

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
*Кафедра астрономии и космической геодезии*

**Р.А.КАЩЕЕВ**  
**Современные методы спутниковой гравиметрии**  
*Конспект лекций*

**Казань – 2015**

**УДК 528.2**  
**ББК 26.21**

*Принято на заседании кафедры астрономии и космической геодезии*

*Протокол № 12 от 15 мая 2015 года*

**Рецензент:**

кандидат физико-математических наук,  
доцент КГАСУ **В.С.Боровских**

**Кащеев Р.А.**

**Современные методы спутниковой гравиметрии**

Конспект лекций/ Р.А.Кащеев. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 45с.

В учебном пособии рассматриваются новейшие методы определения параметров моделей гравитационного потенциала: метод спутниковой градиентометрии и метод межспутникового слежения в системе двух искусственных спутников. Конспект лекций по курсу «Спутниковая гравиметрия» адресован студентам, обучающимся по реализуемой в Институте физики Казанского федерального университета образовательной программе магистратуры направления «Геодезия и дистанционное зондирование».

© **Кащеев Р.А., 2015**

© **Казанский университет, 2015**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Общий вид уравнений спутниковой гравиметрии. . . . .	4
2. Теоретические основы выполнения дифференциальных операций в скалярных и векторных полях. . . . .	11
3. Градиенты силы притяжения и вторые производные гравитационного потенциала. . . . .	17
4. Уравнения спутниковой градиентометрии. . . . .	21
5. Принципы измерения вторых производных гравитационного потенциала . . . . .	25
6. Кинематика относительного движения двух искусственных спутников . . . . .	27
7. Динамика относительного движения двух искусственных спутников. . . . .	33
8. Уравнения относительного движения двух близких искусственных спутников . . . . .	35
9. Миссии CHAMP, GRACE и GOCE . . . . .	39
<b>Литература</b> . . . . .	<b>45</b>

## 1. Общий вид уравнений спутниковой гравиметрии

В прямоугольной геоцентрической средней экваториальной земной системе координат  $\vec{X}$  представим результат  $L$  некоторого измерения, проведенного в момент времени  $t$  в виде функционала

$$L = F(\vec{X}_S, \vec{X}_M, V\{C_{nm}, S_{nm}\}), \quad (1.1)$$

явным образом зависящего от:

- $\vec{X}_S$  - геоцентрического вектора, включающего координаты одного (или нескольких) ИСЗ, участвующих в момент  $t$  в измерении  $L$ ;
- $\vec{X}_M$  - геоцентрического вектора, включающего координаты одного (или нескольких) наземных пунктов, участвующих в момент  $t$  в измерении  $L$ ;
- $V\{C_{nm}, S_{nm}\}$  - гравитационного потенциала Земли, описываемого модельным набором гармонических коэффициентов разложения потенциала в ряд (1.1) объемных сферических функций:

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]. \quad (1.2)$$

В (1.2) для Земли приняты следующие обозначения:

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{сек}^2$  - кавендишева гравитационная постоянная,

$M_{\oplus}$  - масса и средний экваториальный радиус  $a_{\oplus}$  Земли,

$\rho, \theta, \lambda$  - геоцентрические сферические координаты точки внешнего околоземного пространства;

$\{C_{nm}, S_{nm}\}$  -совокупность гармонических коэффициентов ряда (1.2),

представляющая собой модель гравитационного поля Земли. Уместно заметить, что множество коэффициентов бесконечного ряда (1.2) принадлежит бесконечномерному пространству последовательностей, однако, в случае неизбежного на практике усечения ряда (1.2) максимальным значением  $N$  индекса  $n$  это множество становится конечномерным, что позволяет выполнять все дальнейшие операции с ним в привычном конечномерном пространстве. Наконец,  $P_{nm}(\cos\theta)$  - присоединенные функции Лежандра, определяемые

известной формулой Родрига: 
$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n .$$

Здесь  $x = \cos\theta$  .

Линеаризация(1.1) в окрестности априорно приближенно вычисленного по принятой модели значения  $L^*$  дает общий вид уравнения поправокспутниковой гравиметрии в координатной форме

$$dL = L - L^* = \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_S} d\vec{X}_S + \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_M} d\vec{X}_M + \sum_{n,m} \frac{\partial F}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}} \{dC_{nm}, dS_{nm}\}, \quad (1.3)$$

где обозначено:

$L^* = F(\vec{X}_S^*, \vec{X}_M^*, V\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\})$  - значение измеряемой величины,

априорно вычисляемое по приближенно известным векторам координат  $\vec{X}_S^*, \vec{X}_M^*$  и набору  $\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\}$  приближенно известных параметров модели гравитационного поля. Уравнение (1.3) представляет собой уравнение поправок, линейное относительно искомым неизвестных:

а) поправок  $d\vec{X}_S, d\vec{X}_M$  в приближенно известные на момент измерения  $t$  значения  $\vec{X}_S^*, \vec{X}_M^*$  векторов координат  $\vec{X}_S, \vec{X}_M$  ИСЗ и пунктов соответственно;

б) поправок  $\{dC_{nm}, dS_{nm}\}$  к гармоническим коэффициентам априорно известной приближенной модели поля  $\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\}$ .

В ряде случаев представить уравнение наблюдений в форме (1.1), явно зависящей от совокупности параметров  $\{C_{nm}, S_{nm}\}$  модели потенциала, оказывается затруднительным. Тогда целесообразно геоцентрический радиус-вектор ИСЗ записать в форме функции вектора  $\vec{E}_S$  элементов спутниковой орбиты:  $\vec{X}_S = \vec{X}_S(\vec{E}_S)$ , который представляется в виде суммы априорно известного вектора приближенных элементов орбиты ИСЗ  $\vec{E}_S^*$  и вектора  $d\vec{E}_S$  неизвестных малых к нему поправок:

$$\vec{E}_S = \vec{E}_S^* + d\vec{E}_S.$$

Тогда вектор  $d\vec{X}_S$  правой части (1.1) переписывается в виде:

$$d\vec{X}_S = \vec{X}_S(\vec{E}_S) - \vec{X}_S(\vec{E}_S^*) = \frac{\partial \vec{X}_S}{\partial \vec{E}_S} d\vec{E}_S,$$

что, в свою очередь позволяет записать уравнение поправок в виде

$$dL = L - L^* = \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_S} \cdot \frac{\partial \vec{X}_S}{\partial \vec{E}_S} d\vec{E}_S + \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_M} d\vec{X}_M, \quad (1.4)$$

в котором по сравнению с (1.3) поправки  $d\vec{X}_S$  в геоцентрические координаты ИСЗ заменены поправками  $d\vec{E}_S$  в элементы его орбиты.

Текущие компоненты вектора  $\vec{E}_S$  элементов спутниковой орбиты представляют собой сложные функции ряда величин:

- вектора  $\vec{E}_S^0$  начальных элементов спутниковой орбиты, относящихся к некоторому начальному моменту времени  $t_0$  ;
- совокупности параметров  $\{C_{nm}, S_{nm}\}$  модели гравитационного потенциала Земли;
- совокупности параметров  $\{P_l\}$  модели прочих сил, возмущающих движение ИСЗ,

что может быть записано в форме функциональной зависимости

$$\vec{E}_S = \vec{E}_S \left( \vec{E}_S^0, \{C_{nm}, S_{nm}\}, \{P_l\} \right).$$

Тогда

$$d\vec{E}_S = \vec{E}_S - \vec{E}_S^* = \frac{\partial \vec{E}_S}{\partial \vec{E}_S^0} d\vec{E}_S^0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \vec{E}_S}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}} \{dC_{nm}, dS_{nm}\} + \sum_l \frac{\partial \vec{E}_S}{\partial \{P_l\}} \{dP_l\},$$

где обозначено:  $d\vec{E}_S^0 = \vec{E}_S^0 - (\vec{E}_S^0)^*$  - неизвестная поправка в приближенно известные значения  $(\vec{E}_S^0)^*$  начальных (на момент  $t_0$ ) элементов орбиты;

$dC_{nm} = C_{nm} - C_{nm}^*$ ,  $dS_{nm} = S_{nm} - S_{nm}^*$  неизвестные поправки в приближенно известные значения гармонических коэффициентов уточняемой модели гравитационного потенциала.

Подставляя далее  $d\vec{E}_k$  в (2.3), получаем

$$dL = \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_k} \cdot \frac{\partial \vec{X}_k}{\partial \vec{E}_k} \left[ \frac{\partial \vec{E}_k}{\partial \vec{E}_k^0} d\vec{E}_k^0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \vec{E}_k}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}} \{dC_{nm}, dS_{nm}\} + \sum_l \frac{\partial \vec{E}_k}{\partial \{P_l\}} \{dP_l\} \right] + \frac{\partial F}{\partial \vec{X}_M} d\vec{X}_M. \quad (1.5)$$

Сопроводим полученные нами уравнения поправок (1.3), (1.5) необходимыми комментариями.

Во-первых, векторы-производные  $\frac{\partial F}{\partial \vec{X}_S}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \vec{X}_M}$  и  $\frac{\partial F}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}}$  зависят

от вида выполненного измерения и могут быть вычислены непосредственным дифференцированием функционала  $F$ .

Во-вторых, матрица  $\frac{\partial \vec{X}_k}{\partial \vec{E}_k}$  перехода от прямоугольных координат

спутника к его орбитальным элементам хорошо известна и широко используется в небесной механике, так же, как и матрица  $\frac{\partial \vec{E}_k}{\partial \vec{E}_k^0}$ , называемая

матрицей изохронных производных [4].

В-третьих, первое слагаемое правой части (1.3) описывает вклад в измерение  $L$  ошибки положения (координатной привязки) спутника в момент наблюдения. Входящий в это слагаемое вектор  $d\vec{X}_S = \vec{X}_S - \vec{X}_S^*$  представляет собой отклонение истинного вектора  $\vec{X}_S$  положения спутника от априорно приближенно известного (референцного) его значения  $\vec{X}_S^*$  в момент проведения измерения  $L$ . Вектор  $\vec{X}_S^*$  может быть либо заранее вычислен по априорно принятой модели, либо непосредственно определен наземными и/или бортовыми средствами навигационного обеспечения. Тогда в первом варианте величина вектора  $d\vec{X}_S$  характеризует точность принятой модели, во втором –



точность средств и методов оперативного позиционирования. Понесению же и в том, и в другом случаях  $d\vec{X}_S$  есть ошибка вектора положения КА, допущенная при выполнении его координатной привязки. Следует подчеркнуть, что особую важность создание эффективных средств навигационной привязки приобретает при изучении пространственной структуры физических полей, поскольку результаты проводимых с этой целью измерений вне зависимости от их вида оказываются функциями текущих координат КА.

Следует также заметить, что с учетом изменения измеряемых и искомых величин со временем была предложена модернизированная форма записи функционала (1.1):

$$L(t) = F(\vec{X}_S(\vec{a}, t), \vec{X}_M(\vec{b}, t), V\{C_{nm}(\vec{c}, t), S_{nm}(\vec{s}, t)\}), \quad (1.6)$$

где  $L(t)$  – зависящий от времени результат измерения,  $\vec{X}_S(\vec{a}, t)$  и  $\vec{X}_M(\vec{b}, t)$  – зависящие от времени векторы положения участвующих в измерении спутников и наземных пунктов соответственно,  $\vec{a}, \vec{b}$  – постоянные во времени векторы параметров априорно устанавливаемых моделей изменения со временем векторов положений  $\vec{X}_S$  и  $\vec{X}_M$ ,  $\vec{c}, \vec{s}$  – постоянные во времени векторы параметров априорно устанавливаемых моделей изменения со временем массивов гармонических коэффициентов  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  соответственно.

Как известно, классическая схема оценивания параметров модели гравитационного поля опирается на интегрирование дифференциальных уравнений возмущенного движения искусственного спутника, связывающих изменения элементов эволюционирующей спутниковой орбиты с

характеристиками возмущающих сил. Однако, опыт показывает, что, следуя этой методике, не удастся построить достаточно точные и подробные модели гравитационного потенциала, что вынуждает обратиться к иным методам, не связанным со сглаживающей процедурой интегрирования на значительных временных интервалах.

Перспективы достижения качественно новых результатов решения задачи определения гравитационных полей Земли и планет в настоящее время связываются с так называемыми дифференциальными методами, использующими искусственный спутник (или систему спутников) в качестве пробной гравиметрической массы, слежение за движением которой доставляет необходимые детальные сведения о структуре внешнего гравитационного поля исследуемого небесного тела. Речь идет о методе межспутникового слежения (Satellite-to-Satellite Tracking - **SST**), предполагающего выполнение бортовых измерений характеристик относительного движения в системе двух или более аппаратов, и методе спутниковой градиентометрии (Satellite Gravity Gradiometry - **SGG**), основанного на бортовых измерениях вторых производных гравитационного потенциала.

В ряде публикаций перечисленные выше методы объединяют под общим названием методов дифференциальных измерений в системах с изменяемой геометрией расположения элементов. Эти системы могут быть реализованы как в виде образующей некоторую орбитальную конфигурацию группы искусственных спутников (метод **SST**), так и в виде нескольких пробных масс, находящихся на борту одного космического аппарата (метод **SGG**).

Указанные виды измерений отличаются беспрецедентной точностью и высокой чувствительностью к региональным и локальным аномалиям поля, что, в сочетании с оперативностью определения параметров потенциала, открывает возможности исследования изменений гравитационного поля отдельных территорий на относительно небольших временных интервалах.

## 2. Теоретические основы выполнения дифференциальных операций в скалярных и векторных полях

Векторное поле  $\vec{a}$ , определенное в некоторой области пространства, называется потенциальным, если во всех точках области оно может быть представлено градиентом скалярной функции  $v$ , называемой потенциалом исходного векторного поля, т.е.

$$\vec{a} = \text{grad} v = \nabla v \quad (2.1)$$

Символом  $\nabla$  в (2.1) обозначен дифференциальный векторный оператор Гамильтона (набла):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z} \vec{k}. \quad (2.2)$$

Оператор Гамильтона обладает свойствами вектора, т.е. его компоненты

$$\nabla = \left( \nabla_X = \frac{\partial}{\partial X}, \nabla_Y = \frac{\partial}{\partial Y}, \nabla_Z = \frac{\partial}{\partial Z} \right)^T.$$

могут рассматриваться как компоненты (проекции на оси координат) вектора  $\nabla$ . Сам этот вектор не имеет реального смысла, но приобретает его в комбинации со скалярными или векторными функциями. Определим произведение вектора  $\nabla$  на скалярную функцию  $v(X, Y, Z)$  как произведение проекций вектора  $\nabla$  на эту функцию, понимая под произведением взятие соответствующих производных, т.е.

$$\nabla v = (\nabla_X, \nabla_Y, \nabla_Z)^T v = \left( \frac{\partial v}{\partial X}, \frac{\partial v}{\partial Y}, \frac{\partial v}{\partial Z} \right)^T = \text{grad} v.$$

Таким образом, произведение символического вектора  $\nabla$  на скалярную функцию равно градиенту этой скалярной функции.

Рассмотрим далее некоторое векторное поле  $\vec{a}=(a_X, a_Y, a_Z)^T$ , в каждой точке полностью определяемое совокупностью трех его компонент (проекций). В этом случае возможно образовать:

- скалярное поле  $(\nabla\vec{a})$ , представляющее собой скалярное произведение вектора  $\nabla$  и вектора  $\vec{a}$ ;
- векторное поле  $[\nabla\times\vec{a}]$ , являющееся векторным произведением векторов  $\nabla$  и  $\vec{a}$ .

Скалярная величина  $(\nabla\vec{a})$  называется дивергенцией вектора  $\vec{a}$ :

$$\operatorname{div}\vec{a}=(\nabla\vec{a})=\frac{\partial a_X}{\partial X}+\frac{\partial a_Y}{\partial Y}+\frac{\partial a_Z}{\partial Z},$$

а вектор  $[\nabla\times\vec{a}]$  называется ротором (вихрем) поля  $\vec{a}$  и обозначается

$$\operatorname{rot}\vec{a}=[\nabla\times\vec{a}]=\left(\frac{\partial a_Z}{\partial Y}-\frac{\partial a_Y}{\partial Z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_X}{\partial Z}-\frac{\partial a_Z}{\partial X}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_Y}{\partial X}-\frac{\partial a_X}{\partial Y}\right)\vec{k}.$$

Главной задачей теории планетарного гравитационного потенциала является отыскание самого потенциала силы притяжения  $V(X, Y, Z)$  и его градиента

$$\operatorname{grad}V(X, Y, Z)=\nabla V(X, Y, Z)=\vec{F}(X, Y, Z), \quad (2.3)$$

т.е. ускорения силы притяжения.

Исходными уравнениями решения сформулированной выше задачи теории гравитационного потенциала служат дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$\Delta V(X, Y, Z)=0, \quad (2.4)$$

называемое уравнением Лапласа и справедливое для точек внешнего не занятого притягивающими массами пространства, и уравнение

$$\Delta V(X, Y, Z) = -4\pi G \delta(X, Y, Z), \quad (2.5)$$

называемое уравнением Пуассона. Это уравнение устанавливает связь между вторыми производными гравитационного потенциала и объемной плотностью  $\delta(X, Y, Z)$  притягивающих масс, находящихся в рассматриваемой точке. В (2.4) и (2.5) символом  $\Delta$  обозначен дифференциальный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \quad (2.6)$$

Первым интегралом уравнений (2.4) и (2.5) является градиент скалярной функции потенциала, представляющий собой векторную ее функцию. Заметим в этой связи, что в гравиметрии и космической геодезии широко используются также градиенты сил (притяжения или тяжести), являющиеся векторными функциями векторного аргумента. Указанное обстоятельство требует обсуждения некоторых особенностей дальнейшего применения операторов Гамильтона (2.2) и Лапласа (2.6).

Градиент скалярной функции потенциала силы притяжения

$$\nabla V(X, Y, Z) = \left( \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right)^T V = \left( \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z} \right)^T = (F_X, F_Y, F_Z)^T$$

представляет собой вектор с компонентами, являющимися в свою очередь проекциями (компонентами) вектора  $\vec{F}(X, Y, Z)$  силы притяжения на координатные оси. Величина  $\text{div} \vec{F}$  образует скалярное поле, а величины

$\text{grad}V$ ,  $\text{rot}\vec{F}$  образуют векторные поля, к которым возможно повторно применить те же дифференциальные операции.

а) Повторное применение оператора Гамильтона к вектору градиента скалярной функции позволяет вычислить **дивергенцию от градиента**, т.е. скалярную величину  $\text{div}(\text{grad}V) = (\nabla \cdot \nabla V)$  - скалярное произведение двух векторов:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla V) &= \nabla^2 V(X, Y, Z) = \left( \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \Delta V(X, Y, Z). \end{aligned} \quad (2.7)$$

б) Вычисляя **ротор от градиента** скалярной функции, получаем выражение:

$$\text{rot}(\text{grad}V) = [\nabla \times \nabla V] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} & \frac{\partial V}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial Y} - \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial X} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} - \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

если при вычислении вторых производных порядок дифференцирования не имеет значения.

Равенство (2.8) означает, что ротор градиента любой дважды дифференцируемой функции тождественно равен нулю. Вычисляя ротор от обеих частей равенства (2.3) (или равенства (2.1)), получаем дифференциальный критерий потенциальности векторного поля:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad}V) = 0$$

в) В случае вычисления **градиента дивергенции** вектора получаем **вектор**, компонентами которого являются суммы вторых производных компонент исходного вектора:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{div } \vec{F}) = \nabla(\nabla \vec{F}) = \nabla \left( \frac{\partial F_X}{\partial X} + \frac{\partial F_Y}{\partial Y} + \frac{\partial F_Z}{\partial Z} \right) = \\ \left( \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial^2 F_Z}{\partial Z \partial X} \\ \frac{\partial^2 F_X}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_Z}{\partial Z \partial Y} \\ \frac{\partial^2 F_X}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Y \partial Z} + \frac{\partial^2 F_Z}{\partial Z^2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

г) Правомерно также вычисление **градиента градиента** посредством применения оператора Гамильтона к каждой компоненте вектора градиента исходной функции, порождающее **матрицу** ее вторых производных:

$$\nabla(\nabla V) = \nabla \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial V}{\partial X} \\ \nabla \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \nabla \frac{\partial V}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

В случае потенциальности рассматриваемого поля, имеем

$$\nabla(\nabla V) = \nabla \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial V}{\partial X} \\ \nabla \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \nabla \frac{\partial V}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Обратим внимание на то, что в случае вычисления градиента дивергенции вектора по формуле (2.9) получаем вектор  $\nabla(\nabla \vec{F})$ , тогда как вычисление по формуле (2.10) градиента от градиента  $\nabla(\nabla V)$  порождает матрицу (2.11) [5].

### **3. Градиенты силы притяжения и вторые производные гравитационного потенциала**

В теории гравитационного потенциала рассматривается градиент вектора ускорения силы притяжения (для точек земной поверхности – силы тяжести), т.е. градиент градиента потенциала этой силы, вследствие чего результат такого



рода операции согласно (2.11) представляет собой симметричную матрицу. В правой прямоугольной спутникоцентрической горизонтной системе координат  $Sxyz$ , ось  $z$  которой направлена к центру масс Земли, а ось  $x$  устремлена в северном направлении параллельно касательной к меридиану подспутниковой точки, матрица вторых производных гравитационного потенциала

$$\mathfrak{S}_{(Sxyz)} = \nabla(\nabla V) = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

включает пять независимых элементов, поскольку во внешнем не занятом притягивающими массами пространстве потенциал ньютоновской силы притяжения обладает свойством гармоничности, т.е. выполняется условие:

$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$ , где  $\Delta$  - оператор Лапласа. Для точек, расположенных на поверхности Земли, имеет место равенство

$\Delta W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega$ , где  $W$  - потенциал силы тяжести, а

$\omega$  - угловая скорость вращения Земли.

Заметим в этой связи, что градиентометрия есть, по-видимому, область наиболее наглядного проявления теснейшей связи гравитации и геометрии пространства, находящей свое отражение в свойствах матрицы-тензора (3.1). Дело в том, что каждый из элементов этой матрицы характеризует ту или иную особенность геометрии уровенных поверхностей и силовых линий гравитационного поля исследуемого небесного тела. Так, в частности, производные  $V_{xz}$ ,  $V_{yz}$ ,  $V_{zz}$  (элементы последней строки матрицы (3.1))

представляют собой компоненты вектора – градиента ньютоновской силы притяжения, поскольку

$$V_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad V_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad V_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Если направление оси  $z$  совпадает с нормалью к уровенной поверхности потенциала силы притяжения (для точек поверхности Земли – к геоиду), то горизонтальная плоскость, содержащая оси  $x$  и  $y$ , будет представлять собой плоскость, касательную к указанной уровенной поверхности. Тогда производные  $V_{xz}$  и  $V_{yz}$  характеризуют изменения силы притяжения в горизонтальной плоскости в направлении меридиана и первого вертикала подспутниковой точки соответственно, вследствие чего часто называются горизонтальными градиентами. Производная  $V_{zz}$  отражает изменение силы притяжения вдоль вертикальной оси и потому носит название вертикального градиента. Полным горизонтальным градиентом называется вектор  $\vec{H}$ , совпадающий с направлением максимального изменения силы притяжения в плоскости горизонта – азимут этого направления обозначим  $A_0$ . Тогда

$$|\vec{H}| = \sqrt{V_{xz}^2 + V_{yz}^2}, \quad \operatorname{tg} A_0 = \frac{V_{yz}}{V_{xz}}. \quad (3.2)$$

Вторые производные  $V_{xz}$  и  $V_{yz}$  описывают кривизну силовой линии гравитационного поля. Напомним, что кривизной некоторой кривой называется предел отношения угла между направлениями касательных к кривой в двух близких точках к длине кривой между этими точками. В согласии с этим определением для кривизны  $k_x$  проекции силовой линии на плоскость меридиана можем записать:

$$k_x = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[ \left( \frac{g_x}{g} \right)_2 - \left( \frac{g_x}{g} \right)_1 \right] = \frac{1}{g} \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{V_{xz}}{g},$$

где  $\Delta z$  – длина силовой линии между точками 1 и 2. Для кривизны  $k_y$  – проекции силовой линии поля на плоскость первого вертикала аналогичное равенство имеет вид:  $k_y = \frac{V_{yz}}{g}$ . Величина обратная кривизне называется

радиусом кривизны кривой. Известно, что радиус  $\rho$  кривизны уровенной поверхности геоида в плоскости нормального сечения его в азимуте  $A$  определяется, исходя из равенства,

$$-\frac{g}{\rho} = (V_{xx} \cos^2 A + V_{xy} \sin 2A + V_{yy} \sin^2 A), \quad (3.3)$$

где символом  $g$  обозначена сила тяжести (на спутниковых высотах – сила притяжения). Если в (3.3) принять  $A=0^\circ$ , то  $V_{xx} = -g/N$ , а при  $A=90^\circ$   $V_{yy} = -g/M$ , где  $N$  и  $M$  суть радиусы кривизны сечения геоида в плоскостях меридиана и первого вертикала. Это означает, что производные  $V_{xx}$  и  $V_{yy}$  характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности потенциала силы притяжения (на поверхности Земли – уровенной поверхности потенциала силы тяжести, т.е. геоида).

Обозначим через  $\rho_{\max}$  и  $\rho_{\min}$  радиусы кривизны главных нормальных сечений, имеющих минимальную и максимальную кривизну соответственно. Найдем азимуты направлений  $A_{\max}$  и  $A_{\min}$ , им соответствующие, называемые также азимутами направлений главных нормальных сечений. С

этой целью исследуем правую часть равенства (3.3) на экстремум на множестве значений  $0^\circ \leq A \leq 360^\circ$ , приравнивая производную по  $A$  нулю. Имеем:

$$-2V_{xx} \sin A \cos A + 2V_{xy} \cos 2A + 2V_{yy} \sin A \cos A = 0,$$

$$(V_{yy} - V_{xx}) \sin 2A + 2V_{xy} \cos 2A = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2A = -\frac{2V_{xy}}{V_{yy} - V_{xx}} = -\frac{2V_{xy}}{V_{\Delta}}, \quad (3.4)$$

где обозначено  $V_{\Delta} = V_{yy} - V_{xx}$ . Решение тригонометрического уравнения (3.4) дает значения азимутов  $A_{\max}$  и  $A_{\min}$ , различающиеся на  $90^\circ$ .

Размерность вторых производных гравитационного потенциала соответствует размерности производной силы притяжения по некоторому

направлению, т.е.  $\left[ \frac{\partial g}{\partial n} \right] = [\text{сек}]^{-2}$ . Это очень крупная единица, на несколько

порядков превышающая величины вторых производных, характерные для Земли и других планет. По этой причине в качестве единицы измерения используется одна миллиардная этой величины, называемая *Этвеш* (1 Этвеш =  $10^{-9} \text{сек}^{-2}$ ), в честь венгерского физика Р.фон Этвеша, разработавшего конструкцию прибора для измерения вторых производных потенциала силы тяжести – гравитационного вариометра. В частности, для модели однородной сферической Земли вторые производные гравитационного потенциала имеют следующие числовые значения:

$$V_{xx} = V_{yy} = -1540 \text{ Э}, \quad V_{zz} = 3080 \text{ Э}, \quad V_{xy} = V_{xz} = V_{yz} = 0 \text{ Э}.$$

#### 4. Уравнения спутниковой градиентометрии

Исходя из определения гравитационного потенциала, для каждой из двух пробных масс бортового спутникового градиентометра в правой прямоугольной геоцентрической средней экваториальной системе координат запишем:

$$\ddot{X}_1 = \nabla V_1, \quad \ddot{X}_2 = \nabla V_2. \quad \text{Тогда} \quad \Delta \vec{a} = \ddot{X}_2 - \ddot{X}_1 = \nabla V_2 - \nabla V_1.$$

Последнее равенство разделим на малое расстояние  $s$  между массами:

$$\frac{\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1}{s} = \frac{\nabla V_2 - \nabla V_1}{s}.$$

Осуществляя предельный переход, получим:

$$\frac{d\Delta \vec{a}}{ds} = \frac{d(\nabla V_2 - \nabla V_1)}{ds}. \quad (4.1)$$

Основные затруднения при выводе соотношений спутниковой градиентометрии связаны с необходимостью представления компонент матрицы (3.1) в сферических координатах, поскольку гравитационный потенциал, моделируемый рядом объемных сферических функций (1.2), представляет собой функцию сферических координат. Учитывая это, запишем оператор Гамильтона в форме, обеспечивающей связь прямоугольных координат со сферическими:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Однократное воздействие оператора (12.2) на скалярную функцию сферических координат (12.1) порождает вектор

$$\nabla V(r, \varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Повторное воздействие оператора Гамильтона, записанного в форме (4.2), на вектор (4.3) дает матрицу  $\mathfrak{J}$  вторых производных гравитационного потенциала, элементы которой в отличие от (3.1) будут выражаться в виде производных по сферическим координатам [2].

Приведем далее итоговую сводку формул, связывающих вторые производные гравитационного потенциала по осям уже использовавшейся выше правой прямоугольной спутникоцентрической горизонтной системе координат  $Sxyz$  со вторыми его производными по сферическим координатам:

$$\begin{aligned} V_{xx} &= \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} V_r, \\ V_{yy} &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} V_{\lambda\lambda} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} V_{\varphi} + \frac{1}{r} V_r, \\ V_{zz} &= V_{rr}, \\ V_{xy} &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi} V_{\varphi\lambda} + \frac{\sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} V_{\lambda}, \\ V_{xz} &= -\frac{1}{r} V_{r\varphi} + \frac{1}{r^2} V_{\varphi}, \\ V_{yz} &= -\frac{1}{r \cos \varphi} V_{r\lambda} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} V_{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Проводя непосредственное дифференцирование ряда (1.2) по сферическим координатам, а затем подставляя эти производные в (4.4), получим явный вид формул (4.4) в правой прямоугольной спутникоцентрической горизонтной системе координат  $S_{xyz}$  :

$$V_{xx} = -\frac{GM}{r^3} + \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times \left[ \frac{\partial^2 P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi^2} - (n+1)P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (4.5)$$

$$V_{yy} = -\frac{GM}{r^3} - \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \times \left[ \frac{m^2}{\cos^2 \varphi} P_{nm}(\sin \varphi) + (n+1)P_{nm}(\sin \varphi) + tg \varphi \cdot \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \right], \quad (4.6)$$

$$V_{zz} = \frac{2GM}{r^3} + \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (n+2) \cdot (n+1) \cdot (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (4.7)$$

$$V_{xy} = -\frac{GM}{R^3 \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} m \cdot (C_{nm} \sin m\lambda - S_{nm} \cos m\lambda) \times \left[ \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} + tg \varphi \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (4.8)$$

$$V_{xz} = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (n+2) \cdot (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (4.9)$$

$$V_{yz} = -\frac{GM}{R^3 \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} m \cdot (n+2) \cdot (C_{nm} \sin m\lambda - S_{nm} \cos m\lambda) \cdot P_{nm}(\sin \varphi). \quad (4.10)$$

Более подробное изложение вывода формул (4.4) – (4.10) можно найти в пособии [2].

## 5. Принципы измерения вторых производных гравитационного потенциала

В классической наземной гравиметрии главной измеряемой величиной является модуль вектора силы тяжести – первая нормальная производная соответствующего потенциала. Известно, однако, что, повышая порядок измеряемой производной, возможно добиться относительного увеличения амплитуды коротковолновой компоненты поля, вследствие чего последняя определяется более уверенно. Вот почему, как уже указывалось выше, для оценивания параметров высокочастотной (т.е. коротковолновой) составляющей гравитационного поля, описывающих по мере возрастания степени вычисляемых гармоник все более мелкие особенности его структуры, выгоднее использовать измерения вторых производных потенциала ньютоновской силы притяжения.

Рассмотрим основные принципы бортовых измерений вторых производных гравитационного потенциала. Покажем, что градиентометрические измерения представляют собой измерения



характеристик относительного движения элементов динамической системы пробных масс инструмента-градиентометра.

Пусть в произвольной спутникоцентрической прямоугольной системе координат  $Sx_1x_2x_3$  положение точки описывается трехмерным вектором  $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$ . Тогда в отсутствии влияния сил негравитационной природы

$$\ddot{x}_i(S) = \frac{\partial V(S)}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.1)$$

где  $\ddot{x}_j(S)$  – составляющая ньютоновской силы притяжения по  $i$ -ой оси в точке  $S$ ,  $V(S)$  – потенциал силы притяжения в той же точке. Запишем (5.1) для некоторой точки  $P_1$ , близкой к  $S$ , и разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $S$ :

$$\ddot{x}_i(P_1) = \ddot{x}_i(S) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j(P_1, S)$$

Аналогично для точки  $P_2$ :

$$\ddot{x}_i(P_2) = \ddot{x}_i(S) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j(P_2, S)$$

Относительное ускорение единичных пробных масс, находящихся в точках  $P_1$  и  $P_2$ , запишем в виде разности:

$$d\ddot{x}_i = \ddot{x}_i(P_2) - \ddot{x}_i(P_1) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V(S)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j(P_2, P_1), \quad (5.2)$$

где принято:  $d\vec{x}(P_2, P_1) = \vec{x}(P_2) - \vec{x}(P_1) = (dx_1, dx_2, dx_3)^T$ . Таким образом,

в соответствии с (5.2) измерение вторых производных  $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$  сводится к

измерению компонент  $d\ddot{x}_i$  вектора  $d\ddot{\vec{x}}$  относительного ускорения и компонент  $dx_j$  вектора  $d\vec{x}(P_2, P_1)$  относительного положения пробных масс спутникового градиентометра.

Компоненты  $d\ddot{x}_i$  вектора  $d\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(P_2) - \ddot{\vec{x}}(P_1) = (d\ddot{x}_1, d\ddot{x}_2, d\ddot{x}_3)^T$  разности ускорений, действующих на каждую из разнесенных в пространстве пробных масс, измеряются с помощью трехкомпонентного акселерометра, принцип действия которого может быть описан следующим образом. Пусть внутри движущегося объекта на пружинных подвесах, имеющих лишь одну степень свободы перемещения вдоль оси  $X$ , установлены два идентичных пробных тела единичной массы. При движении в однородном гравитационном поле и отсутствии негравитационных возмущений на оба тела (и на объект-носитель) будут действовать одинаковые ускорения. Это означает, что пробные тела будут находиться на не меняющемся со временем расстоянии друг от друга, а их относительные ускорения будут равны нулю. Тогда в соответствии с (5.2) будут равны нулю и все вторые производные поля (напомним, что в данном случае нами рассматривается движение в однородном поле).

В неоднородном гравитационном поле на пробные массы в каждый момент времени будут действовать ускорения, различные и по величине, и по направлению, вследствие чего расстояние между массами будет меняться, а относительное ускорение их уже не будет нулевым [2].

## 6. Кинематика относительного движения двух искусственных спутников

Следуя [1], рассмотрим систему двух искусственных спутников  $S_1$  и  $S_2$ , в некоторый момент  $t$  находящихся на расстоянии  $s$  друг от друга в точках с координатами  $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_2$  (см. рис. 1). Координаты спутников даны здесь в правой прямоугольной планетоцентрической экваториальной системе координат  $OXYZ$ , которую далее будем называть абсолютной.

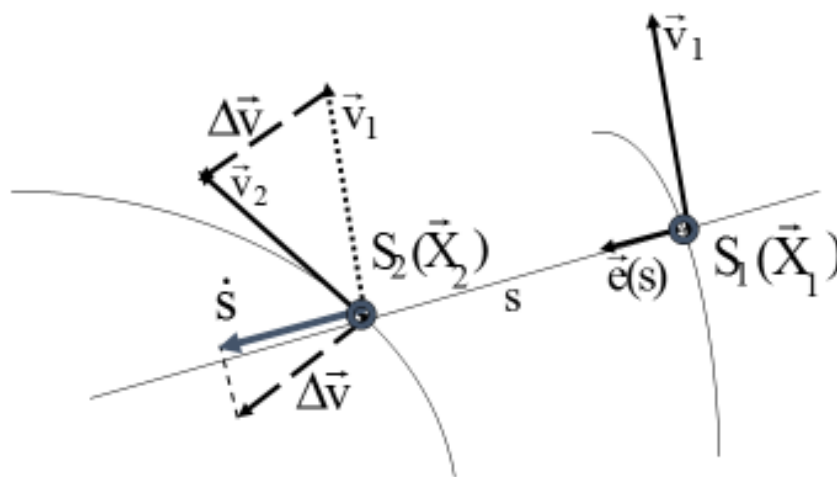


Рис.1. Кинематическая схема движения двух искусственных спутников.

Векторы линейных скоростей спутников  $S_1$  и  $S_2$  в абсолютной системе координат обозначим символами  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  соответственно, символом  $\bar{e}(s)$  обозначим орт направления  $S_1 S_2$ . Тогда относительная дальность между спутниками (скалярная величина):

$$s = |\bar{X}_2 - \bar{X}_1|, \quad (6.1)$$

относительная скорость (вектор):

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1, \quad (6.2)$$

и относительное ускорение (вектор):

$$\Delta \bar{a} = \ddot{\bar{X}}_2 - \ddot{\bar{X}}_1. \quad (6.3)$$

Спроектируем вектор  $\Delta \bar{v}$  на направление  $S_1 S_2$ , получая значение относительной лучевой скорости  $\dot{s}$  спутников в абсолютной системе координат:

$$\dot{s} = (\Delta \bar{v} \cdot \bar{e}(s)) = \frac{1}{s} (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \cdot (\dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1), \quad (6.4)$$

поскольку

$$\bar{e}(s) = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{s}.$$

Изменение относительной лучевой скорости  $\dot{s}$  со временем получим путем дифференцирования равенства (6.4):

$$\begin{aligned} \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ (\dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1) \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{s} \right] &= (\ddot{\bar{X}}_2 - \ddot{\bar{X}}_1) \cdot \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{s} + \\ &+ (\dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1) \cdot \left( \frac{\dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1}{s} - \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{s} \cdot \frac{\dot{s}}{s} \right) = (\Delta \bar{a} \cdot \bar{e}(s)) + \frac{1}{s} [(\Delta \bar{v} \cdot \Delta \bar{v}) - (\dot{s})^2], \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $(\Delta \bar{a} \cdot \bar{e}(s))$  - проекция вектора относительного ускорения на луч зрения  $S_1 S_2$ .

Предположим далее, что спутник  $S_1$  обращается по круговой орбите радиуса  $R$ . Введем правую прямоугольную вращающуюся орбитальную спутникоцентрическую систему координат  $S_1$   $xuw$ . Ось  $x$  этой системы направим по вектору линейной скорости спутника  $S_1$ , ось  $y$  устремим по направлению его планетоцентрического радиуса-вектора, ось  $w$ , дополняющая систему координат до правой тройки векторов, окажется при этом направленной по нормали к плоскости орбиты спутника  $S_1$ , часто называемой *опорной* орбитой.

Будем полагать, что орбитальная система координат  $S_1$   $xuw$  вращается в абсолютном пространстве с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ . Тогда в системе координат  $S_1$   $xuw$  имеем для 1) вектора относительной дальности  $\bar{r}$  спутников  $S_1$  и  $S_2$ , 2) вектора относительной их скорости  $\Delta\bar{v}'$ , 3) вектора относительного их ускорения  $\Delta\bar{a}'$ , 4) радиуса-вектора  $\bar{R}$  спутника  $S_1$ , 5) вектора угловой скорости вращения  $\bar{\omega}$  спутника  $S_1$  следующие представления в компонентах:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}, \quad \Delta\bar{v}' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{w} \end{pmatrix}, \quad \Delta\bar{a}' = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{w} \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

Зависимость между вектором скорости  $\bar{v}$  в абсолютной системе координат и вектором скорости  $\bar{v}'$  во вращающейся системе координат на основании теоремы Эйлера о распределении скоростей дается известным

выражением:  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}' + [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{R}}]$ . Для того, чтобы получить зависимость между относительными скоростями двух спутников в абсолютной и вращающейся системах координат предположим, что в момент  $t$  спутник  $S_1$  находится в точке с координатами  $(0, R, 0)$ , а спутник  $S_2$  - в точке с координатами  $(x, R+y, w)$ . Тогда вектора абсолютных скоростей спутников равны:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}'_1 + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \bar{\mathbf{v}}'_1 + \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{v}}'_2 + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ R+y \\ w \end{pmatrix} \right] = \bar{\mathbf{v}}'_2 + \begin{pmatrix} \omega(R+y) \\ -\omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

а искомый вектор относительной их скорости в абсолютной системе координат будет иметь вид:

$$\Delta \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}'_2 - \bar{\mathbf{v}}'_1 + \begin{pmatrix} \omega y \\ -\omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \omega y \\ \dot{y} - \omega x \\ \dot{w} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

В согласии с (6.4) относительная лучевая скорость  $\dot{s}$  как проекция вектора относительной скорости  $\Delta \bar{\mathbf{v}}$  на направление  $S_1 S_2$  будет равна:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= (\Delta \bar{v} \cdot \bar{e}(r)) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} \dot{x} + \omega y \\ \dot{y} - \omega x \\ \dot{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{s} [x(\dot{x} + \omega y) + y(\dot{y} - \omega x) + w\dot{w}] = \\ &= \frac{1}{s} (x\dot{x} + y\dot{y} + w\dot{w}) = (\Delta \bar{v}' \cdot \bar{e}(r)). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Равенство (6.7) означает, что значение относительной лучевой скорости двух искусственных спутников не зависит от того, измеряется ли она в абсолютной или во вращающейся системе координат.

Зависимость между относительными ускорениями в абсолютной  $\Delta \bar{a}$  и вращающейся  $\Delta \bar{a}'$  системах координат (при  $\omega = \text{const}$ ) дается выражением:

$$\Delta \bar{a} = \Delta \bar{a}' + 2[\bar{\omega} \times \Delta \bar{v}'] + [\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{r}]]. \quad (6.8)$$

Выполняя в (13) операции векторного перемножения, получим для кориолисова ускорения, возникающего в результате одновременного вращения системы координат и движения спутника относительно вращающейся системы:

$$2[\bar{\omega} \times \Delta \bar{v}'] = 2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} \omega \dot{y} \\ -\omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и переносного (центробежного) ускорения:

$$[\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{r}]] = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем:

$$\Delta \bar{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} + 2\omega \dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{y} - 2\omega \dot{x} - \omega^2 y \\ \ddot{w} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

В заключение параграфа еще раз обратим внимание на то, что бортовые измерения характеристик относительного движения спутников выполняются во вращающейся орбитальной системе координат. Оценивание же по данным бортовых измерений значений параметров модели гравитационного потенциала требует преобразования измеряемых характеристик относительного движения в абсолютную планетоцентрическую систему координат [1].

## 7. Динамика относительного движения двух искусственных спутников

Для получения уравнений наблюдений межспутниковых измерений необходимо определить вектора положений и скоростей, входящих в систему искусственных спутников, что может быть сделано в результате решения дифференциальных уравнений, описывающих их движение [1]. Запишем эти уравнения в абсолютной планетоцентрической системе координат  $OXYZ$ :

$$\ddot{\bar{X}}_1 = -GM \frac{\bar{X}_1}{|\bar{X}_1|^3} + \bar{F}_1, \quad \ddot{\bar{X}}_2 = -GM \frac{\bar{X}_2}{|\bar{X}_2|^3} + \bar{F}_2, \quad (7.1)$$



где  $\bar{\mathbf{F}}_1$  и  $\bar{\mathbf{F}}_2$  представляют собой векторные суммы ускорений, возмущающих движение спутников  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, относительно кеплеровского их движения в центральном гравитационном поле. Другими словами, при  $\bar{\mathbf{F}}_1 = \bar{\mathbf{F}}_2 = 0$  рассматриваемая задача сводится к задаче двух тел, решением которой является движение каждого из спутников по кеплеровскому эллипсу.

Образум разность

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_2 - \bar{\mathbf{F}}_1 &= (\ddot{\bar{\mathbf{X}}}_2 - \ddot{\bar{\mathbf{X}}}_1) + \text{GM} \left( \frac{\bar{\mathbf{X}}_2}{|\bar{\mathbf{X}}_2|^3} - \frac{\bar{\mathbf{X}}_1}{|\bar{\mathbf{X}}_1|^3} \right) = \\ &= \Delta\bar{\mathbf{a}} + \text{GM} \left( \frac{\bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{X}}_1}{|\bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{X}}_1|^3} - \frac{\bar{\mathbf{X}}_1}{|\bar{\mathbf{X}}_1|^3} \right). \end{aligned}$$

Учтем далее, что

$$\text{GM} = \omega^2 R^3, \quad |\bar{\mathbf{X}}_1| = R, \quad |\bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{X}}_1| = |\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{R}}| = \sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2},$$

вследствие чего

$$\Delta\bar{\mathbf{F}} = \Delta\bar{\mathbf{a}} + \omega^2 R^3 \left[ \frac{\bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{X}}_1}{\left( \sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2} \right)^3} - \frac{\bar{\mathbf{X}}_1}{R^3} \right]. \quad (7.2)$$

Переходя в орбитальную систему координат  $S_1$   $xuw$ , подставим в (7.2) выражение (6.9) и получим дифференциальные уравнения (7.3) относительного

движения двух искусственных спутников в покомпонентной форме. Уместно здесь будет подчеркнуть, что система дифференциальных уравнений второго порядка (7.3) представляет собой систему точных уравнений движения спутника  $S_2$  относительно спутника  $S_1$ .

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \frac{\omega^2 R^3}{\left[\sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2}\right]^3} x = \Delta F_x,$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 (y+R) + \frac{\omega^2 R^3}{\left[\sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2}\right]^3} (y+R) = \Delta F_y,$$

$$\ddot{w} + \frac{\omega^2 R^3}{\left[\sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2}\right]^3} w = \Delta F_w. \quad (7.3)$$

Компоненты  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta F_w$  в общем случае являются нелинейными функциями координат и скоростей обоих искусственных спутников. Для решения уравнений такого рода, как правило, используются численные методы, которые в большинстве случаев оказываются единственно эффективным средством решения задач баллистического функционирования спутниковой системы.

## 8. Уравнения относительного движения двух близких искусственных спутников

С практической точки зрения особенный интерес представляет исследование относительного движения двух искусственных спутников, движущихся на небольшом (по сравнению с удалением их от центра масс

небесного тела) расстоянии друг от друга [3]. Предположим, что компоненты вектора относительной дальности малы по сравнению с величиной  $R$ , т.е.

$$x, y, w \ll R,$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + (y+R)^2 + w^2})^3} &= \left\{ R^2 \left[ \frac{x^2}{R^2} + \left(1 + \frac{y}{R}\right)^2 + \frac{w^2}{R^2} \right] \right\}^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{R^3} \left( -\frac{3x^2}{2R^2} + 1 - 3\frac{y}{R} - \frac{3y^2}{2R^2} + \frac{15y^2}{2R^2} - \frac{3w^2}{2R^2} + \dots \right) = \quad (8.1) \\ &= \frac{1}{R^3} \left[ 1 - 3\frac{y}{R} - \frac{3}{2R^2}(x^2 + w^2 - 4y^2) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (8.1) в (6.9), получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 \frac{xy}{R} - \frac{3}{2}\omega^2 \frac{x}{R^2}(x^2 + w^2 - 4y^2) + \dots &= \Delta F_x, \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y - \frac{3}{2}\omega^2 \frac{1}{R^2}(x^2 + w^2 + 2y^2) - \frac{3}{2}\omega^2 \frac{y}{R^2}(x^2 + w^2 - 4y^2) + \dots &= \Delta F_y, \\ \ddot{w} + \omega w - 3\omega^2 \frac{yw}{R} - \frac{3}{2}\omega^2 \frac{w}{R^2}(x^2 + w^2 - 4y^2) + \dots &= \Delta F_w. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ограничиваясь первым приближением, запишем систему (8.2) в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\omega\dot{y} &= \Delta F_x, \\
\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y &= \Delta F_y, \\
\ddot{w} + \omega^2 w &= \Delta F_w.
\end{aligned}
\tag{8.3}$$

Система (8.3) имеет достаточно простое решение лишь при отсутствии возмущающих ускорений, т.е.  $\Delta \vec{F} = \mathbf{0}$ .

Тогда:

$$x = x_0 + 6(\sin \omega t - \omega t)y_0 + \left( \frac{4}{\omega} \sin \omega t - 3t \right) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) \dot{y}_0,$$

$$y = (4 - 3 \cos \omega t)y_0 + \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) \dot{x}_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot \dot{y}_0,$$

$$w = \cos \omega t \cdot w_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot \dot{w}_0,$$

$$\dot{x} = 6\omega(1 - \cos \omega t)y_0 + (4 \cos \omega t - 3)\dot{x}_0 - 2 \sin \omega t \cdot \dot{y}_0, \tag{8.4}$$

$$\dot{y} = 3\omega \sin \omega t \cdot y_0 + 2 \sin \omega t \cdot \dot{x}_0 + \cos \omega t \cdot \dot{y}_0,$$

$$\dot{w} = -\omega \sin \omega t \cdot w_0 + \cos \omega t \cdot \dot{w}_0,$$

где  $\Psi_0 = (x_0, y_0, w_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{w}_0)^T$  - вектор состояния относительного движения в начальный момент  $t_0 = 0$ , а  $\Psi = (x, y, w, \dot{x}, \dot{y}, \dot{w})^T$  - вектор

состояния относительного движения в текущий момент  $t$ . Более компактно решение (8.4) может быть записано в векторно-матричном виде:  $\vec{\Psi} = \Pi(t) \cdot \vec{\Psi}_0$ , где  $\Pi(t)$  – матрица коэффициентов при компонентах вектора  $\vec{\Psi}_0$  в системе уравнений (8.4). Матрицу  $\Pi(t)$  иногда называют *матрицей прогноза*, поскольку она осуществляет преобразование начального вектора состояния  $\vec{\Psi}_0$  в вектор  $\vec{\Psi}$ , соответствующий моменту  $t$ .

Если прогноз осуществляется на некоторый момент в будущем  $t > t_0$ , аргумент  $t$  матрицы прогноза считают положительным, если прогноз осуществляется на момент в прошлом ( $t < t_0$ ), аргумент  $t$  считается отрицательным, причем  $\Pi(-t) = \Pi(t)^{-1}$ . Имеет место также следующее свойство матрицы прогноза: если  $t_0 < t_1 < t_2$ , то

$$\Pi(t_2 - t_0) = \Pi(t_2 - t_1) \Pi(t_1 - t_0),$$

так как

$$\vec{\Psi}_1 = \Pi(t_1 - t_0) \vec{\Psi}_0$$

и

$$\vec{\Psi}_2 = \Pi(t_2 - t_1) \vec{\Psi}_1 = \Pi(t_2 - t_1) \Pi(t_1 - t_0) \vec{\Psi}_0.$$

Этот вывод можно обобщить на несколько временных интервалов

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n :$$

$$\Pi(t_n - t_0) = \Pi(t_n - t_{n-1}) \Pi(t_{n-1} - t_{n-2}) \dots \Pi(t_1 - t_0).$$

Важной особенностью решения (8.4) однородной системы дифференциальных уравнений (8.3) является независимость движения в плоскости опорной орбиты (компоненты  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ) и уравнений, описывающих боковое движение в плоскости, перпендикулярной к плоскости опорной орбиты (компоненты  $w, \dot{w}$ ).

## 9. Миссии CHAMP, GRACE и GOCE

Как уже указывалось выше, для построения детальных многопараметрических моделей потенциала высокого разрешения необходимо использование дифференциальных методов измерений в системах с изменяемой геометрией расположения элементов. Интерес к указанным методам обусловлен их высокой точностью и возможностями оперативного разрешения подробностей поля в широком диапазоне частот.

Рассмотрим две космические программы, предусматривающие выполнение прецизионных дифференциальных межспутниковых измерений в интересах определения параметров внешнего гравитационного поля Земли и его изменений с течением времени [1].

Старт первой программы такого рода был дан запуском 15 июля 2000 года с космодрома Плесецк на близполярную круговую орбиту с номинальной высотой 400 км ИСЗ нового поколения CHAMP (**CH**allenging **M**ini-satellite **P**ayload for geophysical research and application).

Основные цели этого западноевропейского (GFZ-Потсдам, Германия) флагманского проекта состояли в определении:

а) параметров гравитационного поля Земли в области низких и средних частот и изменения этих параметров со временем,

б) параметров глобального магнитного поля Земли и изменения этих параметров со временем.

Остановившись далее лишь на гравиметрической составляющей программы, перечислим виды выполнявшихся измерений:

1. Координаты ИСЗ и псевдодальности, измеряемые бортовыми 24-х канальными двухчастотными GPS-приемниками между высокими ИСЗ созвездия GPS (высота около 19 000 км) и низким ИСЗ CHAMP. Массив высокоточных координат ИСЗ CHAMP, отнесенных к конкретным моментам времени, служит основным источником информации о гравитационном поле Земли. Описанная схема измерений представляет собой вариант межспутникового слежения в системе разновысоких спутников (HL SST).
2. Измеряемые трехкомпонентным акселерометром составляющие вектора ускорения ИСЗ CHAMP, позволяющие оценить (и по возможности исключить) влияние возмущений негравитационной природы (в первую очередь, сопротивления атмосферы Земли).
3. Измеряемые звездным видеоприбором углы ориентации осей антенн бортовых GPS-приемников относительно звезд.

Кроме того, осуществлялась бортовая альтиметрия поверхности Мирового океана и наземная лазерная локация спутника. ИСЗ CHAMP, предполагаемый ресурс которого был рассчитан на пять лет работы. В реальности спутник проработал вдвое дольше, завершив свою миссию в 2010 году.

Продолжением и развитием исследований, начатых миссией CHAMP, стала реализация совместного германо-американского проекта GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment), в рамках которой 17 марта 2002 года также с космодрома Плесецк были запущены два спутника типа CHAMP. Запуск их осуществлен на близкие почти круговые близполярные ( $i = 89^\circ$ ) орбиты с номинальной высотой 485 км, при этом расстояние между спутниками изменяется в пределах от 170 до 270 км.

Каждый из этих спутников оснащен следующей бортовой аппаратурой:

- Двухчастотным (24.5 Гц и 32.7 Гц) радиодальномером, характеризуемым ошибкой единичного измерения дальности 10 микрон. Дифференцирование массива дальностей по времени позволяет определять относительную лучевую скорость объектов с ошибкой 0.1 микрона в секунду;
- 24-х канальным двухчастотным GPS-приемником;
- Высокоточным 3-х компонентным акселерометром;
- Звездной видеокамерой, позволяющей определять ориентацию основных осей спутника среди звезд с ошибкой не хуже 10 дуговых секунд;

Программа GRACE, ориентированная на детальные исследования гравитационного поля Земли и его изменений во времени, предусматривает выполнение:

1. Бортовых межспутниковых измерений относительных дальностей и лучевых скоростей в системе двух низких ИСЗ GRACE, находящихся на расстояниях порядка  $220 \pm 50$  км.
2. Высокоточного абсолютного и относительного позиционирования элементов системы GRACE посредством привязки к ИСЗ GPS.
3. Измерений компонент вектора ускорения и углов ориентации среди звезд основных осей каждого из летательных аппаратов.

Легко видеть, что в описанном проекте реализуется комбинация двух вариантов межспутникового слежения (LL SST + HL SST) как между низкими, так и низкими и высокими ИСЗ. Полученные результаты используются для оперативного определения параметров геопотенциала в среднем и высоком диапазонах частот. Реализация проекта продолжается и в настоящее время.

Весьма важно, что в каждом из рассмотренных проектов ключевую роль играет высокоточное позиционирование гравиметрического ИСЗ посредством привязки к созвездию спутников системы GPS. Заметим, что применение дифференциальных спутниковых методов предъявляет достаточно строгие требования к точности положений элементов спутниковой системы. В



частности, измерения межспутниковых расстояний с ошибкой 10 мкм и относительных лучевых скоростей с ошибкой 0.1 мкм/сек требуют точности позиционирования спутников с ошибкой не более нескольких сантиметров, недостижимой при использовании традиционных способов космической навигации. Получаемые в реальном времени расхождения результатов GPS-привязки ИСЗ GRACE с данными наземной лазерной локации составляют 2-3 см, что свидетельствует об эффективности применения глобальных навигационно-геодезических спутниковых систем для высокоточного позиционирования КА.

Таким образом, система GPS, представляющая собой одно из важнейших технических достижений конца прошлого столетия, в наши дни оказывается непосредственно интегрированной не только в навигацию и геодезию, но и в гравиметрию, геофизику и другие науки о Земле.

Градиентометрический проект Европейского Космического Агентства **GOCE**, предусматривал выполнение на сверхнизкой околоземной орбите бортовых измерений вторых производных гравитационного потенциала для построения высокоточных моделей гравитационного поля Земли и фигуры геоида высокого разрешения. Такая модель служит уточнению представлений исследователей о внутреннем строении Земли и динамических процессах, происходящих в ее коре и внешней мантии, в частности, о движении литосферных плит. В сочетании с имеющимися данными спутниковой альтиметрии высокоточная модель геопотенциала также расширяет понимание процессов глобальной циркуляции вод Мирового Океана и связанных с ней изменений климата [2].

Искусственный спутник Земли **GOCE** (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) массой около 1000 кг был выведен на сверхнизкую почти круговую солнечно-синхронную орбиту с примерными значениями наклона  $i=96^{\circ}.5$ , эксцентриситета  $e \leq 0.0045$ , и высоты над поверхностью Земли  $H=240-250$  км. Запуск состоялся 17 марта 2009 года с космодрома Плесецк.

Спутник прекратил существование 11 ноября 2013 года, вдвое превысив планируемый ресурс полета.

Комплекс бортовой аппаратуры включал:

- систему компенсации негравитационного сноса (атмосферного торможения): ионный двигатель, для создания импульса использовавший ионизированные атомы ксенона;
- двухчастотный 24-х канальный комбинированный GPS/ГЛОНАСС приемник, обеспечивающий высокоточное позиционирование спутника с ошибкой порядка 1-2 см;
- звездный видеоприбор для контроля ориентации главных осей искусственного спутника;
- прецизионный бортовой градиентометр для измерения вторых производных геопотенциала с ошибкой 10 (-3) Этвеш.

В процессе подготовки космической программы рассматривались два варианта конструкции градиентометра: индуктивный (сверхпроводящий) и емкостной. По ряду технических причин в качестве реализуемого варианта был выбран емкостной градиентометр, состоящий из трех высокочувствительных акселерометров. Каждый из этих акселерометров представляет собой пару пробных масс, располагающихся на близком расстоянии (около 0.5 м) симметрично относительно центра масс ИСЗ вдоль одной из трех взаимно перпендикулярных главных осей летательного аппарата (так называемая «конфигурация алмазного кристалла»).

В ходе эксперимента проводились измерения относительных ускорений каждой пары пробных масс, что позволило определять лишь диагональные элементы тензора вторых производных гравитационного потенциала.

Принципиально важной составляющей проекта стала непрерывная (каждые 10 секунд) высокоточная привязка спутника GOCE к ИСЗ созвездий космических навигационно-геодезических систем GPS и ГЛОНАСС, одновременно решающая две задачи. Во-первых, таким образом

обеспечивается высокоточная пространственная привязка каждого градиентометрического измерения, что позволяет в уравнениях поправок принимать  $d\bar{X}=0$ . Во-вторых, прямоугольные координаты спутника GOCE рассматриваются как псевдоизмерения, выполненные методом межспутникового слежения по схеме «высокий-низкий» (HL-SST) в системе высокоорбитальных ИСЗ систем GPS или ГЛОНАСС и низкоорбитального спутника GOCE. Такого рода псевдоизмерения обладают высокой информативностью с точки зрения оценивания низкочастотной компоненты модели гравитационного потенциала Земли и потому обрабатываются далее совместно с данными градиентометрических измерений. Низкая орбита спутника и высокая точность измерений позволили к окончанию программы наблюдений уменьшить погрешность определения фигуры планетарного геоида до первых сантиметров для трапеций со стороной от 100 километров и более.

В завершении разговора подчеркнем, что реализация программ CHAMP, GRACE и GOCE убедительно подтвердили обоснованность надежд специалистов на высокую точность, информативность и качество данных бортовых межспутниковых и градиентометрических измерений, а результаты определения многопараметрических моделей геопотенциала, приуроченных к конкретной эпохе, позволяют ныне говорить о выходе современной динамической космической геодезии на качественно новый геодинамический этап своего развития.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кащеев Р.А. Дифференциальные методы динамической космической геодезии. (Часть 1. Метод межспутникового слежения): учебное пособие. – Казань, Изд-во физического ф-та КГУ, 2005, 46 с.
2. Кащеев Р.А. Дифференциальные методы динамической космической геодезии. (Часть 2. Метод спутниковой градиентометрии): учебное пособие. – Казань, Изд-во физического ф-та КГУ, 2006, 40 с.
3. Колегов Г.А. Избранные разделы космической баллистики искусственных спутников Земли. Методическое пособие. – ЦНИИмаш, 2007, 271 с.
4. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. – М., Недра, 1981, 256 с.
5. Яшкин С.Н. Спутниковая градиентометрия и системы «спутник-спутник». Учебное пособие. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2009, 112 с.

последняя страница

*Учебное издание*

**Кащеев Рафаэль Александрович**

**Современные методы спутниковой гравиметрии**

*Дизайн обложки*

Подписано в печать 07.07.2015

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28