*' rk4 - метод Рунге-Кутты четвертого порядка*

Sub rk4(dt, y0, y As Variant)

Dim z(0 To 3), k1(0 To 3), k2(0 To 3), k3(0 To 3), k4(0 To 3) As Single

Call right(y0, k1)

For i = 0 To n - 1

$$z(i) = y0(i) + k1(i) * dt / 2$$

Next

Call right(z, k2)

For i = 0 To n - 1

$$z(i) = y0(i) + k2(i) * dt / 2$$

Next

Call right(z, k3)

For i = 0 To n - 1

$$z(i) = y0(i) + k3(i) * dt$$

Next

Call right(z, k4)

For i = 0 To n - 1

$$y(i) = y0(i) + (1 / 6) * dt * (k1(i) + 2 * k2(i) + 2 * k3(i) + k4(i))$$

```

Next
End Sub 'конец rk4
' Процедура инициализации формы
Private Sub userform_initialize()
TextBox4.Text = 0
TextBox5.Text = 0
TextBox4.Enabled = False
TextBox5.Enabled = False
Sheets("Лист 1").Activate
End Sub
' Процедура обработки события нажатия кнопки «Вычислить»
Private Sub CommandButton1_Click()
C = Val(TextBox1.Text) * pi / 180
dt = Val(TextBox2.Text)
pa(1) = Val(TextBox3.Text)
pb(1) = Val(TextBox4.Text)
pa(2) = Val(TextBox5.Text)
pb(2) = Val(TextBox6.Text)
pa(3) = Val(TextBox7.Text)
pb(3) = Val(TextBox8.Text)
n = 4: m = 1: x = 0
For L = 1 To 3 ' начало цикла по номерам вариантов
a = pa(L): b = pb(L)
y0(0) = Cos(C): y0(1) = Sin(C): y0(2) = 0: y0(3) = 0: t = 0
Cells(3, L + m).Activate
ActiveCell.Value = y0(2)
ActiveCell.Offset(0, 1).Value = y0(3)
If L = 1 Then ActiveCell.Offset(0, -1).Value = t
ActiveCell.Offset(1, 0).Activate
y(3) = y0(3)
Do While y(3) >= 0 ' начало цикла расчетов пока y >= 0
t = t + dt

```

```

Call rk4(dt, y0, y):
For i = 0 To n - 1: y0(i) = y(i): Next
ActiveCell.Value = y(2)
ActiveCell.Offset(0, 1).Value = y(3)
If L = 1 Then
ActiveCell.Offset(0, -1).Value = t
End If
ActiveCell.Offset(1, 0).Activate
Loop      ' конец цикла пока
' Запоминаем адрес правого нижнего угла каждого диапазона,
' по которым будут строиться диаграммы
s(L) = ActiveCell.Offset(-1, 1).Address(rowabsolute:=False,
columnabsolute:=False)
m = m + 1
Next L    ' конец цикла по вариантам
' Устанавливаем ссылку на диапазон
Set r = Sheets("Лист 1").Range("B2:" + s(1))
' Выделяем диапазон с результатами вычислений x(1), y(1)
r.Select
Call Grafic1
Sheets("Лист 1").Select
' Устанавливаем ссылку и выделяем диапазон
' с результатами вычислений x(2), y(2)
Set r = Sheets("Лист 1").Range("D2:" + s(2))
r.Select
Call Grafic2
Sheets("Лист 1").Select
' Устанавливаем ссылку и выделяем диапазон
' с результатами вычислений x(3), y(3)
Set r = Sheets("Лист 1").Range("F2:" + s(3))
r.Select
Call Grafic3
End Sub  ' конец CommandButton1_Click()

```

*' Процедура обработки события нажатия кнопки «Очистить»*

```
Private Sub CommandButton3_Click()  
Sheets("Лист 1").Select  
nom = Cells(3, 1).CurrentRegion.Rows.Count  
Range(Cells(3, 1), Cells(nom + 1, 7)).Clear  
With Worksheets("Лист 2")  
If .ChartObjects.Count > 0 Then  
    .ChartObjects.Delete  
End If  
End With  
End Sub 'конец CommandButton3_Click()
```

*' Процедура обработки события нажатия кнопки «Заккрыть»*

```
Private Sub CommandButton2_Click()  
UserForm1.Hide  
End Sub 'конец CommandButton2_Click()
```

#### **Лабораторная работа №4**

1. Рассмотреть полет чугунного ядра радиуса  $R=0,3$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 50$  м/с под углом  $\alpha = 10^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
2. Рассмотреть полет серебряного ядра радиуса  $R=0,5$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 40$  м/с под углом  $\alpha = 35^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
3. Рассмотреть полет кварцевого ядра радиуса  $R=0,3$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 30$  м/с под углом  $\alpha = 15^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
4. Рассмотреть полет титанового ядра радиуса  $R=0,1$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 40$  м/с под углом  $\alpha = 65^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.

5. Рассмотреть полет стального ядра радиуса  $R=0,3$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
6. Рассмотреть полет медного ядра радиуса  $R=0,8$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 70$  м/с под углом  $\alpha = 75^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
7. Рассмотреть полет резинового ядра радиуса  $R=0,7$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 60$  м/с под углом  $\alpha = 25^\circ$  поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
8. Рассмотреть полет никелевого ядра радиуса  $R=0,1$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 80$  м/с под углом  $\alpha = 65^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
9. Рассмотреть полет чугунного ядра радиуса  $R=0,2$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 40$  м/с под углом  $\alpha = 25^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
10. Рассмотреть полет золотого ядра радиуса  $R=0,1$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
11. Рассмотреть полет оловянного ядра радиуса  $R=0,5$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 70$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
12. Рассмотреть полет стального ядра радиуса  $R=0,2$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 80$  м/с под углом  $\alpha = 75^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
13. Рассмотреть полет серебряного ядра радиуса  $R=0,4$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
14. Рассмотреть полет стального ядра радиуса  $R=0,1$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 10^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
15. Рассмотреть полет алюминиевого ядра радиуса  $R=0,6$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 80$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.

16. Рассмотреть полет оловянного ядра радиуса  $R=0,4$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 70$  м/с под углом  $\alpha = 35^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
17. Рассмотреть полет стального ядра радиуса  $R=0,4$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 80$  м/с под углом  $\alpha = 35^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
18. Рассмотреть полет серебряного ядра радиуса  $R=0,3$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 55^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
19. Рассмотреть полет золотого ядра радиуса  $R=0,2$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 15^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.
20. Рассмотреть полет алюминиевого ядра радиуса  $R=0,2$  м, выпущенного с начальной скоростью  $v_0 = 80$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к поверхности Земли. Определить, какое расстояние пролетит ядро, на какую максимальную высоту оно поднимется.

## ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ: ВЗЛЕТ РАКЕТЫ

Построим простейшую модель вертикального взлета ракеты. Приняв гипотезу, что ее масса уменьшается во время взлета по линейному закону (масса меняется со временем):  $m(t) = m_0 - \alpha \cdot t$ , причем  $m(t) \geq m_{кон}$

где  $m_0$  -- начальная масса ракеты,  $m_{кон}$  -- конечная масса (т.е. масса полезного груза, выводимого на орбиту),  $\alpha$  – расход топлива.

Это допущение согласуется с допущением о постоянной силе тяги.

В данной задаче нельзя пренебречь убыванием массы ракеты в процессе взлета – оно огромно и составляет большую часть исходной массы.

Поиск математического описания проблемы не составляет труда – в его основе все тот же второй закон Ньютона. Поскольку ракета очень быстро набирает высокую скорость, то линейной составляющей  $F_{сопр}$  можно пренебречь. Тогда  $F_{сопр} = k_2 v^2$ , и уравнение для скорости в проекции на вертикальную ось принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{тяги} - m(t)g - k_2 v^2}{m(t)} \quad (1)$$

В коэффициент  $k_2$  входит величина  $\rho$  – плотность окружающей среды, которая на «космических» высотах во много раз меньше, чем на поверхности Земли.

Заглянем в справочник: на высоте 5,5 км плотность воздуха вдвое меньше, чем у поверхности, на высоте 11 км - вчетверо и т.д. Математически зависимость плотности атмосферы от высоты хорошо передается формулой

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta h)$$

где  $b = 1,29 \cdot 10^{-4}$  ( $h$  измеряется в метрах,  $\rho_0$  - плотность вблизи поверхности Земли). Поскольку величина  $h$  меняется в ходе полета, уравнение для изменения  $h(t)$  следует добавить к уравнению (1) и записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{F_{тяги} - m(t)g - \frac{1}{2}c\rho_0 \cdot \exp(-\beta h) \cdot Sv^2(t)}{m(t)}, \\ \frac{dh}{dt} = v(t). \end{cases} \quad (2)$$

### **Задача. Изменение скорости и высоты полета ракеты от времени**

Построить график зависимости изменения скорости и высоты полета ракеты от времени.

Перед решением уравнений удобно обезразмерить переменные. Естественной характерной скоростью в данной задаче является первая космическая скорость  $v^* \approx 7,8$  км/с, при которой возможен вывод на орбиту полезного груза; характерное время - момент полной выработки горючего

$t^* = \frac{(m_0 - m_{кон})}{\alpha}$ , где  $m_{кон}$  - масса груза. Реально  $t^*$  - две-три минуты. За

характерную высоту можно взять, например,  $h^*$  - ту, на которой плотность атмосферы уменьшается в 10 раз (примерно 17 км). Последняя величина может показаться несколько произвольной (впрочем, она таковой и является), но все равно удобнее измерять расстояния в данной задаче относительно величины, равной нескольким километрам, чем в метрах в системе СИ.

Итак, введя безразмерные переменные

$$V = \frac{v}{v^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad H = \frac{h}{h^*},$$

после несложных преобразований получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{f(\tau)} \cdot [a - b \cdot f(\tau) - p \cdot \exp(-2,3026H) \cdot V^2] \\ \frac{dH}{d\tau} = eV \end{cases} \quad (3)$$

где  $f(\tau)$  - известная функция:

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - (1 - k)\tau, & \text{если } \tau \leq 1, \\ k, & \text{если } \tau > 1, \end{cases}$$

а безразмерные параметры  $a, b, p, e, k$  выражаются через исходные так:

$$a = \frac{F_{тяги} t^*}{m_0 v^*}, b = \frac{t^* g}{v^*}, p = \frac{0,5c\rho_0 S v^* t^*}{m_0}, e = \frac{v^* t^*}{h^*}, k = \frac{m_{кон}}{m_0}.$$

То, что  $f(\tau)$  определяется двумя формулами, связано с наличием двух этапов полета: до и после выработки топлива. Безразмерное время, разделяющее эти этапы -  $\tau = 1$ ; если к этому моменту безразмерная скорость  $V \geq 1$ , то первая космическая скорость достигнута, в противном случае - нет. Параметр  $a$  управляет режимом полета; если при достижении величиной  $V$  значения, равного единице, топливо еще не все выработано (т.е.  $\tau < 1$ ), можно с этого момента либо положить  $a = 0$  («выключить двигатель»), либо продолжать разгон - в зависимости от постановки задачи. Задача решается с помощью табличного процессора Excel. Для решения дифференциальных уравнений системы (3) используем метод Эйлера-Коши.

Рисунок, приведенный ниже иллюстрирует влияние изменения параметра  $a$  на динамику взлета ракеты в рамках принятых выше предположений при фиксированных значениях остальных параметров.

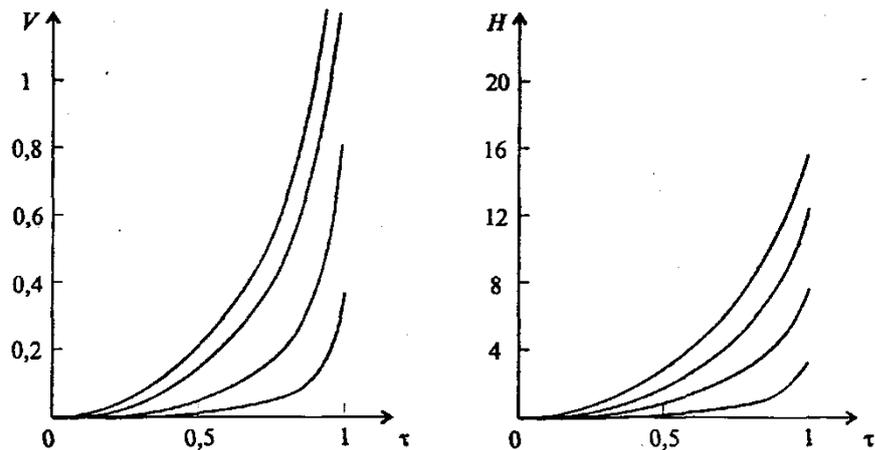


Рис 1. Графики зависимости  $V(\tau)$  и  $H(\tau)$  при  $a = 0,2$ ,  $a = 0,3$ ,  $a = 0,4$  и  $a = 0,5$   
(кривые на рисунках слева направо)

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА C++

Решим систему (3) с помощью программы на языке C++ в среде MS Visual Studio. Используем возможности графической библиотеки OpenGL в среде MS Visual Studio и GLUT (OpenGL Utility Toolkit) при визуализации результатов моделирования на языке C++. Для платформонезависимой работы с окнами используем библиотеку GLUT. Библиотека GLUT упрощает работу с OpenGL.

Для инициализации GLUT в начале программы надо вызвать **glutInit (&argc, argv)**. Для задания режима дисплея вызывается **glutInitDisplayMode (режим)**.

#### Настройка GLUT на Visual Studio 2013

Для того чтобы программы запускались на Visual Studio надо сообщить системе, что используется GLUT. Настройка выглядит следующим образом:

1. Открыть любой браузер и ввести следующую ссылку на адресной строке:  
<https://www.opengl.org/resources/libraries/glut/>

2. Распаковать то, что скачали в общую папку. Например, на рабочий стол в папку “GL”
3. Из этой папки копируем файл **glut32.dll** в системную папку (Если на компьютере x86 архитектура, то в C:\Windows\System32. А если на компьютере x64 архитектура, то в C:\Windows\SysWOW64).
4. **Glut32.lib** копируем в папку lib, куда был установлен Visual Studio. (C:\Program Files (x86)\Microsoft Visual Studio 12.0\VC\lib)
5. **glut.h** копируем в папку Include (C:\Program Files (x86)\Microsoft Visual Studio 12.0\VC\include)

### **Программа построения графиков зависимости скорости и высоты полета от времени**

Код программы:

```
#include<glut.h>
#include<cmath>
#include<iostream>
using namespace std;

double ro = 1.29;
double g = 9.8;
double dt = 0.1;
double c = 0.45;
double b = 0.00129;
double F ;
double s = 20;
double alpha;
double m0 ;
double mk ;
double m, a, v, h, t;
```

```

//Рисуем траекторию тела брошенного под
//углом к горизонту с учетом сопротивления среды
void render_scene(){
    //Очищаем текущим цветом
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);

    //Рисуем координатную систему
    //Задаем цвет рисовки красным
    glLineWidth(4.0);
    glColor3d(1.0, 1.0, 1.0);

    glBegin(GL_LINES);
    glVertex2d(0.0, 0.0);
    glVertex2d(1.4, 0.0);
    glEnd();

    glBegin(GL_LINES);
    glVertex2d(0.0, 0.0);
    glVertex2d(0.0, 1.4);
    glEnd();

    glLineWidth(1.0);
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0);
    float i;
    for (i = 0; i <= 1.3; i = i + 0.25){
        glBegin(GL_LINES);
        glVertex2f(1.0, i);
        glVertex2f(1.0, i + 0.1);
        glEnd();
    }

    for (i = 0; i <= 1.3; i = i + 0.25){
        glBegin(GL_LINES);
        glVertex2f(i,1.0);
        glVertex2f(i+0.1,1.0);
    }
}

```

```

        glEnd();
    }

    cout << "F = "; cin >> F;

    cout << "m0: "; cin >> m0;
    cout << "mk: "; cin >> mk;
    cout << "alpha: "; cin >> alpha;
    cout << "k = "; cin >> k;
    for (i = 0; i <= k; i = i + 1){
        F = F + F*0.5;
        v = 0;
        h = 0;
        t = dt;
        double tk = ((m0 - mk) / alpha);

        glColor3d(i/10.0, 1.0 - i/10.0, 1.0);
        glBegin(GL_POINTS);
        while ((t <= tk) && (v <= 1.0)){
            m = m0 - alpha*t;
            a = (F - m*g - (1 / 2)*c*ro*exp(-b*h)*s*v*v) / m;
            v = v + a*dt / 7800;
            h = h + v*dt;
            glVertex2d(t / tk, v);
            t += dt;
        }
        glEnd();

        glutSwapBuffers();
    }
}

void change_size(GLsizei w, GLsizei h){
    if (h == 0)
        h = 1;

```

```

float ratio = w*1.0 / h;
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
glLoadIdentity();

glViewport(5, 5, w, h);
gluOrtho2D(0, 1.5, 0, 1.5);
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
}

void Initialise(){
    //Цвет очистки черный
    glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
}

int main(int argc, char **argv){
    //Создание окна
    glutInit(&argc, argv);
    glutInitDisplayMode(GLUT_DOUBLE | GLUT_RGB);
    glutInitWindowSize(640, 480);
    glutInitWindowPosition(20, 20);
    glutCreateWindow("Полет ракеты");

    //Вызов обратных функций
    glutDisplayFunc(render_scene);
    glutReshapeFunc(change_size);
    Initialise();
    //initMenu();

    //Запустить оболочку GLUT
    glutMainLoop();

    return 0;
}

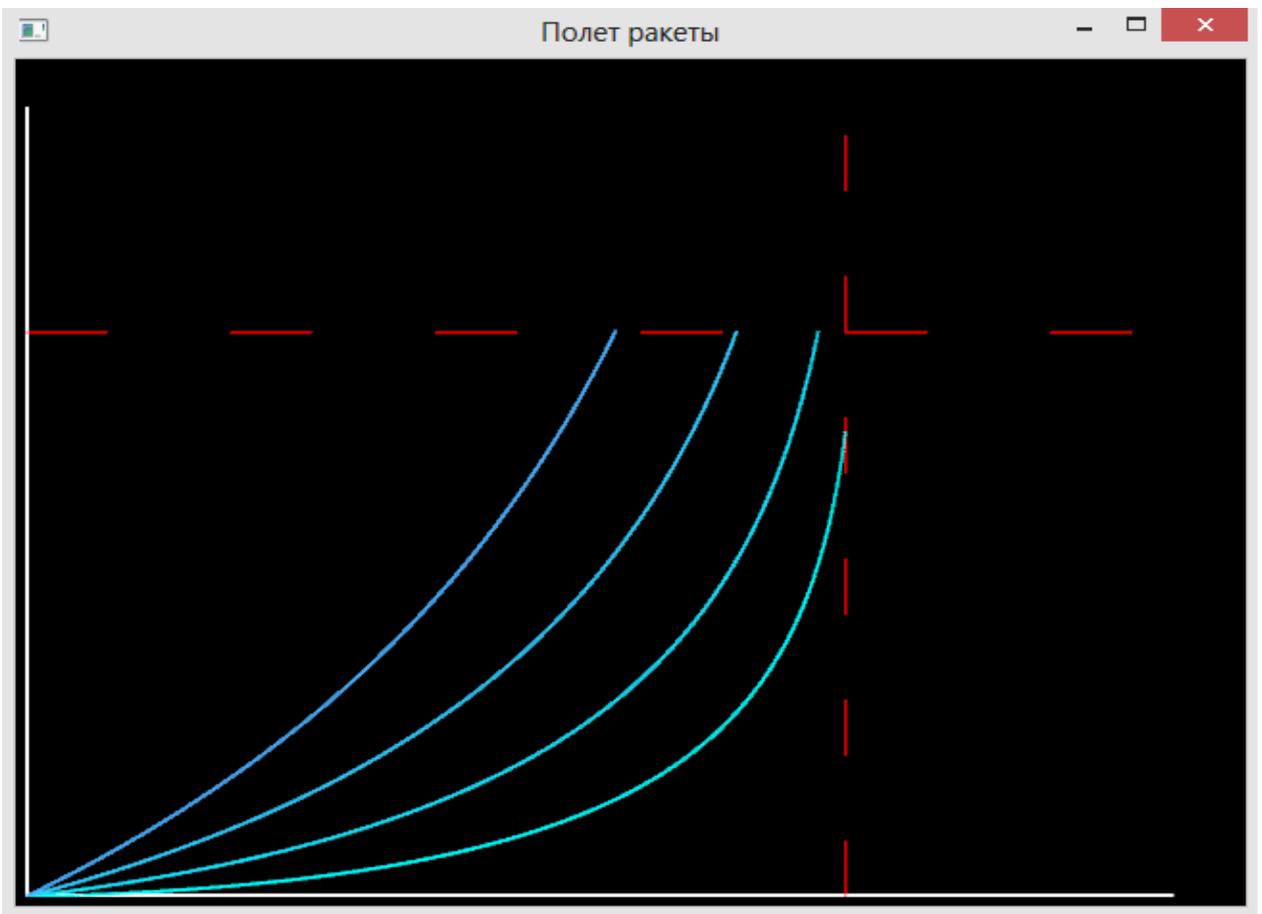
```

## Результаты работы программы

A)  $m_0 = 200000000 \text{ кг}$ ,  $m_k = 500000 \text{ кг}$ ,  $\alpha = 100000 \text{ кг/с}$ ,  $k = 3$ ,  
 $F = \{1500000000 \text{ Н}, 2250000000 \text{ Н}, 3375000000 \text{ Н}\}$

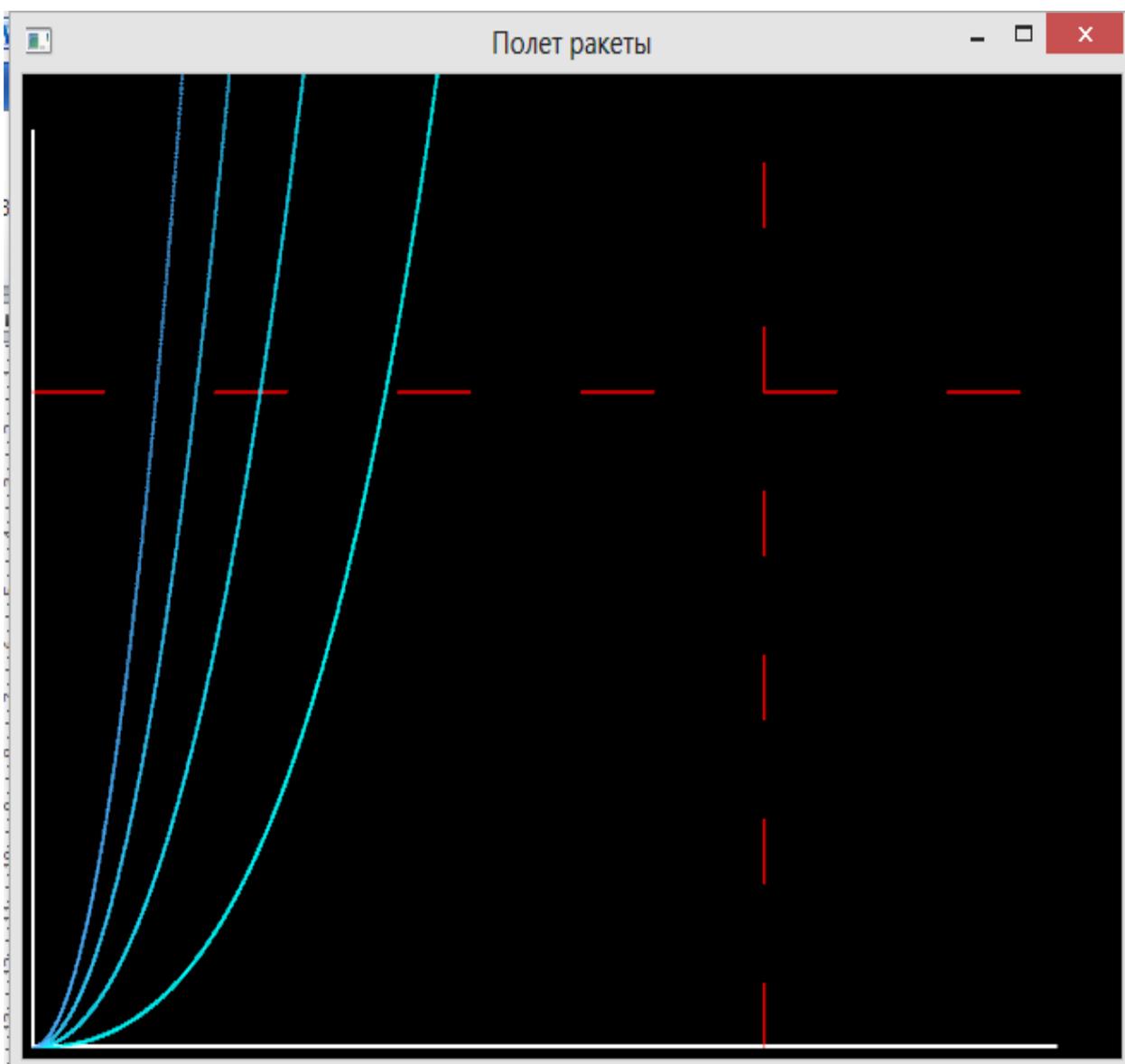
Зависимость  $v(t)$  от времени  $t$  (чем ближе график к оси  $Oy$ , тем скорость  $v$  выше)

```
C:\Users\User\Documents\Visual Studio 2013\Projects\Chapter 4\Peremennaya_...  
F = 1500000000  
m0: 200000000  
mk: 500000  
alpha: 100000  
k = 3  
_
```



Зависимость  $H(t)$  от времени  $t$

```
C:\Users\User\Documents\Visual Studio 2013\Projects\Chapter 4\Peremennaya_...  
F = 1500000000  
m0 = 200000000  
mk = 500000  
alpha = 100000  
k = 3
```



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ

Задача о движении тела в центральном поле тяготения является хорошим примером, демонстрирующим возможности использования ПК для изучения поведения объекта, подчиняющегося некоторым общим физическим законам. Процесс выведения спутника на орбиту обычно разбивается на 2 этапа. На первом этапе спутник поднимается над атмосферой практически вертикально на некоторую высоту. Затем обычно последняя ступень ракетносителя придает спутнику необходимую горизонтальную скорость, и далее он движется по инерции.

Рассмотрим модель инерционного движения космического тела (спутника) под действием силы всемирного тяготения в гравитационном поле, создаваемом телом с многократно большей массой (Землей). Будем интересоваться тем, какие траектории спутника возможны, какой должна быть его минимальная скорость вблизи поверхности Земли, чтобы он, двигаясь по круговой траектории, не упал на Землю (первая космическая скорость), какой должна быть минимальная начальная скорость спутника, чтобы получилась незамкнутая траектория и спутник «ушел» от Земли (вторая космическая скорость). В численном эксперименте можно также проверить законы Кеплера.

В основу модели мы положим закон всемирного тяготения. Будем считать, что на тело, движение которого рассматривается, действует только сила тяготения и уравнение Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

Здесь  $m$  и  $M$  — масса спутника и масса притягивающего центра,  $G$  — гравитационная постоянная,  $r$  — радиус-вектор, задающий положение спутника относительно притягивающего центра,  $a$  — ускорение спутника.

В проекциях на оси  $x$ ,  $y$  (1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -GM \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad (2)$$

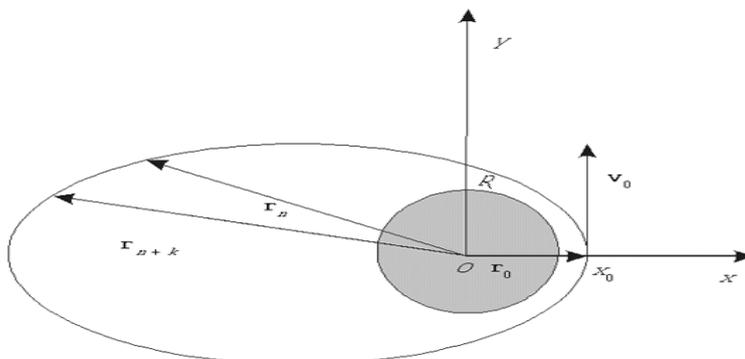


Рис.2. Система координат и возможная траектория спутника

Сведем (2) к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = -GM \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -GM \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \end{array} \right. \quad (3)$$

Движение тела под влиянием центральной силы происходит в одной плоскости, положение которой определяется векторами  $r_0$  и  $v_0$ , задающими начальное положение тела и его начальную скорость. Декартову систему координат с началом в центре тяготения и начало отсчета времени выберем так, чтобы движение происходило в плоскости  $OXY$  и в начальный момент скорость тела была перпендикулярна оси  $X$ .

Тогда начальные условия можно записать в виде:

$$t = 0: \quad x = x_0, \quad y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = v_0 \quad (4)$$

Система уравнений (3) вместе с условиями (4) полностью определяют траекторию спутника и все ее свойства.

### Численная модель.

Осуществим обезразмеривание задачи. Численный анализ задачи удобно проводить, используя в качестве единиц измерения характерные масштабы задачи. В качестве единицы длины удобно взять  $x_0$ . Если разговор идет о спутнике Земли, то эта величина имеет порядок радиуса Земли  $R$  и равняется  $R + h$ , где  $h$  — высота спутника над поверхностью Земли. Всякое расстояние теперь будет задаваться числом, которое показывает, сколько раз в нем укладывается  $x_0$ . Безразмерное  $X$  будет равняться  $x$ , измеренному в метрах, деленному на  $x_0$ , также измеренному в метрах. Единицу времени удобно построить, используя гравитационную постоянную и характеристики притягивающего центра. Из уравнений (3) легко видеть, что множитель  $GM/r^2$  имеет размерность ускорения ( $m/c^2$ ). Вместо расстояния  $r$  возьмем  $x_0$  и сформируем выражение с размерностью времени ( $c$ ):  $(GM/x_0^3)^{-1/2}$ . Его и выберем в качестве единицы времени. В качестве единицы скорости тогда естественно взять  $x_0/(GM/x_0^3)^{-1/2}$ , т.е.  $(GM/x_0)^{1/2}$ .

После обезразмеривания получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{d\tau} = V_x \\ \frac{dV_x}{d\tau} = -\frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2)^3}} \\ \frac{dY}{d\tau} = V_y \\ \frac{dV_y}{d\tau} = -\frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2)^3}} \end{array} \right. \quad (5)$$

Измеренные в этих единицах проекции ускорения определяются следующими уравнениями (здесь и далее для безразмерных физических величин использованы те же обозначения, какие использовались для соответствующих размерных величин):

$$a_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad a_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad (3)$$

а начальные условия принимают вид:

$$t = 0: \quad x = 1, \quad y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = V_0 \quad (4)$$

где  $V_0 = v_0 \cdot (x_0/GM)^{1/2}$ .

Отметим замечательное обстоятельство: в безразмерных переменных уравнения вообще не содержат параметров! Единственное, что отличает разные режимы движения друг от друга – начальные условия. Все физические величины измеряются теперь в относительных единицах и будут одинаковыми для всех систем “спутник — притягивающий центр”. Уменьшилось также число параметров задачи. Единственный безразмерный параметр  $V_0$ , который остался в задаче, показывает, как соотносятся между собой кинетическая и потенциальная энергии спутника в начальный момент.

Для нахождения в различные моменты времени проекций скорости спутника и его координат на временной оси выберем дискретные точки  $t_n$ , отстоящие друг от друга на малые интервалы  $\Delta t$ . Тогда проекции скорости в момент времени  $t_{n+1}$  будут приближенно (считаем, что ускорение на этом интервале времени не изменилось) представляться выражениями

$$V_x^{(n+1)} = V_x^{(n)} + \Delta t \cdot a_x^{(n)} \quad (5)$$

$$V_y^{(n+1)} = V_y^{(n)} + \Delta t \cdot a_y^{(n)} \quad (6)$$

а координаты в этот момент будем вычислять, как при равномерном движении (опять считая, что интервал времени  $\Delta t$  мал, и скорость в течение него такая, как в конце интервала):

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t \cdot V_x^{(n+1)} \quad (7)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \cdot V_y^{(n+1)} \quad (8)$$

В начальный момент времени проекции скорости и координаты спутника известны:

$$x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 0, \quad V_x^{(0)} = 0, \quad V_y^{(0)} = V_0$$

Система (3),(5)–(8) позволяет шаг за шагом, при малом  $\Delta t$ , достаточно точно вычислить траекторию спутника и все ее характеристики.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА C++**

Решим систему (5)–(8) с помощью программы на языке C++ в среде MS Visual Studio. Используем возможности графической библиотеки OpenGL в среде MS Visual Studio и GLUT (OpenGL Utility Toolkit) при визуализации результатов моделирования на языке C++.

### **Реализация модели движения космических тел в C++**

#### **Код программы:**

```
//Подключаем библиотеку glut.h и smath
#include<glut.h>
#include<cmath>

//Задаем начальные значение
```

```

//x - Расстояние между спутником и центром притяжения
float x = 1.2;
//y - координата спутника, начальное значение y=0
float y = 0;
//vx - составляющая скорости по Oх. В начальный момент времени vx= 0
double vx = 0;
//vy - составляющая скорости по Oу, В начальный момент времени vy = 1.2
double vy = 1.2;
//dt - шаг
double dt = 0.00005;
//t - Общее время
double t = dt;
//PI - число Пи
const double PI = 3.1415926535;
//m,k - Промежуточные переменные
double m, k;

double velo(double v, double z, double l, double ta){
    m = z*z + l*l;
    k = sqrt(m);
    return (v - (z / (k*k*k))*ta));
}

//Вызывается при изменении размеров окна
void change_size(GLsizei w, GLsizei h){
    GLdouble aspect_ratio;
    //Предотвращается деление на 0
    if (h == 0)
        h = 1;

    //Устанавливается поле просмотра с размерами окна
    glViewport(0, 0, w, h);
}

```

```

//Обновляется система координат
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
glLoadIdentity();

//С помощью плоскостей отсечения (левая, правая, нижняя,
//верхняя, ближняя, дальняя) устанавливается объем отсечения
aspect_ratio = (GLdouble)w / (GLdouble)h;
if (w <= h)
    glOrtho(-40.0, 6.0, -23.0 / aspect_ratio, 23.0 / aspect_ratio, -1.0, 1.0);
else
    glOrtho(-40.0*aspect_ratio, 6.0*aspect_ratio, -23.0, 23.0, -1.0, 1.0);
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
}

//Задается состояние визуализации
void initialise(){
    //Задается цвет очистки окна - черный
    glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
}

void render_scene(){
    //Очищается окно, используя текущий цвет очистки
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);

    //В качестве текущего цвета рисования задаем красный
    //R G B
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0);
    //Рисуем координатную систему:
    //Рисуем ось Ox
    glBegin(GL_LINES);
    glVertex2f(-39.0, 0.0);

```

```

glVertex2f(5.0, 0.0);
glEnd();
//Рисуем ось Oy
glBegin(GL_LINES);
glVertex2f(0.0, -22.0);
glVertex2f(0.0, 22.0);
glEnd();

//Рисуем центр притяжения
//Радиус центра = 1
//Цвет закрашки - зеленый
glColor3f(0.0, 1.0, 0.0);
double radian = 0.0;
double xx, yy;
glBegin(GL_POINTS);
while (radian <= 2 * PI){
    xx = cos(radian);
    yy = sin(radian);
    glVertex2d(xx, yy);
    radian += 0.05;
}
glEnd();

//Задаем в качества цвета закрашки синий
glColor3f(0.0, 0.0, 1.0);

//Рисуем траекторию первого спутника
glBegin(GL_POINTS);
while (t <= 70){
    glVertex2d(x, y);
    vx = velo(vx, x, y, dt);
    vy = velo(vy, y, x, dt);
    x += vx*dt;

```

```

        y += vy*dt;
        t += dt;
    }
    glEnd();

    //Задаем начальные данные
    x = 1.25;
    y = 0;
    vx = 0;
    vy = 1.2;
    t = 0;

    //Рисуем траекторию второго спутника
    glColor3f(0.0, 1.0, 1.0);
    glBegin(GL_POINTS);
    while (t <= 200){
        glVertex2d(x, y);
        vx = velo(vx, x, y, dt);
        vy = velo(vy, y, x, dt);
        x += vx*dt;
        y += vy*dt;
        t += dt;
    }
    glEnd();

    //Рисуем траекторию 3-го спутника
    x = 1.3;
    y = 0;
    vx = 0;
    vy = 1.2;
    t = 0;
    glColor3f(.5, .6, 1.0);

```

```

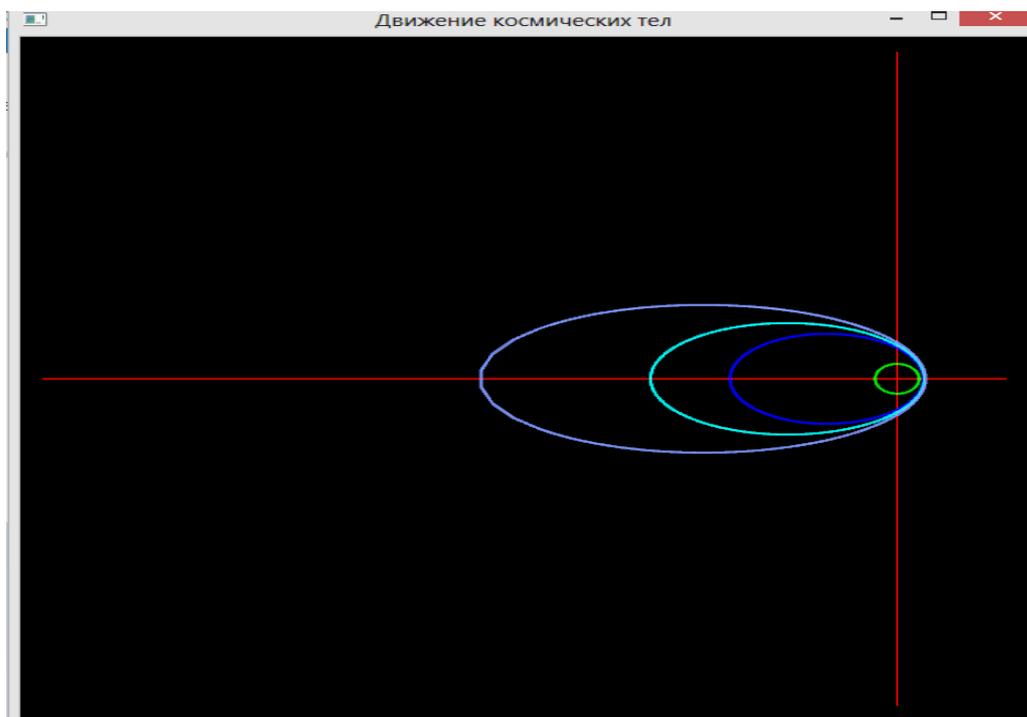
glBegin(GL_POINTS);
while (t <= 220){
    glVertex2d(x, y);
    vx = velo(vx, x, y, dt);
    vy = velo(vy, y, x, dt);
    x += vx*dt;
    y += vy*dt;
    t += dt;
}
glEnd();

//Очищаем очередь текущих команд
glFlush();
}
//Точка входа основной программы
int main(int argc, char **argv){
    glutInit(&argc, argv);
    glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
    //Задается размер окна
    glutInitWindowSize(640, 640);
    //Определяется позиции окна на рабочем столе
    glutInitWindowPosition(20, 20);
    //Создается окно с названием в кавычках
    glutCreateWindow("Движение небесных тел");
    //Дисплейная функция
    glutDisplayFunc(render_scene);
    //Функция перерисовки
    glutReshapeFunc(change_size);
    initialise();
    //Запускается оболочка GLUT
    glutMainLoop();
    return 0;
}

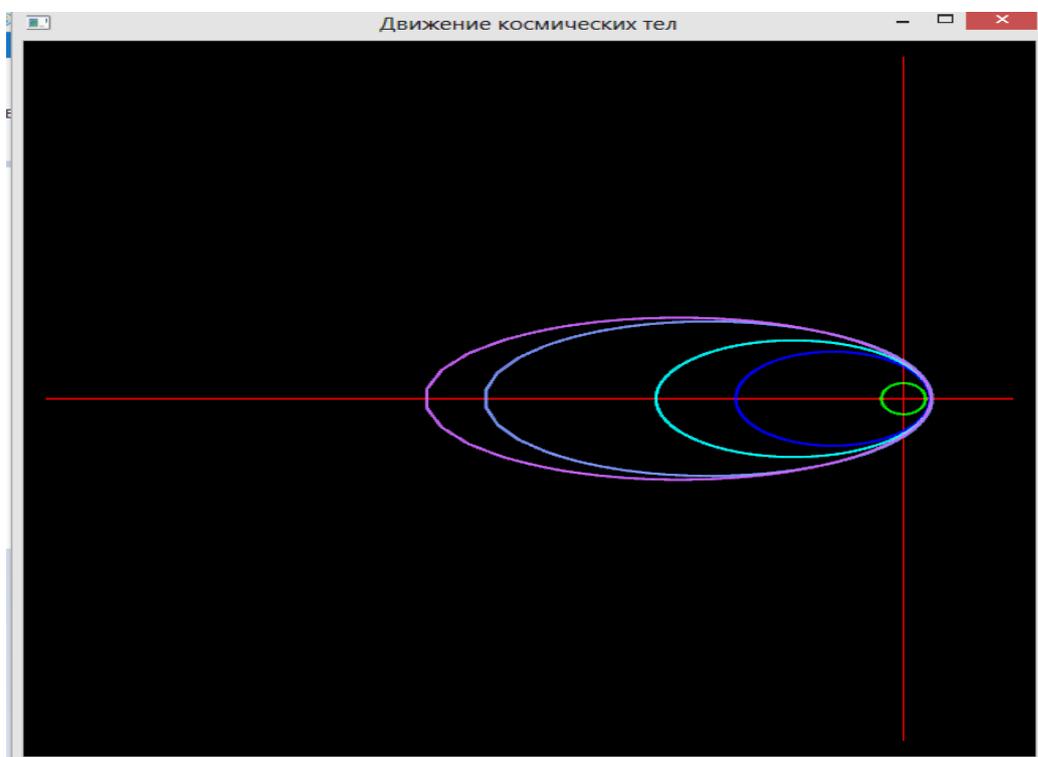
```

Результаты работы программы:

А) Траектория движения трех спутников



Б) Траектория движения четырех спутников



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА PASCAL

Реализация модели движения космических тел (с одним спутником):

```
Program cosmicheskie_tela;
uses GRAPH,crt;
const tk=30;

var d,mm:integer;
x,y,vx,vy,dt,t,k,m:real;

function velocity(v,z,l,t:real):real;
begin
    m:=z*z+l*l;
    k:=(sqrt(m));
    velocity:=v-(z/(k*k*k)*t);
end;

begin
    d:=Detect;
    InitGraph(d,mm,"");
    setbkcolor(black);
    x:=1.1;
    y:=0;
    vx:=0;
    vy:=1.2;
    dt:=0.00005;
    t:=dt;
    setcolor(7);
    circle(480,240,10);
    repeat
        vx:=velocity(vx,x,y,dt);
        vy:=velocity(vy,y,x,dt);
        x:=x+vx*dt;
        y:=y+vy*dt;
        t:=t+dt;
    if not((x*100+320>640)and(x*100+320<0)and(y*100+240>480)
and(y*100+240<0))
    then
        PutPixel(round(x*100+320),round(y*100+240),white);
        Delay(5);
    until t>=tk;
    repeat until keypressed;
    CloseGraph;
end.
```

## Реализация модели движения космических тел (с двумя спутниками):

```
Program cosmicheskie_tela2;

uses graph,crt;

const tk=30;

var d,m:integer;
x,y,vx,vy,x1,y1,dt,t:real;

function velocity(v,z,l,t:extended):extended;
begin
velocity:=v-(z/sqrt((z*z+l*l)*(z*z+l*l)*(z*z+l*l)))*t
end;

begin

d:=detect;
initgraph(d,m,"");
setbkcolor(8);
x:=1.1;
y:=0;
vx:=0;
vy:=1.2;
dt:=0.005;
t:=dt;
setcolor(7);
circle(480,240,10);

repeat

x1:=x;
y1:=y;
vx:=velocity(vx,x,y,dt);
vy:=velocity(vy,y,x,dt);
x:=x+vx*dt;
y:=y+vy*dt;
t:=t+dt;

if not((x*100+320>640)and(x*100+320<0)and
(y*100+240>480)and(y*100+240<0))

then setcolor(8);
setfillstyle(1,8);
fillellipse(round(x1*50+480),round(y1*100+240),7,7);
setcolor(7);
setfillstyle(1,7);
```

```

filellipse(round(x*50+480),round(y*100+240),7,7);
setcolor(8);
setfillstyle(1,8);
filellipse(round(x1*100+480),round(y1*50+240),7,7);
setcolor(7);
setfillstyle(1,7);
filellipse(round(x*100+480),round(y*50+240),7,7);
delay(500);
{until t>=tk;}
until keypressed;
closegraph;

```

end.

### ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

Запишем уравнение теплопроводности для однородного стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Оно описывает процесс изменения температуры  $u(x,t)$  по времени и пространству. Для решения (1) необходимо знать распределение температуры  $u(x,t)$  в начальный момент времени  $t=0$ .

Начальное условие по  $t$  имеет вид:

$$u(x,0) = u|_{t=0} = f(x) \quad (2)$$

Для стержня необходимы краевые условия на его концах  $x=0$  и  $x=l$ .

Это условия теплообмена с окружающей средой.

Краевые условия по  $x$ :

$$u(0,t) = u|_{x=0} = \tilde{u}_0, \dots u(l,t) = u|_{x=l} = \tilde{u}_l \quad (3)$$

### Задача. Определение динамики изменения температуры в стержне

Определить динамику изменения температуры в стержне длиной 4 м с теплоизолированными концами, на которых поддерживается постоянная температура, равная 3 °C. Начальное распределение температуры вдоль стержня задано:  $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 3$ . Коэффициент теплопроводности  $a = 0,5$  ( $a^2=0,25$ )

#### Решение

Длина стержня задана:  $l=4$ . Разобьем этот отрезок на 4 равные части. Пусть  $\Delta x=1$ , тогда  $x_0=0$ ,  $x_1=1$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=3$ ,  $x_4=4$ .

Функцию  $u(x,t)$  будем аппроксимировать в этих 5 узлах сетки по  $x$ . Рассмотрим разностную аппроксимацию производных  $u(x,t)$  по  $x$ . Аппроксимация первой производной в точке  $x_i$  имеет вид:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x}, \quad i = 1, n-1 \quad (4)$$

Аппроксимация вторых производных по  $x$  имеет вид:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

Так как в уравнении (1) есть производная по  $t$ :  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ , для нее также необходима аппроксимация. Поэтому необходимо построить еще одну сетку – временную сетку по  $t$ .

Будем обозначать  $u_i^k$  - значение функции  $u(x,t)$  в  $k$ -м временном слое и в  $i$ -ом узле пространственной сетки. По  $t$  сетка равномерная и имеет шаг  $\Delta t$ .

Для интегрирования по времени используем метод Эйлера. Температуру на новом временном слое для внутренних узлов выразим через температуру на предыдущем временном слое, т.е.  $u_i^{k+1}$  через  $u_i^k$ .

Запишем уравнение (1) для дискретной функции  $u_i^k$  :

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x_i^2} \right)$$

Обозначим правую часть уравнения (1) для дискретной функции  $u_i^k$  :

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x_i^2} \right) = f(u_i^k(t_k, x_i))$$

Запишем метод Эйлера для функции  $u_i^{k+1}$  на новом временном слое  $k+1$  с использованием аппроксимации (4):

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^k + \Delta t \cdot f(u_i^k(t_k, x_i)) = u_i^k + \Delta t \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x_i^2} = \\ &= u_i^k + \frac{a^2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \end{aligned}$$

В итоге получим

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{a^2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (6)$$

Это явная схема первого порядка по временным слоям  $k=0,1,2,\dots$ . Она записана для внутренних точек сетки  $i=1,2,3$  (не включает краевые точки  $i=0, i=4$ ).

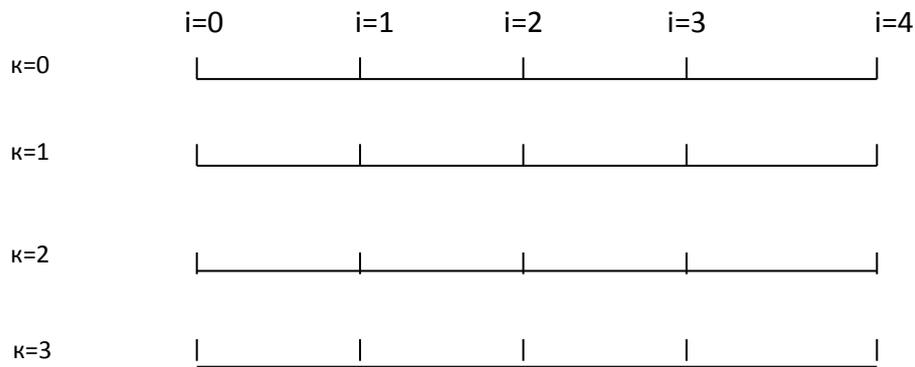
Начальное условие при  $k=0$  имеет вид:

$$u_i^k \Big|_{k=0} = u_i^{(0)} = f(x_i) = -0,5x_i^2 + 2x_i + 3, \quad i = \overline{0,4} \quad (7)$$

Краевые условия для точек  $i=0$  и  $i=4$ :

$$\begin{aligned} u_i^k \Big|_{i=0} &= \tilde{u}_0 = 3; \\ u_i^k \Big|_{i=4} &= \tilde{u}_4 = 3; \quad k = 0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь необходимо двигаясь по временным слоям  $k$ , в каждой внутренней точке  $i$  вычислить значение  $u_i^k$ :



Шаги по длине стержня и по времени –  $\Delta x$  и  $\Delta t$  соответственно. Шаг по длине известен:  $\Delta x=1$ . Шаг  $\Delta t$  получим из условия устойчивости разностной схемы (6):

$$\frac{a^2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

Пусть, например:

$$\frac{a^2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0,4,$$

тогда

$$\Delta t = \frac{0,4 \cdot 1}{0,25} = 1,6$$

Задача решается с помощью табличного процессора Excel.

На рабочем листе Excel расположим данные. В ячейке A5 запишем начальное значение  $t=0$ . В ячейке A6 запишем формулу для изменения  $t$ :  $=A5+1,6$

A6		fx = A5+1,6				
	A	B	C	D	E	F
1	dt	1,6	dx	1	a^2	0,25
2						
3	Распределение температуры в стержне					
4	t \ x	0	1	2	3	4
5	0	3	4,5	5	4,5	3
6	1,6	3	4,1	4,6	4,1	3
7	3,2	3	3,86	4,2	3,86	3
8	4,8	3	3,652	3,928	3,652	3
9	6,4	3	3,5016	3,7072	3,5016	3
10	8	3	3,3832	3,54272	3,3832	3
11	9,6	3	3,293728	3,415104	3,293728	3
12	11,2	3	3,224787	3,318003	3,224787	3
13	12,8	3	3,172159	3,24343	3,172159	3
14	14,4	3	3,131804	3,186413	3,131804	3
15	16	3	3,100926	3,142726	3,100926	3
16	17,6	3	3,077275	3,109286	3,077275	3
17	19,2	3	3,059169	3,083678	3,059169	3
18	20,8	3	3,045305	3,064071	3,045305	3
19	22,4	3	3,034689	3,049058	3,034689	3

В ячейке B5 запишем формулу для начального распределения температуры в стержне:  $= -0,5*B\$4^2 + 2*B\$4 + 3$ . Скопируем значение ячейки B5 в ячейки, B6:B20. Получим краевые условия на одном конце стержня. Скопируем значение ячейки F5 в ячейки F6:F20. Получим краевые условия на втором конце стержня:

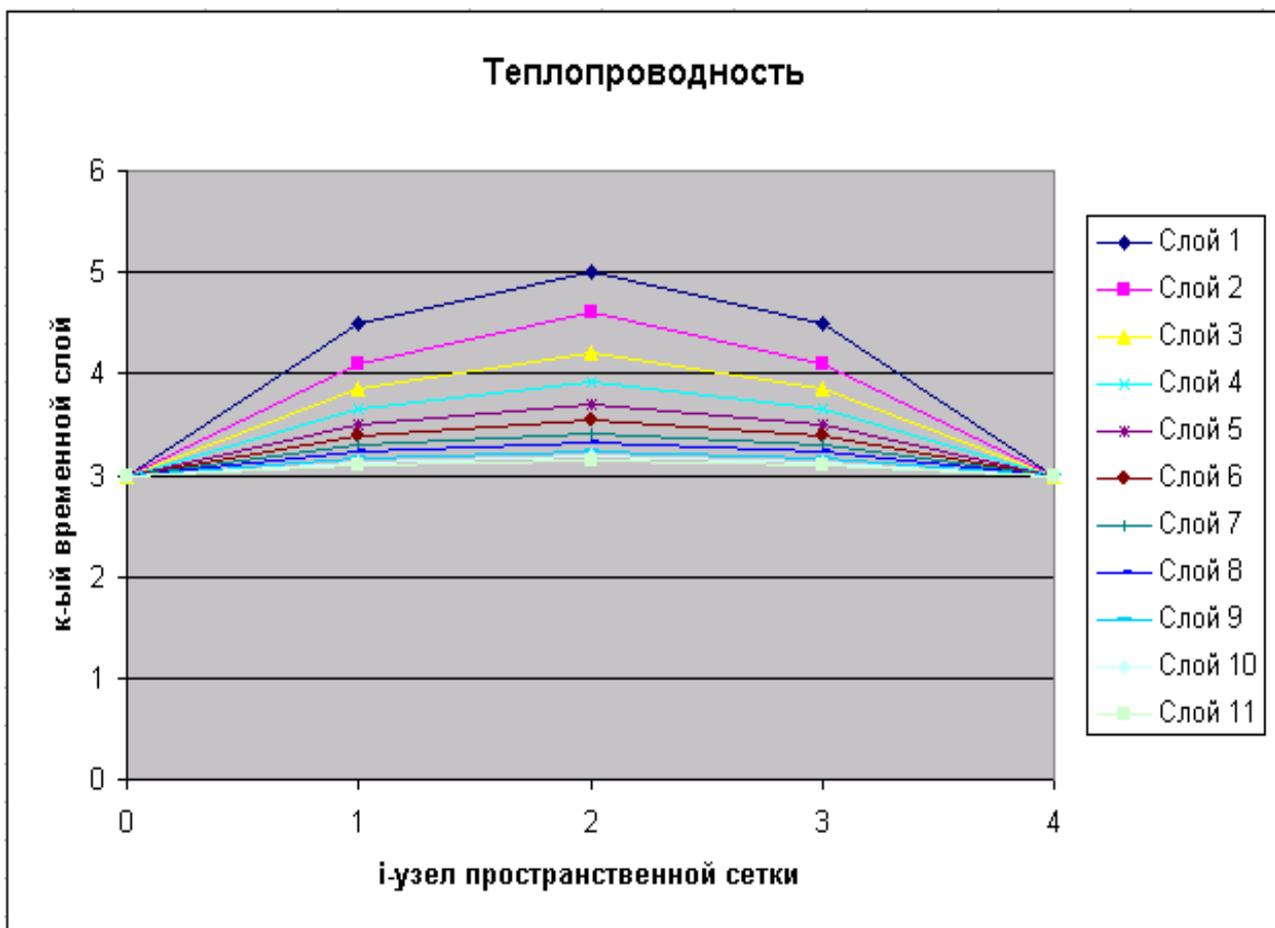
B5		fx = -0,5*B\$4^2+2*B\$4+3				
	A	B	C	D	E	F
1	dt	1,6	dx	1	a^2	0,25
2						
3	Распределение температуры в стержне					
4	t \ x	0	1	2	3	4
5	0	3	4,5	5	4,5	3
6	1,6	3	4,1	4,6	4,1	3
7	3,2	3	3,86	4,2	3,86	3
8	4,8	3	3,652	3,928	3,652	3
9	6,4	3	3,5016	3,7072	3,5016	3
10	8	3	3,3832	3,54272	3,3832	3
11	9,6	3	3,293728	3,415104	3,293728	3
12	11,2	3	3,224787	3,318003	3,224787	3
13	12,8	3	3,172159	3,24343	3,172159	3
14	14,4	3	3,131804	3,186413	3,131804	3
15	16	3	3,100926	3,142726	3,100926	3
16	17,6	3	3,077275	3,109286	3,077275	3
17	19,2	3	3,059169	3,083678	3,059169	3
18	20,8	3	3,045305	3,064071	3,045305	3
19	22,4	3	3,034689	3,049058	3,034689	3

Осталось заполнить поле распределения температуры во внутренних ячейках области – ячейках С6:Е20. Для этого в ячейке С6 запишем формулу, соответствующую явной разностной схеме первого порядка (7):

$$=C5+(\$F\$1*\$B\$1/(\$D\$1^2))* (D5-2*C5+B5)$$

C6		fx = C5+(\\$F\$1*\$B\$1/(\$D\$1^2))*(D5-2*C5+B5)				
	A	B	C	D	E	F
1	dt	1,6	dx	1	a^2	0,25
2						
3	Распределение температуры в стержне					
4	t \ x	0	1	2	3	4
5	0	3	4,5	5	4,5	3
6	1,6	3	4,1	4,6	4,1	3
7	3,2	3	3,86	4,2	3,86	3
8	4,8	3	3,652	3,928	3,652	3
9	6,4	3	3,5016	3,7072	3,5016	3
10	8	3	3,3832	3,54272	3,3832	3
11	9,6	3	3,293728	3,415104	3,293728	3
12	11,2	3	3,224787	3,318003	3,224787	3
13	12,8	3	3,172159	3,24343	3,172159	3
14	14,4	3	3,131804	3,186413	3,131804	3
15	16	3	3,100926	3,142726	3,100926	3
16	17,6	3	3,077275	3,109286	3,077275	3
17	19,2	3	3,059169	3,083678	3,059169	3
18	20,8	3	3,045305	3,064071	3,045305	3
19	22,4	3	3,034689	3,049058	3,034689	3

Построим графики распределения температуры вдоль стержня по временным слоям. Для этого выделим область B5:F20 и обратимся к мастеру диаграмм.



В результате получим: в начальный момент времени температура в стержне распределена в виде параболы. С течением времени температура выравнивается и становится такой же, как на концах.

### Лабораторная работа №5

Рассмотреть динамику изменения температуры в стержне длиной  $l$  м с теплоизолированными концами, температура на которых поддерживается постоянной и равна  $u_i^k|_{i=0} = \tilde{u}_0 = a \text{ } ^\circ\text{C}$  и  $u_i^k|_{i=L} = \tilde{u}_L = b \text{ } ^\circ\text{C}$ , с начальным условием  $u_i^k|_{k=0} = u_i^{(0)} = f(x_i)$ . Коэффициент теплопроводности  $a$  примем равным 0,5 (выбор этот достаточно произволен).

Номер варианта	Длина $l$ (м)	$\tilde{u}_0$	$\tilde{u}_L$	$f(x_i)$
1	4	3	-1	$-0,25 x_i^2 + 3$
2	8	3	-5	$-0,125 x_i^2 + 3$
3	4	-1	3	$0,25 x_i^2 - 1$
4	8	-1	15	$0,25 x_i^2 - 1$
5	8	0	1	$\sin(x_i)$
6	8	3	1	$\sin(x_i)$
7	8	0	0,5	$\sin(x_i)/2$
8	10	2	-1	$\cos(x_i)$
9	10	0,5	-1	$\sin(x_i/2)$
10	8	0	-0,75	$\sin(x_i)/2$
11	8	0,5	0,5	$\cos(x_i)/2$
12	10	1	0	$\cos(x_i/2)$
13	4	1	-0,4	$\cos(x_i)/2$
14	8	1	-0,5	$\cos(x_i/2)$
15	10	0	-0,5	$\sin(x_i)$
16	10	0	1	$\sin(2x_i)$
17	8	0	0,5	$\sin(2x_i)$
18	10	0	-0,5	$\sin(x_i)/4$
19	8	-1	2,2	$0,05 x_i^2 - 1$
20	4	-1	0,6	$0,1 x_i^2 - 1$

Построить графики распределения температуры вдоль стержня по временным слоям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С.П. Механика – М.: Наука, 1975.–560с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. – М.: Наука, 1974.– 520с.
3. Могилев А. В., Пак Н. И., Хённер Е. К. Информатика: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений - М.: Издательский центр «Академия», 2004.–816с.
4. Могилев А. В., Пак Н. И., Хённер Е. К. Практикум по информатике: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений - М.: Издательский центр «Академия», 2001.–608с.
5. Программирование на Visual Basic for Applications в Excel: учебно-методическое пособие / О. А. Широкова, Р. Ш. Гайнанова – Казань: КФУ, 2012. – 137с.  
[http://kpfu.ru/main\\_page?p\\_sub=7046](http://kpfu.ru/main_page?p_sub=7046)
6. Петровская Т.А., Лозко Е.И., Кушнер Д.Л. VBA программирование в PowerPoint // Учебно-методическое пособие. – Минск: БНТУ, 2013. – 45с.
7. Гайдышев И.П. Решение научных и инженерных задач средствами Excel, VBA и C/C++. - СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 504 с. - ISBN 5-94157-477-0
8. Лавренов С.М. Excel. Сборник примеров и задач. – М.: Финансы и статистика. – 2006. – 335 с.
9. Ларсен Рональд. Инженерные расчеты в Excel. – М.: Изд-во «Вильямс», 2004. – 544с.
10. Назаров, С. В. Программирование в пакетах MS Office [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. В. Назаров, П. П. Мельников, Л. П. Смольников и др.; под ред. С. В. Назарова. - М.: Финансы и статистика, 2007. - 656 с.: ил. - ISBN 978-5-279-02926-6  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=369386>
11. Бордовский Г.А. Физические основы математического моделирования. М: Издательский центр «Академия», 2005 – 321с
12. Сулейманов Р. Р. Компьютерное моделирование математических задач. Элективный курс [Электронный ресурс]: учебное пособие / Р. Р. Сулейманов. - Эл. изд. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 381 с.: ил. - ISBN 978-5-9963-1484-3.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=485565>
13. Игнатъев Ю. Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple [Текст: электронный ресурс] : [лекции для школы по

математическому моделированию] / Ю. Г. Игнатъев ; Казан. (Приволж.) федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского .— Электронные данные (1 файл: 19,09 Мб) .— (Казань : Казанский федеральный университет, 2014) .— Режим доступа: открытый.  
<URL:[http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_120\\_000443.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf)>.

14. Культин Н. Б. Delphi в задачах и примерах / Н. Б. Культин. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 288 с. : ил. + CD-ROM. - ISBN 978-5-94157-997-6.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=350283>
15. Бирих Р.В, Еремин Е.А., Чернатынский В.И. Компьютерные модели в школьном курсе физики// Информатика, 2006, №14, с.3-45.
16. Хомоненко А. Д. Delphi 7 / А. Д. Хомоненко, В. Э. Гофман, Е. В. Мещеряков. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 1136 с. — (В подлиннике). - ISBN 978-5-9775-0425-6.  
<http://znanium.com/bookread.php?book=350727>
17. Культин Н.Б. С/С++ в задачах и примерах. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. — 288 с.
18. Липачёв Е.К. Технология программирования. Базовые конструкции С/С++: учебно-справочное пособие. Казань.: Казан. ун-т, 2012. — 142 с.
19. Павловская Т.А. С/С++. Программирование на языке высокого уровня. — СПб.: Питер, 2003. — 461 с.
20. Павловская Т.А., Ю.А.Щупак С/С++. Структурное программирование: Практикум. — СПб.: Питер, 2003. — 240 с.
21. Professional Visual Studio 2013 / Bruce Johnson - John Wiley & Sons, Inc, 2014 – 1102pp
22. OpenGL. Суперкнига, 3-е издание. : Пер. с англ – М. : Издательский дом “Вильямс”, 2006 – 1039с
23. Тихомиров Ю. Программирование трехмерной графики – СПб BHV – Санкт-Петербург, 1998 – 256с
24. OpenGL superBible: comprehensive tutorial and reference. – Sixth edition / Graham Sellers, Richard S. Wright, Jr., Nicholas Haemel - Addison Wesley, 2013 – 853pp
25. OpenGL programming guide: the official guide to learning OpenGL / Dave Shreiner, Graham Sellers, John, Kessenich, Bill Licea-Kane; the Kronos OpenGL ARB Working Group. – Eighth edition, 2013 – 986pp

## ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ

1. [www.delphisources.ru](http://www.delphisources.ru)
2. [www.delphi.int.ru](http://www.delphi.int.ru)
3. [www.beluch.ru/progr/100comp/index.htm](http://www.beluch.ru/progr/100comp/index.htm)
4. <http://znanium.com/bookread.php?book=319046>
5. <http://znanium.com/bookread.php?book=251095>
6. Портал о программировании <https://code-live.ru>
7. Основы программирования на языках Си и С++ для начинающих  
<http://cppstudio.com>
8. Учебник по основам программирования для новичков  
<http://iguania.ru/tutorial>
9. Программирование на С и С++. Онлайн справочник программиста  
<http://www.c-cpp.ru/books/yazyk-s>
10. Computing science & Discrete math <http://kvodo.ru/category/lessons/cplusplus>
11. НОИ Интуит <http://www.intuit.ru/studies/courses/17/17/info>
12. Справочник по С++ <https://msdn.microsoft.com>
13. <http://www.cse.chalmers.se/~uffe/glut-3.spec.pdf>
14. <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/60k1461a.aspx>
15. <http://www.cplusplus.com/>
16. <https://www.opengl.org/>
17. <http://en.wikipedia.org/wiki/>
18. <http://www.opengl.org.ru/>