

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
*Кафедра астрономии и космической геодезии*

**Р.А.КАЩЕЕВ**  
**Методы определения параметров**  
**гравитационного потенциала небесных тел**  
**Конспект лекций**

**Казань – 2015**

**УДК 528.2**  
**ББК 26.21:39.62**

*Принято на заседании кафедры астрономии и космической геодезии*  
*Протокол № 12 от 15 мая 2015 года*

**Рецензент:**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент КГАСУ **В.С.Боровских**

**Кащеев Р.А.**

**Методы определения параметров гравитационного потенциала небесных тел.** Конспект лекций / Р.А.Кащеев. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 48 с.

Предлагаемый конспект лекций посвящен изложению теоретических и методических вопросов определения параметров моделей гравитационного потенциала по данным об эволюции орбит искусственных спутников исследуемого небесного тела. Пособие адресовано студентам, изучающим курс «Космическая геодезия» в рамках образовательной программы бакалавриата направления «Геодезия и дистанционное зондирование», реализуемой в Институте физики Казанского федерального университета.

© Кащеев Р.А., 2015

© Казанский университет, 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи определения параметров гравитационного потенциала небесного тела . . . . .	4
2. Уравнения возмущенного движения искусственного спутника. . . . .	7
3. Пертурбационная функция возмущающего потенциала. . . . .	17
4. О влиянии на движение ИСЗ иных возмущающих факторов. . . . .	22
5. Дифференцирование пертурбационной функции геопотенциала по осям прямоугольной геоцентрической системы координат. . . . .	32
6. Оценивание параметров модели потенциала небесного тела по данным об эволюции орбиты его искусственного спутника. . . . .	34
7. Изучение структуры гравитационного поля по лучевым ускорениям искусственного спутника. . . . .	38
8. Уравнение для лучевых ускорений искусственного спутника в терминах разложения по сферическим функциям. . . . .	43
<b>Литература . . . . .</b>	<b>47</b>

## 1. Постановка задачи определения параметров гравитационного потенциала небесного тела

Детальная и достоверная информация о гравитационных полях Земли и других тел Солнечной системы необходима для решения различных научных и прикладных задач. В их числе прежде всего следует назвать фундаментальную проблему изучения внутреннего строения небесных тел, геологической истории их формирования и эволюции на различных временных интервалах. Весьма важными являются астрометрические и геодезические вопросы установления основных направлений и отсчетных поверхностей, используемых для координатно-временного обеспечения (КВО) потребителей. Наконец, движение искусственных спутников и космических аппаратов (КА) в сфере гравитационного действия исследуемого небесного тела не может быть удовлетворительным образом описано и предсказано в отсутствии сведений о действующих на них силах, в ряду которых сила притяжения играет доминирующую роль. Задача определения параметров гравитационного поля приобретает в указанном контексте небесно-механический смысл, поскольку решение ее обеспечивает баллистические и навигационные потребности управления движением КА.

Таким образом, составляющая основу динамической космической геодезии и планетной гравиметрии проблема исследования гравитационных полей Земли и других небесных тел носит комплексный характер и представляет собой сферу приложения интересов различных областей науки и техники.

Сформулируем главную задачу динамической космической геодезии, часто также называемой спутниковой гравиметрией, как **определение фигур и внешних гравитационных полей планетных тел по данным разнородных спутниковых наблюдений, выполненных в различных точках пространства** [4]. Исходя из этого, методы ее решения должны носить возможно универсальный характер, учитывающий следующие особенности современного этапа исследования тел Солнечной системы:

- проведение измерений в различных точках пространства – с поверхности Земли, с орбиты ИСЗ, с борта КА, с орбиты искусственного спутника другого небесного тела или с его поверхности и т.д.;
- разнородный вид (размерности) используемых имеющихся и планируемых астрономических, гравиметрических и геодезических измерений (направления, углы, расстояния, скорости, ускорения, компоненты скоростей, ускорений, градиентов сил и т.д.), включая измерения в спутниковых системах с изменяемой геометрией расположения элементов;
- высокую точность и большой объем дистанционной спутниковой измерительной информации;
- значительные различия в размерах, массах, форме и внутреннем строении объектов исследований - тел Солнечной системы.

В данной работе нас будет главным образом интересовать проблема определения структуры внешнего гравитационного поля исследуемого тела, описываемого моделью потенциала ньютоновской силы притяжения, которая выбирается нами в форме разложения потенциала в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]. \quad (1.1)$$

В (1.1) для Земли приняты следующие обозначения:

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{сек}^2$  - кавендишева гравитационная постоянная,

$M_{\oplus}$  - масса и средний экваториальный радиус  $a_{\oplus}$  Земли,

$\rho, \theta, \lambda$  - геоцентрические сферические координаты точки внешнего околоземного пространства;

$\{C_{nm}, S_{nm}\}$  совокупность гармонических коэффициентов ряда (1.1),

представляющая собой модель гравитационного поля Земли. Уместно заметить, что множество коэффициентов бесконечного ряда (1.1) принадлежит бесконечномерному пространству последовательностей, однако, в случае неизбежного на практике усечения ряда (1.1) максимальным значением  $N$  индекса  $n$  это множество становится конечномерным, что позволяет выполнять все дальнейшие операции с ним в привычном конечномерном пространстве. Наконец,  $P_{nm}(\cos\theta)$  - присоединенные функции Лежандра, определяемые

известной формулой Родрига: 
$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n .$$

Здесь  $x = \cos\theta$ .

Представление (1.1) потенциала силы притяжения является наиболее употребительной и распространенной формой его модельного описания, что обусловлено следующими обстоятельствами:

- развитой теорией определения численных значений гармонических коэффициентов  $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ ;
- наглядностью геофизической интерпретации коэффициентов низких степеней и порядков;
- ортогональностью системы сферических функций на единичной сфере;
- наилучшим при фиксированном  $N$  среднеквадратическим приближением частичными суммами разложения по поверхностным сферическим функциям функции, непрерывно заданной на единичной сфере;
- наилучшим при фиксированном  $N$  среднеквадратическим приближением частичными суммами разложения (1.1) по объемным (шаровым) функциям гармонической функции  $V$  во всей внешней области пространства (области гармоничности).

В литературе обсуждаются и иные способы численно-аналитического описания потенциальной функции объемных масс.

В завершении параграфа подчеркнем, что наиболее эффективными экспериментальными методами решения проблемы определения параметров модели гравитационного поля небесных тел являются методы, основанные на анализе динамики движения космических аппаратов в зоне гравитационного притяжения исследуемых объектов [6].

## **2. Уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле небесного тела**

В первом приближении движение искусственного спутника в гравитационном поле притягивающего небесного тела сводится к классической задаче двух тел, в рамках которой притягивающее тело рассматривается как точечный объект, либо, что эквивалентно с точки зрения теории ньютоновского потенциала, как однородный шар. Тогда орбита искусственного спутника лежит в плоскости, занимающей неизменное положение в пространстве, а обращение описывается законами Кеплера и происходит по кеплеровскому эллипсу, не изменяющемуся с течением времени. В реальном случае на спутник действуют возмущающие силы, обусловленные многочисленными факторами гравитационной и негравитационной природы. Доминирующими среди них являются гравитационные возмущения, вызванные отличиями гравитационного поля притягивающего тела от поля притяжения материальной точки (однородного шара). Именно эти отличия, характеризующие неоднородность структуры поля силы притяжения, и, в свою очередь, обусловленные несферичностью фигуры и неоднородным внутренним строением Земли, представляют для динамической космической геодезии наибольший интерес.

В прямоугольной геоцентрической средней экваториальной земной системе координат  $\vec{X}$  уравнение возмущенного движения ИСЗ в согласии со вторым законом Ньютона запишется в виде:

$$\ddot{\vec{X}} + GM \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|^3} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{F}$  - равнодействующая всех сил, возмущающих движение ИСЗ. Понижая порядок этого векторного уравнения, переходим от трех дифференциальных уравнений второго порядка к шести (двум векторным) дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\dot{\vec{X}}_1 = \dot{\vec{X}} \quad (2.2)$$

$$\dot{\vec{X}}_1 + GM \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|^3} = \vec{F},$$

Важно отметить, что дифференциальные уравнения возмущенного движения, как правило, не интегрируются в аналитическом виде, для применения же численных методов интегрирования системы (2.2) удобнее от прямоугольной системы координат перейти в систему элементов спутниковой орбиты, в которой по крайней мере пять элементов меняются со временем существенно медленнее, чем вектора положения  $\vec{X}$  и скорости  $\dot{\vec{X}}_1$  ИСЗ.

Согласно Лагранжу, возмущенное движение следует рассматривать как непрерывно меняющееся невозмущенное (кеплеровское) движение. Инвариантом, связывающим невозмущенное и возмущенное движения в этом случае оказывается весь набор формул и соотношений невозмущенного движения. Любая формула невозмущенного движения остается справедливой и для возмущенного движения, однако при этом элементы орбиты, являющиеся



константами в случае невозмущенного движения, становятся в случае возмущенного движения функциями времени [8].

Другими словами, основная идея метода Лагранжа описания возмущенного движения спутника состоит в том, чтобы выразить его координаты и скорости через элементы орбиты, которые в случае возмущенного движения будут изменяться с течением времени. Такого рода движение в теории Лагранжа принято называть движением по оскулирующему эллипсу. Естественно предположить, что скорость изменения оскулирующих орбитальных элементов будет при этом напрямую зависеть от величины возмущений.

Обозначим элементы оскулирующей орбиты традиционным образом:

- $a$  – большая полуось оскулирующего эллипса;
- $e$  – эксцентриситет эллиптической орбиты;
- $i$  – наклонение плоскости оскулирующей орбиты к плоскости экватора;
- $\Omega$  – долгота (прямое восхождение) восходящего узла орбиты;
- $\omega$  – аргумент перигея, отсчитываемый в плоскости орбиты от восходящего узла до перигея;
- $\tau$  – момент прохождения через перигей; часто вместо него используют

среднюю аномалию  $M = M_0 + n(t - \tau)$ , где  $n = \frac{\sqrt{GM_{\oplus}}}{a^{3/2}}$  - среднее

движение. Напомним, что под средней аномалией понимается угол, на который поворачивается за отрезок времени  $t - \tau$  радиус-вектор, вращающийся равномерно со средней угловой скоростью  $n$ . Также иногда вместо  $M$  пользуются элементом  $M_0$ , называемым средней аномалией на начальный момент (эпоху)  $t_0$ :  $M_0 = n(t_0 - \tau)$ .

Входящую в (2.2) векторную сумму  $\vec{F}$  возмущающих сил удобно далее разложить по направлению осей правой прямоугольной спутникоцентрической орбитальной системы координат  $S_{\nu wr}$ , ось  $r$  которой направлена от центра масс Земли по радиусу вектору ИСЗ, ось  $\nu$  устремлена по трансверсали – лежащей в плоскости орбиты спутника нормали к его радиусу вектору, ось  $w$  – по нормали к плоскости орбиты. Тогда система (2.2) двух векторных дифференциальных уравнений первого порядка приводится к системе шести скалярных дифференциальных уравнений (2.3), описывающих эволюцию элементов орбиты ИСЗ под действием совокупности  $\vec{F}=(F_\nu, F_w, F_r)^T$  возмущающих сил. Иными словами, уравнения (2.3) описывают влияние суммарного вектора  $\vec{F}=(F_\nu, F_w, F_r)^T$  возмущающих сил на скорость изменения элементов оскулирующей орбиты ИСЗ и называются *уравнениями Ньютона*:

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{2a}{b} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} \left( eF_r \sin \nu + \frac{p}{r} F_\nu \right), \\
 \dot{e} &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} \left[ F_r \sin \nu + \left( \frac{r+p}{r} \cos \nu + \frac{er}{p} \right) F_\nu \right], \\
 \dot{i} &= \frac{r}{b} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} F_w \cos(\omega + \nu), \\
 \dot{\Omega} &= \frac{r}{b} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} F_w \frac{\sin(\omega + \nu)}{\sin i}, \\
 \dot{\omega} &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} \left[ -\frac{1}{e} F_r \cos \nu + \frac{r+p}{ep} F_\nu \sin \nu - \frac{r}{p} F_w \sin(\omega + \nu) \operatorname{ctgi} \right], \\
 \dot{M} &= n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{GM_\oplus}} \left[ \left( \cos \nu - 2e \frac{r}{p} \right) F_r - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) F_\nu \sin \nu \right].
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

В (2.3) принято, что  $n = \frac{\sqrt{GM_{\oplus}}}{a^{3/2}}$  - среднее движение.

Систему уравнений (2.3) можно записать в матричном виде, разделив ее на две части [8]:

- три уравнения для медленно изменяющихся переменных, не имеющих вековых возмущений (элементы  $a, e, i$ ),

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \frac{b}{a\sqrt{GM_{\oplus}}} \cdot N_1 \begin{pmatrix} F_r \\ F_v \\ F_w \end{pmatrix};$$

- три уравнения для быстрых переменных, имеющих вековые возмущения (элементы  $M, \Omega, \omega$ ),

$$\begin{pmatrix} \dot{M} - n \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{b}{a\sqrt{GM_{\oplus}}} \cdot N_2 \begin{pmatrix} F_r \\ F_v \\ F_w \end{pmatrix},$$

где матрицы  $N_1$  и  $N_2$  имеют вид:

$$N_1 = \begin{pmatrix} \frac{2a^2 e \sin \nu}{p} & \frac{2a^2}{\rho} & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu + \frac{\rho}{p}(\cos \nu + e) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{p} \cos(\nu + \omega) \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left( \cos \nu + 2e \frac{\rho}{p} \right) & \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left( 1 + \frac{\rho}{p} \right) \sin \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho \sin(\nu + \omega)}{p \sin i} \\ -\frac{\cos \nu}{e} & \frac{\sin \nu}{e} \left( 1 + \frac{\rho}{p} \right) & -\frac{\rho}{p} \sin(\nu + \omega) \operatorname{ctg} i \end{pmatrix},$$

$$a \quad \rho = a(1 - e \cos E) = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2).$$

Рассматривая уравнения Ньютона, можно сделать некоторые замечания о характере изменения элементов орбиты под действием возмущающих сил.

Поскольку вектора ускорений  $F_v$  и  $F_r$  лежат в плоскости орбиты, они не могут изменить характеризуемую элементами  $i$  и  $\Omega$  ориентацию плоскости орбиты в пространстве, однако, изменяют остальные четыре элемента. Ускорение  $F_w$  перпендикулярно к плоскости орбиты и потому не влияет на эволюцию большой полуоси орбиты  $a$ , но вызывает движение узлов и перигея и изменение наклона орбиты  $i$ .

В движении узлов и перигея можно выделить вековые неперiodические члены, монотонно изменяющиеся в течение времени, и долгопериодические члены, период которых равен периоду обращения перигея. Члены, период которых зависит от изменений истинной аномалии  $\nu$ , называются короткопериодическими. Из всех возмущений, наблюдаемых в движении спутника, наиболее важными являются два вековых движения: вращение плоскости орбиты вокруг полярной оси (регрессия узлов) и вращение большой полуоси орбиты в ее собственной плоскости (движение перигея). Эти движения могут быть весьма точно определены по наблюдениям ИСЗ.

Пусть существует такая возмущающая (*пертурбационная*) функция  $\mathfrak{R}(v, w, r, t)$ , для которой проекции возмущающей силы  $\vec{F}$  на оси прямоугольной системы координат  $S_{vwr}$  определяются формулами:

$$F_v = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial v}, \quad F_w = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial w}, \quad F_r = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r}, \quad \text{т.е., другими словами, пертурбационная}$$

функция представляет собой потенциал возмущающей силы  $\vec{F}$ . В этом случае указанные проекции в уравнениях Ньютона (2.3) могут быть выражены через частные производные пертурбационной функции по элементам оскулирующей орбиты, что позволяет перейти к системе (2.4) шести дифференциальных уравнений первого порядка, называемых *уравнениями Лагранжа*:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} \\ \dot{i} &= \frac{\text{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} - \frac{\text{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \Omega}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\text{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} - \frac{\text{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i}, \\ \dot{M} &= n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, уравнения Лагранжа (2.4) описывают связь скорости изменения (эволюции) оскулирующих элементов спутниковой орбиты с производными

пертурбационной функции по элементам орбиты. Как и уравнения Ньютона, уравнения Лагранжа также могут быть записаны в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{M} - n \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix} = -L^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \end{pmatrix},$$

где матрица Лагранжа  $L$  имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{a}{GM_{\oplus}}} & 0 & 0 \\ \frac{1-e^2}{e\sqrt{aGM_{\oplus}}} & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{aGM_{\oplus}}} & 0 \\ 0 & \frac{ctgi}{\sqrt{aGM_{\oplus}(1-e^2)}} & -\frac{\text{coseci}}{\sqrt{aGM_{\oplus}(1-e^2)}} \end{pmatrix}.$$

В согласии с принципом суперпозиции пертурбационная функция представляет собой сумму потенциалов возмущающих движение ИСЗ сил, векторная сумма которых равна возмущающей силе  $\vec{F}$ . Иными словами,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\oplus} + \mathcal{R}_M + \mathcal{R}_S + \mathcal{R}_{PL} + \mathcal{R}_{SP} + \mathcal{R}_{etc}, \quad (2.5)$$

где  $\mathcal{R}_{\oplus}$  - пертурбационная функция возмущающей составляющей притяжения Земли (включая влияние полярного сжатия земного эллипсоида),

$\mathcal{R}_M$  - пертурбационная функция притяжения Луны,

$\mathcal{R}_S$  - пертурбационная функция притяжения Солнца,

$\mathfrak{R}_{PL}$  - пертурбационная функция притяжения планет,

$\mathfrak{R}_{SP}$  - пертурбационная функция сил светового давления,

$\mathfrak{R}_{etc}$  - пертурбационная функция прочих возмущающих сил.

Заметим попутно, что сила сопротивления атмосферы не имеет потенциала и потому не входит в пертурбационную функцию  $\mathfrak{R}$ . По этой причине для высоких спутников (высота над поверхностью Земли более 2000-3000 км) в качестве исходных уравнений для последующего интегрирования по времени в большинстве случаев используются уравнения Лагранжа, для более низких спутников – уравнения Ньютона.

Сказанное выше означает, что задача определения элементов оскулирующей орбиты может быть сведена к интегрированию уравнений Ньютона (2.3) или Лагранжа (2.4), однако, при этом скорости изменения элементов оскулирующей орбиты, составляющие левые части этих уравнений, не являются непосредственно наблюдаемыми величинами. Наблюдения фиксируют лишь изменения элементов на некотором интервале времени, например, на одном или нескольких витках. В частности, изменения элементов на одном витке будут, очевидно, составлять

$$\Delta a = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{a} dt, \Delta e = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{e} dt, \Delta i = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{i} dt, \Delta \Omega = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\Omega} dt \text{ и т.д.}, \quad (2.6)$$

где  $T$  – период обращения спутника (продолжительность витка).

Поскольку правые части уравнений Лагранжа (2.4) от времени  $t$  явным образом не зависят, в качестве переменной интегрирования удобнее выбрать истинную аномалию  $\nu$  – угол между направлениями на перицентр и обращающееся по эллипсу тело. Напомним, что, радиус-вектор  $\rho$  и истинная аномалия  $\nu$  выступают в роли пары полярных координат спутника в плоскости его орбиты и связаны уравнением эллипса:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

Согласно второму закону Кеплера, площадь эллиптического сектора, заключенного между радиусами-векторами любых двух положений спутника, пропорциональна времени, которое требуется для перемещения спутника из одного положения в другое. Иными словами, производная площади сектора, заключенного между двумя радиусами-векторами, по времени постоянна. Так как элемент площади сектора в полярных координатах  $r$  и  $\nu$  равен  $\frac{1}{2}\rho^2 d\nu$ , второй закон Кеплера записывается в виде известного интеграла площадей:

$$\rho^2 \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{GM_{\oplus} a(1 - e^2)} = na^2 \sqrt{1 - e^2}, \quad n^2 = \frac{GM_{\oplus}}{a^3}.$$

Например, для изменения долготы восходящего узла  $\Omega$  за виток с учетом (2.4) имеем:

$$\Delta\Omega = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\Omega} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{d\nu} d\nu, \quad \frac{d\Omega}{d\nu} = \frac{d\Omega}{dt} \cdot \frac{dt}{d\nu} = \frac{\rho^2}{\sqrt{GM_{\oplus} a(1 - e^2)}} \dot{\Omega}.$$

(2.7)

$$\Delta\Omega = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\sqrt{GM_{\oplus} a(1 - e^2)}} \cdot \frac{\cos e i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} d\nu.$$



### 3. Пертурбационная функция $\mathfrak{R}_{\oplus}$ возмущающего потенциала Земли

Учитывая потенциальный характер пертурбационной функции возмущающего потенциала, представим ее разложением в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$\mathfrak{R}_{\oplus} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathfrak{R}_{nm}^{\oplus}, \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{R}_{nm}^{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta). \quad (3.1)$$

Для подстановки пертурбационной функции в уравнения Лагранжа (2.4) и уравнения наблюдений вида (2.5) необходимо выразить ее через элементы орбиты ИСЗ. Достаточно сложные и громоздкие преобразования соотношения (3.1) позволяют получить пертурбационную функцию земного притяжения в следующем виде [КГ]:

$$\mathfrak{R}_{nm}^{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, t), \quad (3.2)$$

в которую входят функция наклона

$$F_{nmp}(i) = \sum_{t=0}^m \frac{(2n-2t)!}{2^{2(n-t)} t!(n-t)!(n-m-2t)!} (\sin i)^{n-m-2t} \times \binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}$$

$$\times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (\cos^s i) \sum_c \binom{n-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \quad k = \begin{cases} \frac{n-m}{2}, & (n-m) \text{ четн.} \\ \frac{n-m+1}{2}, & (n-m) \text{ нечет.} \end{cases}$$

зависящая от различных степеней синусов и косинусов наклона орбиты, а также функция эксцентриситета  $G_{npq}(e)$ , которая выражается многочленами по степеням эксцентриситета.

Наконец, функция

$$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, t) = \begin{cases} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{cases} \cos \Psi_{nmpq} + \begin{cases} S_{nm} \\ C_{nm} \end{cases} \sin \Psi_{nmpq} \begin{matrix} (n-m) \text{ четн.} \\ (n-m) \text{ нечетн.} \end{matrix},$$

где обозначено

$$\Psi_{nmpq} = (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-t). \quad (3.3)$$

Анализ приведенных здесь формул позволяет сопроводить их следующими важными комментариями.

- В формулах (3.2) и (3.3) шесть элементов орбиты представлены не зависящими друг от друга величинами, что облегчает дифференцирование пертурбационной функции возмущающего потенциала по элементам.
- Пертурбационная функция (3.2) с учетом (3.3) линейна относительно искомым гармонических коэффициентов потенциала, что позволяет использовать для оценки их значений алгоритмы метода наименьших квадратов без дополнительной линеаризации.
- Суммирование по индексу  $q$  на практике может быть ограничено интервалом  $(-10 < q < +10)$ , поскольку функция эксцентриситета при больших  $q$  ведет себя как функция  $e^{|q|}$ .

• Значения величин  $a, F_{nmp}(i), G_{npq}(e)$ , и их производных по  $a, i, e$  при вычислении пертурбационной функции в большинстве случаев можно считать постоянными на интервале нескольких месяцев. Это означает, что все временные вариации (возмущения) элементов орбиты содержатся в функции  $S_{nmpq}$ .

- Временные возмущения в небесной механике принято разделять на вековые, долгопериодические и короткопериодические. Вековые

(непериодические) возмущения, монотонно накапливаются на значительных интервалах времени. Поскольку косинус и синус являются периодическими функциями, отсутствие периодичности в функции  $S_{ntrq}$  означает неизменность во времени углового параметра  $\Psi_{ntrq}$ . Так как величины  $\omega$ ,  $M$ ,  $\Omega$ ,  $t$  зависят от времени, остается в (3.3) потребовать выполнения равенств:  $(n-2p)=0$ ,  $(n-2p+q)=0$ ,  $m=0$ , откуда имеем:  $n=2p$ ,  $m=0$ , вытекающих из условия  $\dot{\Psi}_{ntrq} = 0$ .

Это обстоятельство позволяет сделать важный вывод о том, что *вековые* изменения элементов спутниковой орбиты вызываются только влиянием *зональных гармоник четной степени*.

Под долгопериодическими возмущениями будем понимать возмущения с периодом более суток. Иными словами, долгопериодические возмущения не должны содержать в себе гринвичского времени  $t$ , что требует в (3.3) выполнения условия  $m=0$ . Это означает, что *долгопериодические* возмущения обусловлены действием *всех зональных гармоник (четных и нечетных степеней)* разложения потенциала. *Короткопериодические* (с периодом сутки и менее) возмущения, для которых  $m \neq 0$ , вызываются влиянием *секториальных и тессеральных гармоник*.

Понятно, что в процессе наблюдений легче регистрируются вековые и долгопериодические вариации орбиты, вследствие чего значения зональных гармоник определяются увереннее и точнее. Ниже обсудим влияние зональной составляющей гравитационного потенциала на эволюцию некоторых элементов спутниковой орбиты.

Формула (3.5) отражает изменение долготы восходящего узла орбиты ИСЗ за один виток вследствие возмущений, описываемых пертурбационной функцией  $\mathfrak{R}$ . Подстановка в выражения типа (3.5) пертурбационной функции геопотенциала, содержащей только зональные гармоники ( $m \neq 0$ ),

ответственные за вековые и долгопериодические возмущения спутниковой орбиты, позволяет получить формулы (3.4) [1]:

$$\Delta a = 0,$$

$$\Delta e = -\frac{1-e^2}{e} \operatorname{tg} i \cdot \Delta i,$$

$$\begin{aligned} \Delta i = & 3\pi e \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^3 \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) \cos i \cdot \cos \omega \cdot C_{30} + \\ & + \frac{45}{16} \pi e^2 \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^4 \left( \frac{7}{6} \sin^2 i - 1 \right) \sin 2i \cdot \sin 2\omega \cdot C_{40} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Omega = & 3\pi \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^2 \cos i \cdot C_{20} + \\ & + 3\pi e \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^3 \left( \frac{15}{4} \sin^2 i - 1 \right) \operatorname{ctg} i \cdot \sin \omega \cdot C_{30} + \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$+ \frac{15}{2} \pi \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^4 \left( \frac{7}{4} \sin^2 i - 1 \right) \cos i \cdot C_{40} + \dots,$$

$$\Delta \omega = 6\pi \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^2 \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) C_{20} + 3\pi e \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^3 \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) \sin i \cdot \sin \omega \cdot C_{30} +$$

$$+ 15\pi \left( \frac{a_{\oplus}}{p} \right)^4 \left[ \left( 1 - \frac{31}{8} \sin^2 i + \frac{49}{19} \sin^4 i \right) + \left( \frac{3}{8} - \frac{7}{16} \sin^2 i \right) \sin^2 i \cdot \cos 2\omega \right] C_{40} + \dots$$

Первое уравнение системы (3.4) показывает что большая полуось орбиты не испытывает вековых и долгопериодических возмущений.

Второе уравнение указывает на пропорциональную зависимость возмущений эксцентриситета и наклона. Иными словами, при наклонах,

отличных от нуля, использование возмущений эксцентриситета либо наклона должно привести к одинаковым результатам, поскольку эти возмущения связаны с искомыми гармоническими коэффициентами одинаковым образом.

Третье уравнение для  $\Delta i$  содержит только долгопериодические слагаемые, определяемые множителями  $\cos \omega, \sin 2\omega$  и т.д., при этом первое его слагаемое, по крайней мере, на порядок эксцентриситета превышает все последующие.

Судя по четвертому и пятому уравнениям, эволюция элементов  $\Omega$  и  $\omega$ , претерпевающих и вековые, и долгопериодические изменения, оказывается наиболее эффективным источником информации для определения зональных гармоник разложения потенциала.

Четвертое уравнение свидетельствует о том, что описываемое зональной гармоникой второй степени  $C_{20}$  сжатие фигуры Земли вдоль полярной оси вызывает вековую прецессию орбиты ИСЗ. При этом плоскость спутниковой орбиты прецессирует таким образом, что линия узлов перемещается к западу,

если  $0 < i < \frac{\pi}{2}$ , и к востоку, если  $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ . Для полярных орбит при  $i = \frac{\pi}{2}$

долгота узла  $\Omega$  не меняется вековым образом. Средняя скорость векового изменения долготы узла  $\Omega$  составляет около трех градусов дуги в сутки. Пятое уравнение показывает, что вследствие сжатия Земли также происходит прецессия перигея в плоскости спутниковой орбиты. Если

$63^{\circ}26' < i < 116^{\circ}34'$ , угол  $\omega$  увеличивается, в остальных случаях – уменьшается со скоростью около половины градуса за сутки. Таким образом, под влиянием сжатия Земли плоскость орбиты ИСЗ прецессирует вековым образом, а сама орбита, не меняя своей формы, прецессирует в своей плоскости.

Вследствие отмеченных обстоятельств, в динамической космической геодезии для определения параметров гравитационного потенциала в качестве уравнений наблюдений используют соотношения лишь для четырех элементов:  $\Omega, \omega, i, e$  [6]. Уравнения (3.4) также показывают, что величины вариаций орбитальных элементов сильно зависят от наклона орбиты, в силу чего для получения надежной оценки значений неизвестных гармонических коэффициентов следует использовать наблюдения различных спутников с различными значениями наклонов.

#### **4. О влиянии на движение искусственного спутника Земли иных возмущающих факторов**

Следует сразу отметить, что эти вопросы с необходимой детальностью обсуждаются в параграфах 47, 48, 49 хорошо известного учебника [6], что позволяет здесь, в основном следуя указанным параграфам, конспективно остановиться лишь на наиболее значимых возмущающих факторах.

##### Влияние притяжения Луны и Солнца.

Одной из причин, возмущающих обращение ИСЗ вокруг Земли, является гравитационное притяжение Луны, Солнца и других небесных тел. Поскольку в силу удаленности названных объектов это влияние не слишком велико (в частности, влияние притяжения Луны на движение ИСЗ примерно в 10000 раз меньше, чем влияние полярного сжатия Земли), в нашем случае возможно рассматривать Луну и Солнце как точечные массы, а притяжением других планет в большинстве случаев пренебречь. Это означает, что и влияние Луны, и влияние Солнца описывается однотипными формулами, получаемыми на основании соотношений подробно изучаемой в небесной механике ограниченной задачи трех тел, в роли которых выступают Земля, Луна (или Солнце, или планета) и ИСЗ пренебрежимо малой массы. Обозначим пертурбационную функцию и гравитационную постоянную  $GM$

возмущающего тела  $P$  (Луны, Солнца, планеты) символами  $\mathfrak{R}_P$  и  $\mu_P$  соответственно, а его геоцентрическое расстояние -  $\rho_P$ . Тогда в ограниченной задаче трех тел пертурбационная функция притяжения тела нулевой массы возмущающим телом будет иметь вид:

$$\mathfrak{R}_P = \mu_P \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{\rho}{\rho_P^2} \cos \phi \right), \quad (4.1)$$

где символом  $\rho$  обозначено геоцентрическое расстояние ИСЗ, символом  $\Delta$  – расстояние между ИСЗ и возмущающим телом  $P$ , а символом  $\phi$  – плоский угол между геоцентрическими направлениями  $\rho$  и  $\rho_P$  на спутник и возмущающее тело. Поскольку для нашего случая всегда выполняется условие  $\rho < \rho_P$ , функция обратного расстояния  $\Delta$  может быть представлена сходящимся рядом по полиномам Лежандра:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\rho_P^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_P \cos \phi}} = \frac{1}{\rho_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{\rho_P} \right)^n P_n(\cos \phi).$$

Тогда

$$\mathfrak{R}_P = \mu_P \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho_P^{n+1}} P_n(\cos \phi).$$

В этой формуле первое слагаемое ряда при  $n=0$  отброшено, поскольку оно не зависит от координат ИСЗ и потому обращается в нуль при дифференцировании пертурбационной функции по координатам спутника. Второе слагаемое ряда при  $n=1$  взаимно уничтожается со вторым членом в

круглых скобках формулы (4.1). Поскольку  $\cos\phi$  есть функция геоцентрических экваториальных координат (прямого восхождения и склонения) ИСЗ  $\alpha, \delta$  и возмущающего тела  $\alpha_P, \delta_P$ , теорема сложения сферических функций позволяет записать:

$$P_n(\cos\phi) = P_n(\cos\delta)P_n(\cos\delta_P) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\delta)P_{nm}(\cos\delta_P) \cos m(\alpha - \alpha_P).$$

Тогда пертурбационная функция притяжения ИСЗ возмущающим телом

$P$  примет вид:

$$\mathfrak{R}_P = \mu_P \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^n}{\rho_P^{n+1}} [C_{nm}^P(t) \cos m\alpha + S_{nm}^P(t) \sin m\alpha] P_{nm}(\sin\delta), \quad \text{где} \quad (4.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{nm}^P(t) \\ S_{nm}^P(t) \end{array} \right\} = (2 - \sigma_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_P \\ \sin \alpha_P \end{array} \right\} P_{nm}(\cos \delta_P).$$

Удобство формул (4.2) состоит в разделении быстро и медленно изменяющихся переменных: коэффициенты  $\{C_{nm}^P(t), S_{nm}^P(t)\}$  разложения (4.2) содержат только геоцентрические экваториальные координаты удаленного возмущающего тела и потому изменяются медленно, вследствие медленного его движения относительно Земли. Удаленность возмущающего тела позволяет также при суммировании ряда (4.2) ограничиться 2-5 первыми членами для Луны и 1-3 членами для Солнца.



### Влияние лунно-солнечных приливов.

В силу того, что Земля не является абсолютно твердым недеформируемым телом, значительная часть ее покрыта водой, а вся она окружена атмосферой, гравитационное притяжение движущихся относительно Земли третьих тел (Луна, Солнце, планеты) приводит к деформации фигуры Земли и изменениям ее гравитационного поля, которые должны быть учтены в процессе оценивания численных значений параметров модели геопотенциала. Заметим, что среди гравитационных возмущений теория учета приливных эффектов является наиболее сложной. Дело в том, что на современном уровне точности требуется учитывать не только приливы в твердом теле Земли, но также океанические, полюсные и атмосферные приливные эффекты.

В настоящее время согласно рекомендациям Международной службы вращения Земли (IERS) 2010 г. [<http://62.161.69.131/iers/conv2010/conv2010>] учет приливных деформаций выполняют путем внесения зависящих от времени малых поправок  $\{\Delta C_{nm}^T(t), \Delta S_{nm}^T(t)\}$  в гармонические коэффициенты

$\{C_{nm}, S_{nm}\}$  модели гравитационного потенциала Земли:

$$\Delta C_{nm}^T(t) = \Delta C_{nm}^{ST}(t) + \Delta C_{nm}^{OT}(t) + \Delta C_{nm}^{SPT}(t) + \Delta C_{nm}^{OPT}(t) + \Delta C_{nm}^{AT}(t),$$

$$\Delta S_{nm}^T(t) = \Delta S_{nm}^{ST}(t) + \Delta S_{nm}^{OT}(t) + \Delta S_{nm}^{SPT}(t) + \Delta S_{nm}^{OPT}(t) + \Delta S_{nm}^{AT}(t),$$

где для поправок приняты обозначения:

$\{\Delta C_{nm}^{ST}(t), \Delta S_{nm}^{ST}(t)\}$  - совокупность поправок за влияние твердых

земных приливов,

$\{\Delta C_{nm}^{OT}(t), \Delta S_{nm}^{OT}(t)\}$  - совокупность поправок за влияние океанических

приливов,

$\{\Delta C_{nm}^{SPT}(t), \Delta S_{nm}^{SPT}(t)\}$  - совокупность поправок за влияние твердого

полюсного прилива,

$\{\Delta C_{nm}^{OPT}(t), \Delta S_{nm}^{OPT}(t)\}$  - совокупность поправок за влияние

океанического полюсного прилива,

$\{\Delta C_{nm}^{AT}(t), \Delta S_{nm}^{AT}(t)\}$  - совокупность поправок за влияние атмосферных

приливов.

Уместно напомнить, что термин «полюсный прилив» был введен основоположником современной теории приливов Д.Дарвином, который таким образом обозначил приливные волны в теле и океанах Земли, обусловленные изменением центробежной силы при нутационных колебаниях мгновенной оси вращения нашей планеты. Нестабильность вращения Земли (изменения скорости ее вращения и изменения положения полюсов) порождает в океане и атмосфере полюсной прилив, который, взаимодействуя с лунно–солнечными приливами, влияет на движения атмосферы и океана и протекающие в них процессы.

Явный вид формул для вычисления приливных поправок  $\{\Delta C_{nm}^T(t), \Delta S_{nm}^T(t)\}$  приведен на сайте Международной службы вращения Земли (IERS-2010): [<http://62.161.69.131/iers/conv2010/conv2010>], [[ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tn36\\_c6.pdf](ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tn36_c6.pdf)].

### Влияние светового давления.

Возмущающее ускорение, возникающее вследствие давления солнечных лучей на поверхность ИСЗ, вычисляется по формуле [Колегов]:

$$\vec{w}_{SP} = kp_0 \frac{S_{\perp}}{m} \left( \frac{\rho_S}{\Delta_S} \right)^2 \frac{\vec{\Delta}_S}{\Delta_S}, \quad (4.3)$$

где:

$\rho_S$  – геоцентрический радиус-вектор Солнца (среднее расстояние от Земли до Солнца),

$\Delta_S$  – спутникоцентрический радиус-вектор Солнца,

$S_{\perp}$  – площадь миделевого сечения – поперечного сечения ИСЗ

плоскостью, перпендикулярной к вектору линейной скорости спутника,

$m$  – масса спутника,

$p_0$  – давление солнечных лучей в районе орбиты Земли,

$k$  – коэффициент, принимающий значения от единицы до двух, и зависящий от геометрии ИСЗ и отражающих свойств его поверхности.

Примем обозначение:

$\sigma_{SP} = kp_0 \frac{S_{\perp}}{m}$ , тогда модуль вектора возмущающего ускорения будет

равен  $w_{SP} = \sigma_{SP} \left( \frac{\rho_S}{\Delta_S} \right)^2$ , а его пертурбационная функция:

$$\mathfrak{R}_{SP} = -\sigma_{SP} \rho_S^2 \frac{1}{\Delta_S}.$$

Заметим, кстати, что пертурбационная функция (потенциал силы) светового давления пропорциональна функции обратного расстояния, аналогично потенциалу силы притяжения точечной массы (с обратным знаком).

Раскладывая функцию  $\Delta_S^{-1}$  обратного расстояния от спутника до Солнца в ряд

ортогональных полиномов Лежандра  $\frac{1}{\Delta_S} = \frac{1}{\rho_S} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{\rho_S} \right)^n P_n(\cos \phi) \right]$ , а

также отбрасывая первое слагаемое разложения, поскольку оно не зависит от координат спутника и при дифференцировании по координатам ИСЗ будет равно нулю, получим для пертурбационной функции светового давления Солнца:

$$\mathfrak{R}_{SP} = -kp_0 \frac{S_{\perp}}{m} \cdot \rho_S^2 \cdot \frac{1}{\rho_S} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{\rho_S} \right)^n P_n(\cos \phi). \quad (4.4)$$

В силу удаленности Солнца в большинстве случаев достаточно ограничиться первым членом разложения (4.4).

$$\mathfrak{R}_{SP} = -kp_0 \frac{S_{\perp}}{m} \cdot \rho \cos \phi = -\sigma_{SP} \rho \cos \phi. \quad (4.5)$$

Понятно, что воздействие силы светового давления имеет место лишь в случае прямого освещения спутника солнечными лучами. При уходе ИСЗ в тень Земли это радиационное влияние прекращается (остается лишь тепловое переизлучение Земли, которое меньше, примерно, в три раза). Учет указанного обстоятельства осуществляется введением в пертурбационную функцию (4.5) дополнительного сомножителя  $\chi$ , называемого теневой (релейной) функцией, которая равна единице, когда спутник освещен Солнцем, и равна нулю, когда он находится в тени. На высоте около 550 км солнечное давление становится примерно равным силе атмосферного сопротивления.

Также можно напомнить, что давление солнечного света открыто П.Н.Лебедевым, который одновременно показал, как уже отмечалось выше, что силы солнечного давления и солнечного притяжения могут быть описаны одинаковыми уравнениями. Иными словами, равнодействующая сила  $\vec{F}'_S$ , воздействующая на ИСЗ со стороны Солнца, равна разности силы  $\vec{F}_S$  ньютоновского притяжения и силы светового давления  $\vec{H}$  Солнца, то же справедливо в отношении пертурбационных функций (потенциалов этих сил):

$$\vec{F}'_S = \vec{F}_S - \vec{H}, \quad \mathfrak{R}'_S = \mathfrak{R}_S - \mathfrak{R}_{SP},$$

где символом  $\mathfrak{R}'_S$  обозначена пертурбационная функция совместного действия притяжения Солнца и светового давления солнечных лучей. Данное

обстоятельство может быть использовано при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ.

### Влияние атмосферного торможения.

Вектор силы сопротивления, которая возникает при движении материального тела в газовой среде, описывается аэродинамической формулой:

$$\vec{F}_A = -\frac{1}{2} C_D S_A \rho V \vec{V}',$$

где  $C_D$  - аэродинамический коэффициент, примерно равный 2.15 для всех значений скоростей и высот,  $S_{\perp}$  - площадь миделевого сечения - поперечного сечения ИСЗ плоскостью, перпендикулярной к вектору  $\vec{V}'$  линейной скорости спутника относительно атмосферы,  $\rho$  - плотность атмосферы на высоте полета.

Введение так называемого возмущающего параметра  $\sigma_A = \frac{C_D S_{\perp}}{2m}$  позволяет

переписать приведенную выше формулу для вектора возмущающего ускорения, обусловленного влиянием атмосферы:  $\vec{w}_A = -\sigma_A \rho V \vec{V}'$ . Знак минус, очевидно, отражает тормозящий характер возмущающего ускорения.

Плотность  $\rho$ , вообще говоря, представляет собой сложную функцию, зависящую от высоты полета, географической широты подспутниковой точки (эллиптичности атмосферных слоев), времени суток, солнечной активности, магнитных бурь и ряда других факторов. В первом приближении, как правило, используется экспоненциальная зависимость плотности атмосферы от высоты полета  $h$ , отсчитываемой от перицентра, т.е.  $h = r - a(1 - e)$ , где  $r$  в данном случае - геоцентрический радиус-вектор спутника, а  $\rho(h) = \rho_0 \exp(-hK)$ ,

где, в свою очередь,  $K$  - коэффициент пропорциональности, а  $\rho_0$  - плотность атмосферы Земли на высоте перигея.

Понятно, что для решения динамических задач, связанных с построением максимально точной теории движения ИСЗ, предпочтительно использование заатмосферных спутников с высотой не менее 2000 км и малым отношением  $S_{\perp} / m$  (так называемых «тяжелых» спутников).

Поскольку, как уже отмечалось выше, сила атмосферного торможения не имеет потенциала, получим необходимые для дальнейшего численного интегрирования проекции вектора возмущающего ускорения  $\vec{W}_A$  на оси геоцентрической прямоугольной небесной (звездной) системы координат, которая в нашем случае оказывается наиболее удобной для аналитических расчетов.

Скорость вращения атмосферы в выбранной системе координат определяется степенью ее увлечения вращающейся Землей, причем в настоящее время принято считать, что атмосфера полностью увлекается вращающейся Землей, т.е. вращается вместе с ней с той же скоростью. По этой причине примем, что угловая скорость вращения атмосферы равна угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , а сам вектор линейной скорости вращения атмосферы  $\vec{V}_A$  лежит в плоскости параллельной плоскости земного экватора и по модулю равен  $V_A = r\omega \cos \delta_{ИСЗ}$ , где  $r$  — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, а  $\alpha_{ИСЗ}, \delta_{ИСЗ}$  его экваториальные координаты в НСК: прямое восхождение и склонение. Нетрудно видеть, что тогда вектор линейной скорости вращения атмосферы имеет вид:

$$\vec{V}_A = r\omega \cos \delta_{ИСЗ} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{ИСЗ} + 90^\circ) \\ \sin(\alpha_{ИСЗ} + 90^\circ) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор линейной скорости спутника  $\vec{V}_{ИСЗ}$  складывается с вектором линейной скорости вращения атмосферы  $\vec{V}_A$  по правилу параллелограмма:

$$\vec{V}' = \vec{V}_{ИСЗ} + \vec{V}_A = \begin{pmatrix} \dot{X}_{ИСЗ} + r\omega \cos \delta_{ИСЗ} \cos(\alpha_{ИСЗ} + 90^\circ) \\ \dot{Y}_{ИСЗ} + r \cos \delta_{ИСЗ} \sin(\alpha_{ИСЗ} + 90^\circ) \\ \dot{Z}_{ИСЗ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X}_{ИСЗ} - Y_{ИСЗ}\omega \\ \dot{Y}_{ИСЗ} + X_{ИСЗ}\omega \\ \dot{Z}_{ИСЗ} \end{pmatrix},$$

где  $\vec{V}'$ , по-прежнему, вектор линейной скорости ИСЗ относительно атмосферы, позволяющий далее вычислить компоненты вектора силы атмосферного торможения:  $\vec{F}_A = m\vec{w}_A$ ,  $\vec{w}_A = -\sigma_A \rho V \vec{V}'$ , необходимого для дальнейшего интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах. Если уравнения движения записаны в форме уравнений Ньютона, необходимо путем трех элементарных вращений привести компоненты вектора  $\vec{V}'$  в орбитальную спутникоцентрическую систему координат  $S_{VWR}$ .

В данном параграфе нами рассмотрены все основные источники возмущений, которые необходимо учитывать при составлении дифференциальных уравнений возмущенного движения, вне зависимости, используем ли мы прямоугольные геоцентрические НСК, орбитальные спутникоцентрические системы координат (уравнения Ньютона) или соответствующие пертурбационные функции (уравнения Лагранжа). Важно заметить, воздействие тех или иных возмущающих факторов зависит как от параметров орбиты и предполагаемой продолжительности интервала интегрирования уравнений движения, так и от физических и геометрических характеристик самого спутника. Наиболее сложным учет возмущений оказывается в случае вытянутых орбит с большими эксцентриситетами и высотами апогеев [5].

## 5. Дифференцирование пертурбационной функции геопотенциала по осям прямоугольной геоцентрической системы координат

Вновь обратившись к уравнениям (2.1), в данном параграфе рассмотрим задачу вычисления в прямоугольной геоцентрической земной системе координат ускорений ИСЗ, обусловленных возмущающей составляющей модели гравитационного потенциала Земли, которую будем описывать ранее принятым способом – разложением в ряд объемных (шаровых) сферических функций:

$$\mathfrak{R}_{\oplus} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathfrak{R}_{nm}^{\oplus}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathfrak{R}_{nm}^{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Учитывая потенциальный характер силы притяжения, уравнения движения ИСЗ (2.1) перепишем в виде:

$$\ddot{\vec{X}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{X}} = -GM \frac{\vec{X}}{\rho^3} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \vec{X}}.$$

Искомая производная: 
$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{X}}. \quad (5.1)$$

Принимая во внимание ряд очевидных соотношений,

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \varphi \cos \lambda, & \rho &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ Y &= \rho \cos \varphi \sin \lambda, & \varphi &= \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \\ Z &= \rho \sin \varphi, & \lambda &= \arctg \frac{Y}{X}, \end{aligned} \quad \text{имеем:}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \vec{X}} &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial X}, \frac{\partial \rho}{\partial Y}, \frac{\partial \rho}{\partial Z} \right)^T = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)^T, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{X}} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X}, \frac{\partial \varphi}{\partial Y}, \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^T = \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \cos \lambda, \sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi)^T, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{X}} &= \left( \frac{\partial \lambda}{\partial X}, \frac{\partial \lambda}{\partial Y}, \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \right)^T = \frac{1}{\rho \cos \varphi} (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0)^T.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho \partial \varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho \cos \varphi \partial \lambda} \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Величины  $\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho \partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho \cos \varphi \partial \lambda}$  имеют смысл компонент вектора

ускорения ИСЗ вдоль его радиуса-вектора, меридиана и первого вертикала соответственно. Производные от  $\mathfrak{R}_{\oplus}$  по  $\rho, \varphi, \lambda$  находятся путем дифференцирования (3.1) по формулам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \rho} &= -\frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) = -\frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \Sigma_{\rho}, \\ \frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho \partial \varphi} &= \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) = \\ &= \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n \frac{1}{\cos \varphi} [(n+1) \sin \varphi P_{nm}(\sin \varphi) - (n-m+1) P_{n+1,m}(\sin \varphi)] \times \\ &\times (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) = \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} [\sin \varphi \Sigma_{\rho} - \Sigma_{\varphi}] \quad (5.2)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varphi} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n (n-m+1) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1,m}(\sin \varphi), \\ \frac{\partial R_{\oplus}}{\rho \cos \varphi \partial \lambda} &= \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2 \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) = \\ &= \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2 \cos \varphi} \Sigma_{\lambda}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{\oplus}}{\partial \vec{X}} = \frac{GM_{\oplus}}{\rho^2} \left[ -\sum_{\rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{\sin \varphi \Sigma_{\rho} - \Sigma_{\varphi}}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{\Sigma_{\lambda}}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.3)$$

Полученное нами векторное равенство (5.3) для производных пертурбационной функции геопотенциала по осям прямоугольной системы координат служит для вычисления ускорений ИСЗ, вызванных притяжением несферичной неоднородной Земли, в той же прямоугольной геоцентрической земной системе координат, минуя этап представления функции  $\mathfrak{R}_{\oplus}$  через элементы спутниковой орбиты. Это позволяет далее, не переходя к уравнениям Лагранжа, получить решения дифференциальных уравнений движения спутника в той же прямоугольной системе координат [5].

## 6. Оценивание параметров модели потенциала небесного тела по данным об эволюции орбиты его искусственного спутника

Выше нами было показано, что различные параметры модели гравитационного потенциала Земли по-разному влияют на движение ее искусственных спутников. В частности, коэффициенты четных зональных

гармоник вызывают вековые изменения долготы узла  $\Omega$  и долготы перигея  $\omega$ , тогда как нечетные зональные коэффициенты приводят к долгопериодическим изменениям орбитальных элементов. По этой причине, влияние зональных гармоник накапливается в течение месяцев и потому может быть легко обнаружено в результате наблюдений ИСЗ. Секториальные и тессеральные члены разложения геопотенциала вызывают лишь короткопериодические, возмущения в движении спутников, по амплитуде редко превышающие десятки метров, вследствие чего определение из анализа возмущений спутниковых орбит параметров модели гравитационного поля, зависящих от долготы, является значительно более сложной задачей, чем определение коэффициентов зональных гармоник. Разумеется, все сказанное полностью относится и к другим небесным телам, структура гравитационных полей которых исследуется по данным об эволюции орбит их искусственных спутников.

Заметим в этой связи, что в современной литературе принято выделять два подхода к оцениванию параметров гравитационного потенциала исследуемого небесного тела по спутниковым данным: пространственный – **space-wise** (SW) и временной – **time-wise** (TW).

Базовую основу SW-подхода составляют функционально связывающие измеряемые и искомые величины уравнения наблюдений, сводящиеся в процессе линеаризации в окрестности априорно приближенно известных значений неизвестных к уравнениям поправок. В качестве уравнений наблюдений для разностей элементов орбиты на интервале времени  $\Delta t$  также используются уравнения Ньютона (2.3) или уравнения Лагранжа (2.4) после их интегрирования по времени на интервале наблюдений  $\Delta t$  (см. , например, (2.7)).

В рамках TW-подхода, который вернее было бы назвать орбитальным, возмущающий потенциал или непосредственно измеряемая его трансформанта представляются функцией времени  $t$ , играющего в данном случае роль

углового расстояния ИСЗ (в плоскости спутниковой орбиты) от его положения в начальный момент времени  $t=0$  .

Концептуальное различие обсуждаемых подходов заключается в том, что SW-подход оперирует совокупностью отдельных измерений, выполненных в отдельных точках пространства, в то время как TW-подход опирается на уравнения движения спутника, формулируемые на языке дискретных временных рядов. Основным преимуществом SW-подхода является возможность соотнесения миллионов выполненных наблюдений с существенно меньшим числом узлов устанавливаемой для упрощения вычислений регулярной сетки меридианов и параллелей. При этом, однако, следует иметь в виду, что указанная процедура носит некорректный характер и потому требует априорного задания ковариационной матрицы ошибок измерений.

Важнейшее достоинство альтернативного TW-подхода заключено в возможности применения более простых и менее ресурсоемких алгоритмов обработки данных, что при огромных объемах массивов наблюдательной информации приобретает решающее значение.

Практическое определение характеристик гравитационного потенциала небесного тела всегда зависит от большого числа неизвестных модельных параметров, число которых в общей постановке, очевидно, бесконечно велико: гармонических коэффициентов разложения потенциала, элементов орбит привлекаемых КА, параметров, описывающих воздействие возмущающих сил различной природы и т.д. Одновременное вычисление всех этих параметров не только не рационально, поскольку связано с практически неосуществимым объемом вычислений, но и не эффективно, так как неоправданное увеличение числа оцениваемых неизвестных приводит лишь к ухудшению точности получаемых результатов. По этой причине всю совокупность неизвестных величин принято делить на две группы – уточняемых (оцениваемых) и мешающих параметров.

Следует заметить, что на спутниковых высотах геопотенциал оказывается сильно сглаженным, в силу чего, как показывает опыт развития динамических

методов космической геодезии, определение гармонических коэффициентов разложения потенциала по данным об эволюции спутниковых орбит оказывается целесообразным примерно до 18-20 степени разложения его в ряд сферических функций. На поверхности Земли эти степени соответствуют максимальному разрешению флуктуаций потенциала с протяженностью аномалий порядка 1000 километров. Для повышения разрешающих свойств глобальной модели гравитационного поля Земли до степени  $N=36$  (протяженность аномалий порядка 500 километров) необходимо привлечение данных наземной гравиметрической съемки и спутниковой альтиметрии акватории Мирового океана. Построение же многопараметрических моделей высокого разрешения требует использования данных дифференциальных методов бортовых измерений в спутниковых системах с изменяемой геометрией расположения элементов – методов спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения [1], [2], [3].

В процессе обработки измерительной информации определяется оценка вектора уточняемых параметров. При выполнении ряда классических допущений поиск оптимального решения по данным избыточного числа измерений обычно приводит к алгоритму фильтрации по методу наименьших квадратов (МНК). Вычислительная схема МНК является одной из самых простых, в силу чего ее оказывается выгодным применять даже тогда, когда упомянутые выше допущения выполняются не в полной мере. Эффективным средством получения несмещенных значений оценок неизвестных в этом случае может оказаться метод наименьших модулей (МНМ), вычислительный алгоритм которого реализуется в форме многократного повторения стандартной процедуры МНК с изменяющимися весами уравнений поправок.

Возможны два способа учета мешающих параметров в рамках процедуры оценки вектора неизвестных величин. Первый предполагает включение мешающих параметров в число оцениваемых. Если это оказывается нецелесообразным, можно рекомендовать использование априорной модели, учитывающей те или иные сведения о возможных границах диапазона

изменений оцениваемых величин и статистических характеристиках стохастических связей между составляющими вектора ошибок измерений.

Необходимость привлечения априорных сведений диктуется, кроме того, также и тем принципиальным обстоятельством, что задачи оценивания параметров многомерных сложных моделей по результатам измерений, как правило, относятся к классу некорректно поставленных задач, в которых малым возмущениям входных данных в рамках погрешности измерений могут, вообще говоря, соответствовать сколь угодно значительные возмущения выходных (оцениваемых) параметров.

В настоящее время создана строгая математическая теория построения регуляризирующих алгоритмов, позволяющих отыскивать приближенные решения широкого круга некорректных задач, опираясь на априорные данные о приближенных значениях искомых величин и уровне ошибок исходной измерительной информации. В нашем случае понятное стремление к восстановлению такого планетарного внешнего поля, которое в предположении отсутствия ошибок измерений совпадало бы со всеми имеющимися результатами разнородных наблюдений, может быть удовлетворено, благодаря тому, что исходные измерения дискретны и приурочены к отдельным точкам пространства. По аналогии с подобными математическими методами решения дифференциальных и интегральных уравнений эти методы получили название *коллокации*. Наиболее информативное изложение метода коллокации на русском языке применительно к рассматриваемым нами задачам представлено в монографии Г.Морица «Современная физическая геодезия» [7].

## **7. Изучение структуры гравитационного поля по лучевым ускорениям искусственного спутника.**

Предлагаемый вниманию читателя параграф посвящен описанию методики определения параметров модели гравитационного потенциала планетарного тела по данным дистанционного доплеровского слежения за обращением

искусственного спутника этого тела. Сам спутник при этом играет роль пробной гравиметрической массы, изменение направления и модуля вектора скорости которой при движении в неоднородном поле притяжения позволяет судить об особенностях структуры исследуемого поля. Этот метод начал применяться для изучения гравитационного поля Луны в середине шестидесятых годов прошлого века. По этой причине принципы его реализации рассмотрим на примере радиослежения за искусственными спутниками Луны (ИСЛ), осуществлявшегося сетью наземных радиотелескопов Deep Space Network (DSN).

Сигнал высокостабильной частоты, вырабатываемый наземным цезиевым генератором, посылается на борт КА, бортовой преобразователь которого ретранслирует сигнал на Землю. Эталонная частота наземного передатчика используется для формирования разности частот переданного и возвратившегося сигналов. Измеренная разность частот содержит доплеровский сдвиг, обусловленный наличием лучевой составляющей  $v_x$  вектора линейной скорости  $\vec{v}$  КА. Напомним, что лучевой скоростью называется проекция вектора  $\vec{v}$  на луч зрения наблюдателя. После проведения редукций за влияние различных возмущений в движении КА, остаточные лучевые скорости интерпретируются как результат влияния аномальной составляющей гравитационного поля исследуемого тела и аппроксимируются кубическими сплайнами. Дифференцирование аппроксимирующих функций по времени дает возможность перейти на интервале измерений от лучевых скоростей к значениям лучевых ускорений  $\vec{f}$  КА (*line-of-sight acceleration*), обусловленных нецентральностью поля тяготения исследуемого тела.

Геометрический смысл лучевых ускорений поясним рисунком 1 на примере Луны, для большей наглядности ограничившись сечением в плоскости  $XOZ$  её нулевого меридиана и спроектировав все вектора на эту плоскость.

Пусть точки  $A, B, C$  соответствуют положениям КА в различные моменты времени. Сплошными стрелками обозначены векторы  $\vec{g}_A, \vec{g}_B, \vec{g}_C$  силы притяжения в этих точках, штриховыми линиями – направления к центру системы селеноцентрической системы координат  $OXYZ$ , утолщенными стрелками – векторы  $\vec{\Gamma}_A, \vec{\Gamma}_B, \vec{\Gamma}_C$  лучевых ускорений КА. Легко видеть, что, чем ближе широта и долгота подспутниковой точки к нулевым значениям, тем ближе вектор лучевого ускорения (и по величине, и по направлению) к вектору радиальной производной аномального потенциала. Напротив, с увеличением селеноцентрической широты и/или долготы подспутниковой точки увеличивается рассогласование направлений этих векторов, уменьшается модуль вектора лучевых ускорений, падает информативность этого вида измерений. Таким образом, по чисто геометрическим причинам использование лучевых ускорений оказывается наиболее эффективным в центральной зоне видимого полушария Луны.

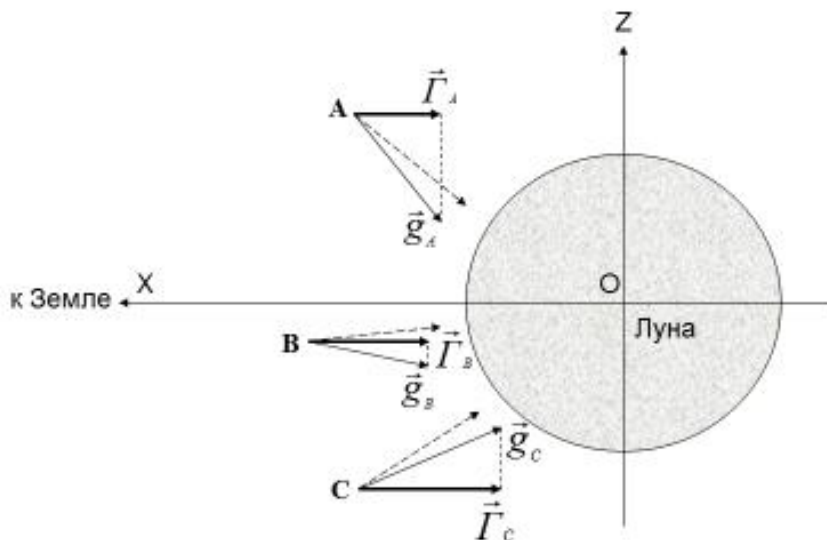


Рис.1. Лучевые ускорения ИСЛ при наблюдении с Земли.

Данные о лучевых ускорениях, полученные по описанной выше схеме, впервые были использованы в 1968 году Мюллером и Сьогреном при анализе



движения ИСЛ LUNAR ORBITER-5. Поскольку орбита спутника имела большое наклонение ( $i=85^{\circ}$ ), авторам удалось, предварительно исключив гравитационное влияние Земли, Солнца, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна и трехосной Луны, построить карту лучевых ускорений, для значительной части видимого полушария, широты и долготы точек которой изменялись в пределах  $\pm 70^{\circ}$ . Эта карта позволила открыть лунные масконы видимой ее стороны, приуроченные к Морю Дождей, Морю Ясности, Морю Влажности, Морю Кризисов и Морю Нектара. Начиная с этого времени, рассмотренным методом выполнялись исследования глобальной структуры и региональных особенностей гравитационных полей:

- Луны – в рамках программ LUNAR ORBITER, APOLLO, CLEMENTINE, LUNAR PROSPECTOR, KAGUYA, GRAIL;
- Марса – в рамках программ MARINER, VIKING, MARS OBSERVER;
- Венеры – в рамках программ PIONER VENUS ORBITER, MAGELLAN.

Обсуждая перспективы использования лучевых ускорений в планетной гравиметрии, отметим, что теоретически наиболее строгим представляется определение потенциала силы притяжения (или иной его трансформанты) путем решения внешней краевой задачи, состоящей в отыскании интеграла уравнения Лапласа  $\Delta V(P)=0$ , удовлетворяющего краевому условию

$$-\left. \frac{\partial V(M)}{\partial X} \right|_S = \Gamma(M), \quad M \in S, \quad (7.1)$$

где  $\Gamma(M)$  есть функция, заданная в точках краевой поверхности  $S$ , объемлющей все гравитирующие массы. Знак минус в правой части (7.1) отражает противоположность направления оси  $X$  и направления возрастания ускорения  $\Gamma(M)$  при наземных наблюдениях ИСЛ над видимой стороной Луны. Нетрудно видеть, что по типу краевого условия эта задача близка к краевой задаче Карла Нейманна, но отличается от неё тем существенным

обстоятельством, что направление дифференцирования искомой функции не совпадает с нормалью к краевой поверхности  $S$ .

Принципиальный алгоритм решения краевой задачи состоит в следующем. Поскольку производная гармонической функции  $V(P)$  в области гармоничности последней также есть функция гармоническая, решение задачи Дирихле для гармонической вне масс функции  $\Gamma(P)$  в сферическом приближении записывается в виде интеграла Пуассона:

$$\Gamma(P) = -\frac{\partial V(P)}{\partial X} = -\frac{1}{4\pi R_S} \int_S \Gamma(M) \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} dS(M), \quad (7.2)$$

где  $\rho$  и  $R$  суть радиусы-векторы точек  $P$  и  $M$  соответственно, а  $r$  – расстояние между этими точками.

Обозначив далее ядро интегрального преобразования

$$K(P, M) = \int \left( \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} \right) dX, \quad (7.3)$$

приходим к решению сформулированной выше краевой задачи:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R_S} \int_S \Gamma(M) \cdot K(P, M) dS(M). \quad (7.4)$$

Остается определить аналитический вид ядра (7.3) выражения (7.4). Исходя из очевидного равенства

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi,$$

имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\rho - R \cos \psi}{r^3} = -\frac{2\rho^2 - 2\rho R \cos \psi}{2\rho r^3} = -\frac{\rho^2 - R^2}{2\rho r^3} - \frac{1}{2\rho r},$$

откуда в свою очередь имеем

$$K(P, M) = \int \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} dX = -2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int \frac{dX}{r} - \int \frac{dX}{r}.$$

Решение краевой задачи требует наличия наблюдаемых лучевых ускорений  $\Gamma(M)$  во всех точках краевой поверхности  $S$ , что применительно к Луне оказывается невозможным, в силу невозможности измерения наземными средствами лучевых скоростей и ускорений ИСЛ, находящихся над обратной ее стороной. Кардинальное решение проблемы может быть достигнуто лишь при проведении межспутниковых измерений в системе двух или более ИСЛ, обращающихся по существенно различающимся орбитам.

## 8. Уравнение лучевых ускорений искусственного спутника в терминах разложения по сферическим функциям.

Рассмотрим метод определения параметров гравитационного потенциала по измеренным лучевым ускорениям искусственного спутника, альтернативный изложенному в предыдущем параграфе методу решения краевой задачи теории потенциала. На примере Луны выполним вывод уравнения, явным образом связывающего лучевые ускорения ИСЛ с гармоническими коэффициентами разложения гравитационного потенциала в ряд объемных сферических функций. Представим разложение потенциала  $V(\rho, \theta, \lambda)$  силы притяжения Луны во внешней точке  $P(\rho, \theta, \lambda)$  в виде ряда (5.1.1):

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} + \Delta V(\rho, \theta, \lambda), \quad \text{где}$$

$$\Delta V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\oplus}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta).$$

Вычислим лучевое ускорение  $\Gamma(\rho, \varphi, \lambda)$  искусственного спутника, продифференцировав  $\Delta V(\rho, \varphi, \lambda)$  по направлению  $X$  первого радиуса Луны, ориентированного к центру Земли:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, \theta, \lambda) &= -\frac{\partial \Delta V}{\partial X} = \\ &= -\frac{GM_{\oplus}}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{\oplus}^{n+1} \left[ C_{nm} \frac{\partial}{\partial X} \frac{P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda}{\rho^{n+1}} + S_{nm} \frac{\partial}{\partial X} \frac{P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda}{\rho^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

Для однородных гармонических (шаровых) функций вида

$$U_{nm} = (-1)^m \frac{P_{nm}(\cos \theta)}{\rho^{n+1}} \exp(im\lambda), \text{ где}$$

$$\exp(im\lambda) = \cos m\lambda + i \sin m\lambda$$

справедливы формулы Дарвина:

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} + i \frac{\partial}{\partial Y} \right) U_{nm} = U_{n+1, m+1},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} - i \frac{\partial}{\partial Y} \right) U_{nm} = -(n-m+1)(n-m+2) \cdot U_{n+1, m-1}.$$

Суммируя их, имеем:

$$2 \frac{\partial}{\partial X} U_{nm} = U_{n+1, m+1} - (n-m+1)(n-m+2) \cdot U_{n+1, m-1}.$$

Тогда

$$2 \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{P_{nm}(\cos \theta) \exp(im\lambda)}{\rho^{n+1}} \right] = - \frac{P_{n+1,m+1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \exp[i(m+1)\lambda] \\ + (n-m+1)(n-m+2) \frac{P_{n+1,m-1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \exp[i(m-1)\lambda].$$

Для реальных и мнимых частей последнего равенства по отдельности получаем:

$$2 \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda}{\rho^{n+1}} \right] = - \frac{P_{n+1,m+1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \cos(m+1)\lambda \\ + (n-m+1)(n-m+2) \frac{P_{n+1,m-1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \cos(m-1)\lambda, \\ 2 \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda}{\rho^{n+1}} \right] = - \frac{P_{n+1,m+1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \sin(m+1)\lambda \\ + (n-m+1)(n-m+2) \frac{P_{n+1,m-1}(\cos \theta)}{\rho^{n+2}} \sin(m-1)\lambda.$$

Подставляя эти выражения для производных в (8.1), приходим к

$$\Gamma(\rho, \theta, \lambda) = - \frac{\partial \Delta V}{\partial X} = \frac{GM_{\oplus}}{2a_{\oplus}^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^{n+2} \{ [C_{nm} \cos(m+1)\lambda + \\ + S_{nm} \sin(m+1)\lambda] P_{n+1,m+1}(\cos \theta) - (n-m+1)(n-m+2) [C_{nm} \cos(m-1)\lambda + \\ + S_{nm} \sin(m-1)\lambda] P_{n+1,m-1}(\cos \theta) \}. \quad (8.2)$$

Заметим далее, что при  $m=0$  выполняется равенство:

$$-(n-m+1)(n-m+2)C_{nm} \cos(m-1)\lambda P_{n+1,m-1}(\cos\theta) = C_{n0} \cos\lambda P_{n+1,1}(\cos\theta),$$

так как  $-(n+1)(n+2)P_{n+1,-1}(\cos\theta) = P_{n+1,1}(\cos\theta)$ .

Тогда окончательно имеем из (8.2):

$$\Gamma(\rho, \theta, \lambda) = -\frac{\partial \Delta V}{\partial X} = \frac{GM_{\oplus}}{2a_{\oplus}^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_{\oplus}}{\rho} \right)^{n+2} \left[ 2C_{n0} \cos\lambda P_{n+1,1}(\cos\theta) + Q_n(\theta, \lambda) \right], \quad (8.3)$$

где

$$Q_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=1}^n \{ [C_{nm} \cos(m+1)\lambda + S_{nm} \sin(m+1)\lambda] P_{n+1,m+1}(\cos\theta) - \\ -(n-m+1)(n-m+2) [C_{nm} \cos(m-1)\lambda + S_{nm} \sin(m-1)\lambda] P_{n+1,m-1}(\cos\theta) \}.$$

Соотношение (8.3) устанавливает связь производной аномальной составляющей  $\Delta V(\rho, \theta, \lambda)$  селенопотенциала по направлению, противоположному направлению первого радиуса Луны, ориентированному к центру масс Земли, с гармоническими коэффициентами разложения гравитационного потенциала Луны в ряд объемных сферических функций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2007, 426 с.
2. Кащеев Р.А. Дифференциальные методы динамической космической геодезии. (Часть 1. Метод межспутникового слежения): учебное пособие. – Казань, Изд-во физического ф-та КГУ, 2005, 46 с.
3. Кащеев Р.А. Дифференциальные методы динамической космической геодезии. (Часть 2. Метод спутниковой градиентометрии): учебное пособие. – Казань, Изд-во физического ф-та КГУ, 2006, 40 с.
4. Кащеев Р.А. Современный взгляд на проблему изучения фигуры Земли и фигур тел Солнечной системы. - Ученые записки КГУ (Естественные науки), 2010, т.152, кн.1, 261-269.
5. Колегов Г.А. Избранные разделы космической баллистики искусственных спутников Земли. Методическое пособие. – ЦНИИмаш, 2007, 271 с.
6. Космическая геодезия: учебник для вузов. В.Н.Баранов, Е.Г.Бойко, И.И.Краснорылов и др. – М., Недра, 1986, 407 с.
7. Мориц Г. Современная физическая геодезия. – М.: Недра, 1983, 392с.
8. Яшкин С.Н. Небесная механика: учебное пособие. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2014, 270 с.

последняя страница

*Учебное издание*

**Кашеев Рафаэль Александрович**

**Методы определения параметров  
гравитационного потенциала небесных тел.**

Дизайн обложки

Подписано в печать 07.07.2015.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж      экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28