КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра общей математики

Е.А. ШИРОКОВА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методичоское пособие

Казань – 2015

УДК 517

Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол №7 от 01.07 2015 г.

Рецензенты:
доктор физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **Д.Ф. Абзалилов**,
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **Е.П. Аксентьева**

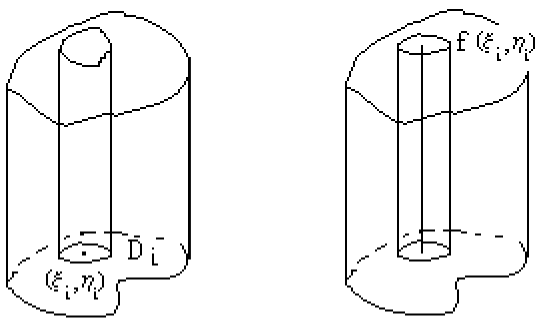
Широкова Е.А.
Дополнительные главы математики.
Учебно-методическое пособие / Е.А.Широкова.– Казань: Казан. ун-т, 2015 – 64 с.

Учебно-методическое пособие представляет собой лекции по курсу «Дополнительные главы математики» в КПФУ для студентов, обучающихся по направлению 05.03.01– «Геология», профиль «Геофизика».
В пособии рассмотрены темы «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы», «Поверхностные интегралы», «Теория поля», «Комплексные переменные», «Аналитические функции», «Теория вычетов» и «Комплексный потенциал плоского векторного поля» с набором примеров по каждой теме. При решении ряда задач применяется пакет компьютерных программ MAXIMA.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

По аналогии с определенными интегралами по отрезку от функции одной переменной рассматриваются интегралы по области D из n-мерного пространства от функции $f(x)=f(x^1,...,x^n)$ n переменных. Для этого, как и в случае одной переменной, область D разбивается на мелкие подобласти $D_i,\ i=1,...,l$, выбирается точка $\xi_i \in D_i$, составляется интегральная сумма $\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i)\cdot m(D_i)$. Здесь $m(D_i)-$ n-мерный объем области D_i. В частности, в случае 2-мерного пространства 2-мерный объем – это площадь области, в случае 3-мерного пространства 3-мерный объем – это обычный объем тела. Далее подобласти начинают стягиваться в точки, при этом их количество бесконечно возрастает**. Предел интегральных сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения исходной области на подобласти и от способа выбора точек $\xi_i \in D_i$, называется интегралом от функции $f(x)$ по области D и обозначается $\int_D f(x)\,dm$**. Интегралы от непрерывных функций по областям с непрерывными границами существуют. С помощью кратных интегралов вычисляют объемы тел, их массу, центр тяжести…. Вычисляются кратные интегралы сведением к последовательным интегрированиям по отрезкам с применением формулы Ньютона-Лейбница. Мы рассмотрим подробно случаи $n=2$ и $n=3$, то есть, двойные и тройные интегралы.

Двойной интеграл. В качестве основной задачи, приводящей к двойному интегралу от функции двух переменных, рассмотрим задачу вычисления объема цилиндроида – тела, ограниченного снизу плоскостью XOY, сбоку – цилиндрической поверхностью, и сверху – поверхностью $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$.



Здесь $f(x,y)-$ непрерывная функция в каждой точке области D, граница которой – непрерывная кривая. Разбивая D на подобласти D_i и заменяя цилиндроид с основанием D_i и верхней поверхностью $z=f(x,y)$ цилиндром высоты $f(\xi_i,\eta_i)$, где (ξ_i,η_i) – произвольная точка из D_i, найдем приблизительное значение объема, равное $\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i,\eta_i)\cdot S(D_i)$. Стягивая подобласти D_i в точки и тем самым увеличивая количество этих подобластей, мы будем уточнять величину объема исходного цилиндроида. Предел интегральных сумм называется **двойным интегралом от** $f(x,y)$ **по области** D **и обозначается** $\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$**.** В данном случае функция $f(x,y)$ положительна. В общем случае подынтегральная функция может произвольно менять знак.

Свойства двойного интеграла. Эти свойства повторяют свойства интеграла функции одной переменной по отрезку.

1. **Линейность**. Двойной интеграл от линейной комбинации функций равен той же линейной комбинации двойных интегралов от этих функций
$$\iint\limits_D \left[\alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y)\right]dx\,dy = \alpha\cdot\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta\cdot\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy\ .$$

2. **Аддитивность.** Если область D разбита на две части D_1 и D_2, то
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dx\,dy.$$

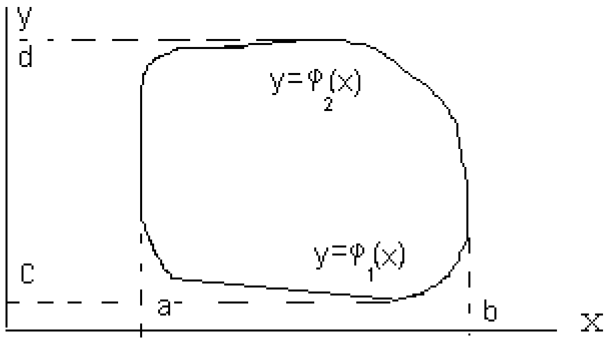
3. **Сохранение неравенства**. Если $f(x,y)\ge g(x,y)$ всюду в области D, то
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \ge \iint\limits_D g(x,y)dx\,dy.$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области D, имеющей площадь S, то
$$m\cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \le M\cdot S.$$

4. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y)-$ непрерывная в замкнутой области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка (ξ,η), для которой справедливо равенство
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S,$$
где S площадь области D.

Вычисление двойного интеграла. Предположим, область D выпукла в направлении оси OY, то есть, что граница области D пересекается любой прямой параллельной оси OY либо не более, чем в двух точках, либо по одному отрезку.

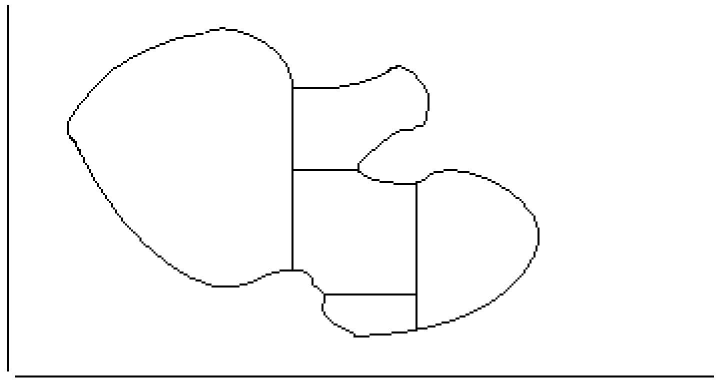
Пусть область D расположена между прямыми $x=a,\ x=b,$ параллельными оси OY. Эти прямые касаются границы области D или частично совпадают с границей по отрезку.



Участки границы области D, проецирующиеся на интервал (a,b), заданы уравнениями соответственно $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x),\ \varphi_1(x)<\varphi_2(x),\ a<x<b.$ В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла по следующей формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx\ .$$

В случае, когда область D не является выпуклой в направлении OY, разобьем область D на подобласти, выпуклые в направлении OY прямыми, параллельными осям координат или будем проецировать область на ось OY и сделаем в повторном интеграле внешний интеграл по переменной y.



Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$ с помощью пакета программ MAXIMA следует ввести команду integrate(integrate(f(x,y),y,φ_1(x),φ_2(x)),x,a,b) и нажать Shift+Enter.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x, y=x^2$.

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения границ области D: $x=0, x=1$.

Прямая, проведенная через область параллельно оси OY в направлении роста y между прямыми $x=0$ и $x=1$, пересекает на точке входа параболу $y=x^2$, а на точке выхода прямую $y=x$. Внешними пределами (по x) являются 0 и 1, а внутренними (по y) x^2 и x.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y)dy = \int_0^1 (x^2 y + \frac{y^2}{2})\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - x^4)dx =$$

$$(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{5})\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} = \frac{7}{60}.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$ по области $y=x^2, y=0, x+y=2.$

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения граничных кривых области D. Линии $y=x^2$ и $x+y=2$ пересекаются в точке (1,1). Линии $y=x^2, y=0$ пересекаются в точке (0,0). Линии $y=0,$ $x+y=2$ пересекаются в точке (2,0). Если вычислять этот интеграл, взяв в качестве внешнего интегрирования интегрирование по x, то при определении пределов интегрирования по y на выходе будут две разные линии, и придется разбивать область интегрирования на две области. Так что в этом случае внешнее интегрирование берем по y, а внутреннее по x.

Прямая, пересекающая область параллельно оси OX в положительном направлении, пересекает в точке входа линию $y=x^2$ а в точке выхода линию $y=2-x$. Внешними пределами (по y) будут 0 и 1, а внутренними пределами (по x) $\sqrt{y}$ и $2-y$. В результате имеем

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} yx dx = \int_0^1 y \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 ((y-2)^2 y - y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} + 2y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{24}.$$

3. Вычислить $\iint_D xy^2 dxdy$, если область D ограничена параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$, применяя пакет программ MAXIMA.

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения кривых, ограничивающих область интегрирования: (1,-2) и (1,2). Для данной области проще внешнее интегрирование проводить по y, а внутреннее – по x. Запишем команду для повторного интегрирования: **integrate(integrate(x*y^2,x,y^2/4,1),y,-2,2)** и нажмем Shift+Enter.

Замена переменных в двойном интеграле. Если переменные x и y, $(x, y) \in D$, в двойном интеграле являются функциями переменных u и v, $(u,v) \in \Omega$, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D равен интегралу по области Ω от функции $f(x(u,v), y(u,v))$, умноженной на модуль якобиана $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}$. То есть, справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx\, dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv .$$

П р и м е р ы.

1. Пусть область D – сектор круга радиуса 1, расположенный между


D

лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/3$.

Перейдем в интеграле $\iint\limits_D (x+y)dx\,dy$ к полярным координатам по формулам $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi$, учитывая, что $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r$. Мы получим

$$\iint\limits_D (x+y)dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/3}\Big(\int\limits_0^1 r^2\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)dr\Big)d\varphi=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy$ по круговому сектору, ограниченному линиями $y=x, y=\sqrt{3}x, x^2+y^2=4.$

Р е ш е н и е. Применение декартовых координат в данном случае было бы сложным. Перейдем к полярным координатам по формулам $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$ Тогда в плоскости полярных координат (r,φ) имеем прямоугольник, ограниченный прямыми $\varphi=\dfrac{\pi}{4},\varphi=\dfrac{\pi}{3},r=0,r=2$. Вычислим модуль якобиана преобразования: $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=\left\|\begin{matrix}\sin\varphi & \cos\varphi\\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi\end{matrix}\right\|=r.$

Таким образом, $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_0^2 rdr=\dfrac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\dfrac{r^2}{2}\Bigg|_0^2=2\Big(\dfrac{\pi^2}{9}-\dfrac{\pi^2}{16}\Big)=\dfrac{7\pi^2}{144}$.

3. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=2x, y=2x+3, y=1-3x, y=3-3x.$

Р е ш е н и е. Для упрощения вычисления перейдем к новым переменным $u=y-2x, v=y+3x.$ Вычислим модуль якобиана преобразования: $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{5}$. Областью интегрирования в плоскости новых переменных будет прямоугольник со сторонами, параллельными осям OU и OV: $u=0,u=3,v=1,v=3.$

$$\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{5}\int\limits_0^3 du\int\limits_1^3\frac{v-u}{5}dv=\frac{1}{25}\int\limits_0^3\frac{(v-u)^2}{2}\Bigg|_1^3 du=\frac{1}{50}\int\limits_0^3((3-u)^2-(1-u)^2)du=$$

$$=\frac{1}{25}\int\limits_0^3(4-2u)du=\frac{1}{25}(4u-u^2)\Bigg|_0^3=\frac{3}{25}.$$

4. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$, если область D ограничена кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ и прямыми $x=0$, $y=0$ с помощью следующей замены переменных: $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$.

Р е ш е н и е. Подставляя в уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ новое представление переменных, получим $\sqrt{u}=2$ или $u=4$. Подставляя в уравнение $x=0$ новое представление x, получим $\cos v=0$ или $v=\pi/2$. Подставляя в уравнение $y=0$ новое представление y, получим $\sin v=0$ или $v=0$. Таким образом, областью в плоскости параметров будет прямоугольник $0\le u\le 4,\ \ 0\le v\le \pi/2$. Вычисляя якобиан, получим

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4u\cos^3 v\cdot\sin^3 v.$$

В итоге, применяя MAXIMу, найдем значение интеграла, если используем команды **integrate(integrate(4u^3*(cos(v))^7*(sin(v))^7,u,0,4),v,0,%pi/2)** и нажмем Shift+Enter.

5. Сосчитать площадь области D, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Р е ш е н и е. Перейдем в интеграле $\iint\limits_D dxdy$ к обобщенным полярным координатам: $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$. Уравнение границы области мы получим при $r=1$. Поэтому, чтобы получить всю область D, необходимо следующие диапазоны изменений параметров: $0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 1$. Сосчитаем якобиан: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=abr$. Следовательно, $\iint\limits_D dxdy=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr=ab\pi$. Таким образом, площадь области, ограниченной эллипсом, равна произведению полуосей на число π.

Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

В случае, когда уравнение поверхности задано в явном виде: $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, площадь поверхности вычисляется по формуле

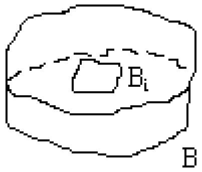
$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy.$$

В том случае, когда поверхность задается параметрически: $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}$

$(u,v)\in D_{u,v}$, площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{D_{u,v}}\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv.$$

Тройные интегралы. В качестве основной задачи, приводящей к тройному интегралу от функции трех переменных, рассмотрим задачу вычисления массы неоднородного тела B с переменной плотностью $\rho(x,y,z)$.



Разделим тело B на n фрагментов. Пусть B_i - один из этих фрагментов. Выберем внутри этого фрагмента точку $P_i(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$. Обозначим через ΔM_i массу вещества внутри B_i, через ΔV_i– объем B_i. В силу непрерывности плотности при достаточно малых размерах фрагмента, то есть, при малых значениях $\max\limits_{(x',y',z'),(x'',y'',z'')\in B_i}\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}=d_i$ можно считать, что $\Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i$. Эти вычисления выполним для всех частей, на которые мы разбили тело. Складывая полученные произведения, найдем массу M тела B:

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i.$$

Точное значение массы найдем, если справа перейдем к пределу, когда число разбиений n стремится к бесконечности, а все фрагменты B_i стягиваются в точку, то есть наибольший из диаметров фрагментов, называемый диаметром разбиения, стремится к нулю:

$$M=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max d_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i.$$

Предел интегральных сумм называется **тройным интегралом от** $\rho(x,y,z)$ **по области** B **и обозначается** $\iiint\limits_B\rho(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_B\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$**.** В данном случае функция $\rho(x,y,z)$ положительна. В общем случае подынтегральная функция может произвольно менять знак.

Свойства тройного интеграла.

1. **Линейность**. Тройной интеграл от линейной комбинации двух функций равен той же линейной комбинации тройных интегралов от этих функций

$$\iiint_B \left[\alpha\cdot f(x,y,z)+\beta\cdot g(x,y,z)\right]dx\,dy\,dz=\alpha\cdot\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz+$$
$$+\beta\cdot\iiint_B g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

2. **Аддитивность**. Если трехмерная область B разбита на две части B_1 и B_2, то $\iiint_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\iiint_{B_1} f(x,y,z)dx\,dy\,dz+\iiint_{B_2} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$.

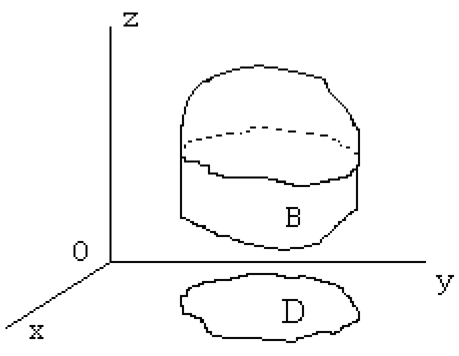
3. **Сохранение неравенства.** . Если $f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$ всюду в B, то
$$\iiint_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz\ge\iiint_B g(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z)$ в трехмерной области B, имеющей объем V, то $m\cdot V\le\iiint_B f(x,y,z)\le M\cdot V$.

4. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в трехмерной замкнутой области B, то в этой области найдется по крайней мере одна точка (ξ,η,ς), для которой справедливо равенство
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=f(\xi,\eta,\varsigma)\cdot V,$$
где V объем области B.

Вычисление тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла, как и вычисление двойного интеграла, сводится к последовательным вычислениям интегралов по отрезкам.

Пусть любая прямая, параллельная оси OZ пересекает данное тело B либо по одному отрезку, либо касается его в одной точке. Проекцией тела на плоскость XOY является область. Обозначим ее D.



Пусть уравнения поверхностей, ограничивающих тело снизу и сверху (в направлении движения по оси OZ) соответственно, $z=\psi_1(x,y),\ (x,y)\in D$, и $z=\psi_2(x,y),(x,y)\in D$. Теперь тройной интеграл можно записать в виде двойного интеграла по области D от интеграла по отрезку с переменными пределами:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy.$$

Пусть уравнения кривых, ограничивающих область D снизу и сверху (в направлении движения вдоль оси OY) $y = \varphi_1(x),\ x \in [a,b]$, и $y = \varphi_2(x),\ x \in [a,b]$.

Тогда $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Для вычисления интеграла $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ с помощью пакета программ MAXIMA следует ввести команду integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),z,ψ_1(x,y),ψ_2(x,y)),y,φ_1(x),φ_2(x)),x,a,b) и нажать Shift+Enter.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iiint\limits_\Omega \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^4}$, где Ω- тело, ограниченное плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Р е ш е н и е. Проекцией тела на плоскость OXY является область D, ограниченная прямыми $x=0,\ y=0,\ y=1-x$. Тогда

$$\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^4} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^4} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(x+y+z+1)^3} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} dy = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^2}{8} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 1 \right) = \frac{1}{48}.$$

Для того, чтобы вычислить тот же интеграл с применением MAXIMы, требуется ввести команду **integrate(integrate(integrate((x+y+z+1)^(-4),z,0,1-x-y)y,0,1-x),x,0,1)** и нажать Shift+Enter.

2. Вычислить $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz,$ где Ω - тело, ограниченное снизу параболоидом вращения $z = x^2+y^2$, а сверху плоскостью $z=1$.

Р е ш е н и е. Проекцией тела на плоскость XOY является круг $x^2+y^2 \le 1$, который и является областью интегрирования D. Таким образом,

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz = \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{1} (x^2+y^2)dz \right] dxdy = \iint_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)dxdy.$$ Для упрощения вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Тогда уравнение границы области D примет вид $r=1$. В результате имеем

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3(1-r^2)dr = 2\pi \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3. Вычислить интеграл $\iiint_\Omega x^2 dxdydz,$ где тело Ω ограничено поверхностями $z = x^2+y^2,\ z = 2(x^2+y^2),\ y = 3x,\ y = 4x,\ x = 5$ с применением MAXIMы.

Р е ш е н и е. Проекцией тела Ω на плоскость XOY является треугольник $0 \le x \le 5,\ 3x \le y \le 4x$. Поэтому следует ввести команды **integrate(integrate(integrate(x^2,z,x^2+y^2,2*(x^2+y^2)),y,3*x,4*x),x,0,5)** и нажать Shift+ Enter.

4.Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Р е ш е н и е. Для того, чтобы сосчитать объем тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, введем обобщенные сферические координаты:
$x = ar\cos\varphi\cos\psi,\ y = br\sin\varphi\cos\psi,\ z = cr\sin\psi,$
$0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi/2 < \psi < \pi/2,\ 0 \le r \le 1.$

Вычисляя якобиан $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi,\psi)} = abcr^2\cos\psi$, получим

$$\iiint_\Omega dxdydz = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}abc.$$

Для того, чтобы сосчитать объем тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, введем обобщенные сферические координаты:
$x = ar\cos\varphi\cos\psi,\ y = br\sin\varphi\cos\psi,\ z = cr\sin\psi,$
$0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi/2 < \psi < \pi/2,\ 0 \le r \le 1.$

Вычисляя якобиан $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi,\psi)} = abcr^2\cos\psi$, получим

$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi \int\limits_0^1 r^2 dr = \dfrac{4}{3}\pi abc$. Следовательно, объем эллипсоида равен произведению полуосей, умноженному на $4\pi/3$.

Замена переменных в тройном интеграле. Если переменные x, y и z, $(x,y,z)\in B$, в тройном интеграле являются функциями переменных u, v и w, $(u,v,w)\in\Omega$, то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по трехмерной области B равен интегралу по области Ω от функции $f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, умноженной на модуль якобиана $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. То есть, справедлива формула

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)\,dx\,dydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\cdot\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

П р и м е р ы.

1. Пусть трехмерная область B – верхнее полушарие радиуса 1. Найти $\iiint\limits_{B}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. Перейдем к сферическим координатам по формулам $x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi,\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi,\ \ z = r\cdot\cos\psi$. Учтем, что $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = -r^2\cdot\sin\psi$, и значит в верхнем полушарии $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cdot\sin\psi$. В результате расстановки пределов интегрирования получим

$$\iiint\limits_{B}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi d\psi \int\limits_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{5}.$$

2. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где тело Ω ограничено конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=1$.

Р е ш е н и е. Если использовать для вычисления декартовы координаты, то появятся радикалы, которые затруднят вычисление. Поэтому введем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1. \\ z = z \end{cases}$$

Пределы изменения параметров обусловлены тем, что уравнение конической поверхности в новых координатах имеет вид $z = r$, и в пересечении конуса с плоскостью $z = 1$ получим окружность $x^2 + y^2 = 1$, а в цилиндрических координатах $r = 1$. Модуль якобиана преобразования равен

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = r.$$

Таким образом, $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_r^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 r^2(1-r)dr = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, где тело Ω ограничено эллипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Р е ш е н и е. В целях упрощения счета введем обобщенные сферические координаты, что позволит избежать радикалов в подынтегральных функциях:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\psi \\ y = br\sin\varphi\cos\psi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1, \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$$

так как в обобщенных сферических координатах уравнение поверхности, ограничивающей тело, будет $r = 1$. Вычислим модуль якобиана преобразования:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}\right| = \left|\begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix}\right| = abcr^2\cos\psi.$$

Итак, $\iiint\limits_{\Omega} \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dxdydz = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int\limits_0^1 r^4 dr = \dfrac{4}{5}\pi abc$.

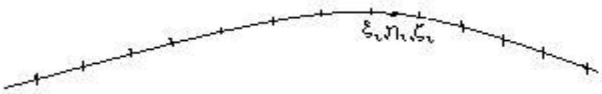
4. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$, где тело Ω расположено в октанте $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ и ограничено поверхностями $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}, z = \dfrac{x^2+y^2}{3}, xy = 1, xy = 4, y = 3x, y = 4x$.

Р е ш е н и е. Введем новые переменные: $u=\dfrac{y}{x},\ v=xy,\ w=\dfrac{x^2+y^2}{z}$. Такая замена обеспечит в плоскости новых переменных параллелепипед: $3\le u\le 4,\ 1\le v\le 4,\ 2\le w\le 3$. Так как, выражая старые переменные через новые, мы получим соотношения $x=\sqrt{\dfrac{v}{u}},\ y=\sqrt{uv},\ z=\dfrac{(1+u^2)v}{uw}$, нетрудно подсчитать значение якобиана: $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{v(1+u^2)}{2u^2w^2}$. Теперь для того, чтобы сосчитать заданный интеграл с помощью MAXIMы, введем команду
integrate(integrate(integrate(v^3*(1+u^2)^2/(2*w^3*u^3),w,2,3),v,1,4), u,3,4) и нажмем Shift+Enter.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл 1-го рода. В качестве основной задачи, приводящей к криволинейному интегралу первого рода, рассмотрим задачу о вычислении массы неоднородной нити.

Пусть C – кривая в пространстве XYZ, любой фрагмент которой имеет длину. Тяжелая неоднородная нить расположена вдоль этой кривой. Плотность нити, рассчитанная на единицу длины, зависит от местоположения точки на кривой и равна $\rho(x,y,z)$, причем $\rho(x,y,z)$– непрерывная на C функция. Для того, чтобы вычислить массу неоднородной нити, разобьем кривую C на n фрагментов с длинами Δl_i и на каждом таком фрагменте выберем точку с координатами (ξ_i,η_i,ζ_i) и найдем



значение $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$.

Предполагая, что длина i-го фрагмента мала и учитывая, что плотность непрерывна, получим, что масса этого фрагмента будет приблизительно равна $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$, при этом чем меньше фрагмент, тем точнее полученная масса этого фрагмента. Поэтому массу всей нити можно получить, просуммировав массы всех фрагментов и устремив к нулю длины фрагментов, одновременно увеличивая количество фрагментов, на которые разбита кривая. Таким образом, выражение для массы нити будет иметь вид

$$M = \lim_{\max_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i .$$

Обозначая предел интегральной суммы с помощью интеграла, получим

$$M = \int_C \rho(x, y, z) dl .$$

Правая часть последнего выражения называется **криволинейным интегралом первого рода или криволинейным интегралом по длине дуги**. Заметим, что результат интегрирования не зависит от направления движения по кривой С, как не зависит от направления измерения масса нити.

С помощью криволинейного интеграла 1-го рода можно вычислять не только массу нити, но и другие физические характеристики нити: моменты, центр тяжести.

Способ вычисления криволинейного интеграла первого рода. Пусть требуется вычислить $\int_C f(x, y, z) dl$, когда функция $f(x, y, z)$ непрерывна на кривой С. Кривая С задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [0, T], \\ z = z(t), \end{cases}$ где функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[0, T]$ производные.

В этом случае справедлива следующая формула для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_0^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt .$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\int_C (x - y) dl$, где С – верхняя полуокружность единичного радиуса с центром в нуле на плоскости XY.

Р е ш е н и е. Параметрическим уравнениями данной полуокружности являются $x = \cos t, y = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$. В данном случае полуокружность находится на плоскости XY, поэтому $z \equiv 0$. Используя формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода, получим

$$\int_C (x - y) dl = \int_0^\pi (\cos t - \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi (\cos t - \sin t) dt = -2 .$$

2. Вычислить $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl$, где С – часть винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, \quad t \in [0, 2\pi]$.

Р е ш е н и е. В соответствии с приведенной формулой вычисления криволинейного интеграла первого рода, пользуясь заданной параметризацией, получим $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)dl = \int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\,2\pi(a^2+b^2\frac{4\pi^2}{3})$.

3. Найти массу дуги кривой $x=t, y=\frac{t^2}{2}, z=\frac{t^3}{3}$, $t\in[0,1]$, плотность которой меняется по закону $\sqrt{3y}$.

Р е ш е н и е. Масса дуги С вычисляется по формуле $\int\limits_C \rho(x,y,z)dl$, где $\rho(x,y,z)$ – плотность неоднородной дуги. В соответствии с параметризацией и формулой плотности получим значение массы в виде интеграла: $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{3}{2}}t\sqrt{1+t^2+t^4}dt$. Такой интеграл вычисляется хотя бы с помощью MAXIMы.

Криволинейный интеграл 2-го рода. В качестве основной задачи, приводящей к криволинейному интегралу второго рода, рассмотрим задачу о вычислении работы силы вдоль кривой.

Пусть С – кривая в пространстве XYZ с заданным направлением движения по ней. В каждой точке кривой задан вектор силы

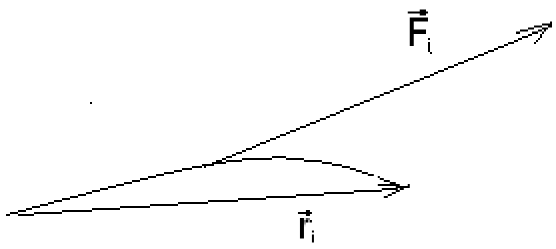
$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Следует вычислить работу силы $\vec{F}(x,y,z)$ вдоль кривой С.

Если бы кривая была прямолинейным направленным отрезком $\vec{r}$, а сила $\vec{F}$ была постоянной вдоль всего этого отрезка, работу мы вычислили бы с помощью скалярного произведения по формуле $A=(\vec{F},\vec{r})$.

Будем полагать компоненты вектора силы $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывными на С функциями. Будем считать кривую С гладкой, то есть такой, что в каждой точке кривой существует касательная к кривой в этой точке, а при разбиении кривой точками на дуговые фрагменты и при измельчении такого разбиения хорда, соединяющая концы дугового фрагмента, становится сколь угодно близкой к соответствующему дуговому фрагменту.

Для вычисления работы силы вдоль кривой разобьем кривую С на n фрагментов точками с координатами (x_i, y_i, z_i) так, что при движении в заданном направлении по кривой параметр i растет. Выберем на i-м дуговом фрагменте точку с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i). При измельчении разбиения кривой вектор силы на i-м дуговом фрагменте мало отличается от вектора $\vec{F_i} = (P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i), Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i), R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i))$ вследствие непрерывности компонент вектора силы. В свою очередь, путь вдоль i-го дугового фрагмента от точки с координатами (x_i, y_i, z_i) к точке с координатами $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ при измельчении разбиения мало отличается от пути вдоль соответствующей хорды. Прямолинейный путь вдоль хорды задается вектором $\vec{r}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i) = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$, причем измельчение разбиения равносильно стремлению к нулю компонент вектора $\vec{r}_i$. Таким образом, работа силы вдоль i-го дугового фрагмента близка к значению $A_i = (\vec{F}_i, \vec{r}_i)$, и это значение тем точнее, чем мельче разбиение кривой С.



Работу вдоль всей кривой С мы получим, если просуммируем значения работы на всех дуговых фрагментах кривой С, измельчая разбиение и увеличивая одновременно количество дуговых фрагментов:

$$A = \lim_{\substack{\max\limits_i \Delta x_i \to 0 \\ \max\limits_i \Delta y_i \to 0 \\ \max\limits_i \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\substack{\max\limits_i \Delta x_i \to 0 \\ \max\limits_i \Delta y_i \to 0 \\ \max\limits_i \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i .$$

Переходя с помощью предела от интегральных сумм к интегралу, имеем

$$A = \int_C (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Интеграл в правой части последнего выражения называется **криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам.** Этот интеграл вычисляют только вдоль **ориентированных** кривых – то есть, кривых, на которых задано направление. Заметим, что, если мы сменим направление движения вдоль кривой С на противоположное, а значит, заменим при вычислении A_i вектор $\vec{r}_i$ на вектор $-\vec{r}_i$, то получим замену знака A на противоположный знак. Поэтому при задании криволинейного интеграла второго рода обязательно задают **направление движения** по кривой интегрирования.

В случае, когда кривая С замкнута, символ интеграла обычно несколько изменяют, добавляя пересекающий его кружок: $\oint$.

Способ вычисления криволинейного интеграла второго рода. Пусть требуется вычислить $\int\limits_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

Кривая С задана параметрически: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$ $t\in[0,T]$, где функции $x(t),y(t),z(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[0,T]$ производные. В этом случае мы имеем следующую формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz =$$

$$=\int\limits_0^T [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t)y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где С – парабола $y=x^2$, $x\in[-1,1]$, в плоскости XY, пробегаемая в направлении возрастания x.

Р е ш е н и е. В качестве параметра для уравнения кривой С можно выбрать переменную x. То есть, параметрическое уравнение кривой имеет вид $x=x, y=x^2, x\in[-1,1]$. Поскольку кривая находится в плоскости XY, имеем $z\equiv 0$. Поэтому в соответствии с формулой для вычисления криволинейного интеграла второго рода

$$\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int\limits_{-1}^{1}[(x^2-2xx^2)1+((x^2)^2-2xx^2)2x]dx= \quad =$$

$$\int\limits_{-1}^{1}[x^2-2x^3-4x^4+2x^5]dx=-\frac{14}{15}.$$

2. Вычислить $\int\limits_C (y^2-z^2)dx+yzdy-2x^2dz$, где С – кривая $x=2t,\ y=-t^2,\ z=t-t^3$, $t\in[0,1]$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой

$$\int\limits_C (y^2-z^2)dx+yzdy-2x^2dz=\int\limits_0^1[(t^4-(t-t^3)^2)\cdot 2+t^2(t-t^3)\cdot 2t-8t^2(1-3t^2)]dt.$$

3. Вычислить работу силы $\vec{f}=(2y,z,-3x)$ вдоль кривой С, где С – часть винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,$ $t\in[0,2\pi]$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой работы силы вдоль кривой $A=\int\limits_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$, где под интегралом стоит скалярное произведение,

$$A=\int\limits_C 2ydx+zdy-3xdz=\int\limits_0^{2\pi}(2a\sin t(-a\cos t)+bt\cdot a\cos t-3a\cos t\cdot b)dt\,.$$

Связь между криволинейным интегралом второго рода вдоль замкнутой кривой на плоскости и двойным интегралом. Формула Грина.

Пусть C – кусочно-гладкая замкнутая кривая, ограничивающая область D. На кривой C задано такое направление, что при движении в этом направлении область D остается слева. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области D вплоть до ее границы, кроме того, функции $Q'_x(x,y)$ и $P'_y(x,y)$ также непрерывны в D вплоть до границы. Тогда справедлива **формула Грина**

$$\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D (Q'_x-P'_y)dxdy\,.$$

П р и м е р.

Вычислить $\oint\limits_C x^2dx+2xydy$, где C – единичная окружность с центром в нуле, проходимая так, что круг остается слева, двумя способами:
а) непосредственно, б) с помощью формулы Грина.

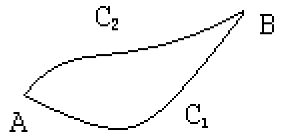
Р е ш е н и е. а) Параметризуем кривую: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi].$ Теперь

$$\oint\limits_C x^2dx+2xydy=\int\limits_0^{2\pi}(-\sin t\cos^2 t+2\cos^2 t\sin t)dt=0\,.$$

б) $\oint\limits_C x^2dx+2xydy=\iint\limits_D (2y-0)dxdy=2\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=0.$

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости.

В общем случае криволинейный интеграл $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, где кривая C соединяет точки A и B на плоскости XY, зависит от пути C. Зададимся вопросом, каким условиям должны удовлетворять функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в области D, чтобы результат интегрирования по любой кривой, лежащей внутри D, и соединяющей две фиксированные точки, был одинаковым.



Очевидно, что условие независимости результата интегрирования криволинейного интеграла по кривой, соединяющей две фиксированные точки области, от формы этой кривой равносильно условию равенства нулю интеграла по любой замкнутой кривой, лежащей в этой области. Действительно, обозначим через C_1 и C_2 две кривые, лежащие в D, с общими начальной и конечной точками. Тогда кривая $C = C_1 \bigcup C_2^{-}$, где знак «-» означает, что соответствующая кривая проходится в противоположном направлении, будет замкнутой. Следовательно, соотношение

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

равносильно тому, что $\int\limits_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Необходимым и достаточным условием того, что $\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где C – любая замкнутая кривая, лежащая в области D, является равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, выполняющееся всюду в D для непрерывных функций P'_y и Q'_x. Для доказательства этого факта используется формула Грина.

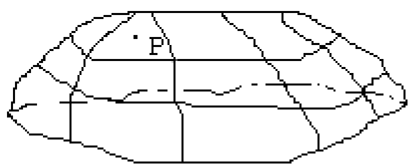
Заметим, что выполнение условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ – это условие того, что подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, называемой потенциалом. Действительно, если $P(x,y) = U'_x$ и $Q(x,y) = U'_y$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = U''_{xy}$.

Таким образом, выполнение условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ обеспечивает представление $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, и криволинейный интеграл от этого выражения по любой кривой, соединяющей две фиксированные точки A и B с координатами (x_A, y_A) и (x_B, y_B), соответственно, равен $\int\limits_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A)$.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Поверхностный интеграл первого рода. Основной задачей, приводящей к поверхностному интегралу первого рода, является задача о вычислении массы неоднородной оболочки.

Пусть S – поверхность в пространстве XYZ. Тяжелая неоднородная оболочка расположена в пространстве в виде этой поверхности. Плотность оболочки, рассчитанная на единицу площади поверхности, зависит от местоположения точки на поверхности и равна $\rho(x, y, z)$, причем $\rho(x, y, z)$– непрерывная на S функция. Для того, чтобы вычислить массу неоднородной оболочки, разобьем поверхность S на n фрагментов S_i с площадями Δs_i и на каждом таком



фрагменте

$\mathrm{P} = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

выберем точку P_i с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i). Найдем значение $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Предполагая, что площадь i-го поверхностного фрагмента мала и учитывая, что плотность непрерывна, получим, что масса этого фрагмента будет приблизительно равна $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$, причем чем меньше фрагмент, тем точнее полученная масса этого фрагмента. Поэтому массу всей оболочки можно получить, просуммировав массы всех фрагментов и устремив к нулю площади фрагментов, одновременно увеличивая количество фрагментов, на которые разбита поверхность. Таким образом, выражение для массы оболочки будет иметь вид

$$M = \lim_{\max\limits_i \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i .$$

Представим предел интегральной суммы через двойной интеграл, так как сомножитель Δs_i – элемент площади. В результате предельного перехода получим $M = \iint\limits_S \rho(x, y, z) ds$.

Интеграл, стоящий в правой части последнего выражения, называется **поверхностным интегралом первого рода или поверхностным интегралом по площади поверхности**. Заметим, что результат интегрирования не зависит от выбора стороны оболочки.

С помощью поверхностного интеграла 1-го рода можно вычислять не только массу оболочки, но и другие физические характеристики оболочки: моменты, центр тяжести….

Способ вычисления поверхностного интеграла первого рода. Пусть требуется вычислить $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$, когда функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S. Поверхность S задана параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$

$(u,v) \in [0,U] \times [0,V]$, где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U] \times [0,V]$ частные производные первого порядка. Формула для вычисления поверхностного интеграла имеет вид:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{[0,U]\times[0,V]} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2}dudv$$

В частности, когда поверхность задана в явном виде: $z = g(x,y), (x,y) \in D,$ мы имеем формулу $\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x'^2+g_y'^2}dx\,dy$.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint\limits_S |xy|\,ds$, где S – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

Р е ш е н и е. Прежде всего, заметим, что проекцией данной поверхности S на плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Параметризуем уравнение поверхности с помощью полярных координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \quad r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]. \\ z = r^2, \end{cases}$$

Вычислим входящие в формулу якобианы:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \ \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)} = -2r^2\cos\varphi, \ \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,t)} = -2r^2\sin\varphi.$$

Теперь получим представление исходного поверхностного интеграла через двойной интеграл по прямоугольнику значений параметров:

$$\iint\limits_S |xy|\,ds = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 |\sin\varphi\cos\varphi| \sqrt{r^2+4r^4}dr =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr.$$

Таким образом, мы пришли к вычислению произведения двух интегралов по отрезкам.

2. Найти массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2,(z\ge 0)$, плотность которой в каждой ее точке равна z/a.
Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для массы неоднородной оболочки $m=\iint\limits_S \rho(x,y,z)ds$. Перейдем к сферическим координатам
$x=a\cos\varphi\cos\psi, y=a\sin\varphi\cos\psi, z=a\sin\psi$, $\varphi\in[0,2\pi],\psi\in[0,\pi/2]$, и вычислим якобианы
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=a^2\cos\psi\sin\psi, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=a^2\cos\varphi\cos^2\psi, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=a^2\sin\varphi\cos^2\psi$. Теперь

$$m=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi a^2\sqrt{\cos^2\psi\sin^2\psi+\cos^4\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}d\psi=$$

$$=2\pi a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi\cos\psi d\psi=\pi a^2.$$

3. Найти массу оболочки конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ с плотностью $\rho=(2-z)$.
Р е ш е н и е. Оболочка состоит из части конической поверхности $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ и из части плоскости $S_2: z=1,\ x^2+y^2\le 1$. Поэтому искомая масса представляет собой сумму двух слагаемых:
$m=\iint\limits_{S_1}\rho(x,y,z)ds+\iint\limits_{S_2}\rho(x,y,z)ds=\iint\limits_{S_1}(2-z)ds+\iint\limits_{S_2}1ds$. Второй интеграл представляет собой площадь единичного круга и равен π. Для вычисления первого интеграла введем цилиндрические координаты:
$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. Уравнение конической поверхности дает соотношение $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Вычислим якобианы: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)}=-r\cos\varphi, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(r,\varphi)}=-r\sin\varphi$. Поэтому
$\iint\limits_{S_1}(2-z)ds=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(2-r)\sqrt{2}rdr$. В итоге искомая масса равна $\pi\left(1+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$.

Поверхностный интеграл второго рода. Основной задачей, приводящей к поверхностному интегралу второго рода, является задача о вычислении потока вектора через поверхность.

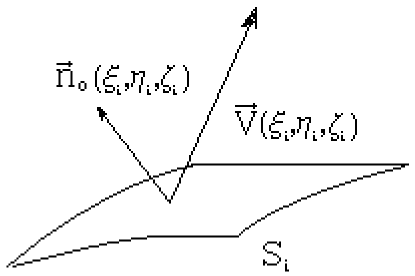
Пусть S – двусторонняя поверхность, то есть такая, что при движении точки по любому замкнутому пути, лежащему на поверхности, нормаль к поверхности возвращается в исходное состояние. (Примером односторонней поверхности является лист Мебиуса). Предположим, что через поверхность S протекает жидкость, причем скорость течения жидкости (ее направление и величина) различная в разных точках поверхности S. Таким образом, в точках поверхности задан вектор скорости:

$$\vec{V}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),\ (x,y,z)\in S.$$

Будем считать функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывными на S.

Потоком вектора $\vec{V}$ через поверхность S назовем объем жидкости, протекающей через поверхность S в направлении нормали к фиксированной стороне поверхности за единицу времени. Вычислим поток вектора через поверхность.

Будем считать поверхность гладкой, то есть имеющей касательную плоскость и нормаль в каждой точке. Разделим поверхность на n фрагментов S_i, настолько малых, что нормаль к этому поверхностному фрагменту в различных его точках практически совпадает с нормалью к S_i в одной выбранной на S_i точке. Тогда поток Π_i вектора $\vec{V}$ через фрагмент S_i приблизительно равен $h_i\cdot\Delta s_i$, где Δs_i– площадь фрагмента, h_i– проекция вектора $\vec{V}$ на направление нормали к выбранной стороне поверхностного фрагмента S_i в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$. То есть, h_i – скалярное произведение вектора $\vec{V}$ и единичного вектора нормали.



Следовательно, $h_i=(\vec{V}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i),\vec{n}_0(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i))$, где $\vec{n}_0(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ - единичный вектор нормали к поверхностному фрагменту в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$. Таким образом, $\Pi_i\approx[P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\gamma_i]\cdot\Delta s_i$, причем значение Π_i тем точнее, чем меньше площадь фрагмента S_i. Заметив, что площадь фрагмента S_i можно заменить площадью соответствующего фрагмента касательной в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ плоскости к S, получим:

$\cos\alpha_i \Delta s_i = \Delta s_{i(yz)}, \cos\beta_i \Delta s_i = \Delta s_{i(zx)}, \cos\gamma_i \Delta s_i = \Delta s_{i(xy)}$. Здесь $\Delta s_{i(yz)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость YOZ, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\alpha_i$, $\Delta s_{i(zx)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость ZOX, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\beta_i$, $\Delta s_{i(xy)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость XOY, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\gamma_i$.

В итоге мы получим следующие выражения для вычисления потока:

$$\Pi = \iint_S (\vec{V}, \vec{n}_0) ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum [P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\gamma_i]\Delta s_i =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta s_{i(yz)} \to 0 \\ \max \Delta s_{i(zx)} \to 0 \\ \max \Delta s_{i(xy)} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(yz)} + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(zx)} + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(xy)}].$$

При переходе к пределу в последнем выражении, учитывая, что пределы элементов площадей на координатных плоскостях – это произведения дифференциалов соответствующих координат, получим

$$\Pi = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Выражение в правой части последнего равенства называется **поверхностным интегралом второго рода или поверхностным интегралом по координатам.**

Заметим, что смена стороны поверхности меняет знак вектора нормали $\vec{n}_0$ на противоположный, поэтому смена стороны поверхности меняет знак соответствующего интеграла второго рода на противоположный.

Следует отметить, что поверхностный интеграл второго рода иногда записывают в виде

$$\iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие векторы нормали к поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода. Пусть требуется вычислить $\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$, когда функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны на поверхности S. Поверхность S задана параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in [0,U]\times[0,V]$, где функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U]\times[0,V]$ частные производные первого порядка, причем

$\sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2}\neq 0,\ \ (u,v)\in[0,U]\times[0,V]$. В этом случае формула для вычисления поверхностного интеграла второго рода имеет вид

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{[0,U]\times[0,V]}[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+$$
$$+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv.$$

Выбор знаков + или – определяется выбором стороны поверхности.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint\limits_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$, где S – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Р е ш е н и е. Параметризуем уравнение эллипсоида с помощью обобщенных сферических координат: $x=a\cos\varphi\cos\psi, y=b\sin\varphi\cos\psi, z=c\sin\psi$, $\varphi\in[0,2\pi],\psi\in[-\pi/2,\pi/2]$. Вычислим соответствующие якобианы: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}=ab\cos\psi\sin\psi, \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\psi)}=bc\cos\varphi\cos^2\psi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\psi)}=ac\sin\varphi\cos^2\psi$. Чтобы определить, какой знак нужно будет выбрать, обратим внимание на то, что внешняя нормаль к эллипсоиду в тех точках, где $z>0$, то есть, $\psi\in(0,\pi/2)$, имеет положительную проекцию на ось OZ. Это означает, что третья координата вектора нормали при $\psi\in(0,\pi/2)$ должна быть положительной. В нашем случае $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=ab\cos\psi\sin\psi>0$ при $\psi\in(0,\pi/2)$, следовательно, найденные якобианы являются координатами вектора нормали именно к внешней стороне эллипсоида, и менять знак у интеграла не придется. Таким образом,

$$\iint\limits_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^{2\pi}(\frac{bc\cos\varphi\cos^2\psi}{a\cos\varphi\cos\psi}+\frac{ac\sin\varphi\cos^2\psi}{b\sin\varphi\cos\psi}+$$
$$+\frac{ab\cos\psi\sin\psi}{c\sin\psi})d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^{2\pi}(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\cos\psi d\varphi=4\pi(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}).$$

2. Вычислить поток вектора $\vec{V}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2\le a^2, z\in[0,h]$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой потока $\Pi = \iint\limits_S (\vec{V}, \vec{n}) ds$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности, имеем $\Pi = \iint\limits_S (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma) ds$. Введем цилиндрические координаты $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$, тогда уравнение боковой поверхности цилиндра примет вид $r = a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h$, то есть, параметрами являются φ и z, а параметрические уравнения поверхности примут вид $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = z$. Имеем следующее представление якобианов:
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,r)} = 0, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,r)} = a\cos\varphi, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,r)} = a\sin\varphi$. Теперь для вычисления потока нам нужно вычислить интеграл $\Pi = \pm\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h (a^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot z + a^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot z) ds$.
Для выбора знака перед интегралом заметим, что направление внешней нормали к цилиндру совпадает с направлением радиуса-вектора точки цилиндра, и так как соответствующие якобианы совпадают по знаку с координатой радиуса-вектора, перед интегралом выберем знак +. В результате вычислений получим $\Pi = 2a^2\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^h zdz = 0$.

3. Вычислить поток вектора $\vec{V} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \le 1$, в направлении внешней нормали.
Формула для вычисления потока будет той же, что и в предыдущей задаче: $\Pi = \iint\limits_S (y\cos\alpha + z\cos\beta + x\cos\gamma) ds$. Введем цилиндрические координаты, тогда параметрические уравнения поверхности примут вид
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$. Вычислим якобианы:
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)} = -r\cos\varphi, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(r,\varphi)} = -r\sin\varphi$. Заметим, что аппликата вектора внешней нормали для данного конуса всегда отрицательна. Поскольку $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r > 0$, а знак этого якобиана должен совпадать со знаком аппликаты вектора внешней нормали, в формуле для вычисления потока выбираем знак –. Таким образом,

$$\Pi = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (-r^2\sin\varphi\cos\varphi - r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi) dr =$$

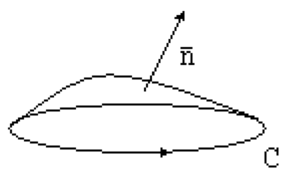
$$= \int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi) d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = 0.$$

Связь криволинейного интеграла второго рода по замкнутой кривой в пространстве с поверхностным интегралом. Формула Стокса

Пусть C – гладкая замкнутая пространственная кривая, S – такая двусторонняя поверхность, что кривая C является границей этой поверхности. Тогда справедлива **формула Стокса**

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

где выбор стороны поверхности, а значит, выбор знаков направляющих косинусов нормали к поверхности определяется заданием обхода по кривой C следующим образом: если глядеть с конца вектора нормали к поверхности C, должно быть видно, что обход кривой C совершается против часовой стрелки.



Следует пояснить, что собой представляет правая часть формулы Стокса. Под интегралом находится определитель, в верхней строке которого расположены направляющие косинусы вектора нормали к поверхности S, в средней строке расположены символические операторы нахождения частных производных, и в нижней строке расположены функции, представленные в криволинейном интеграле. Раскладывая определитель по верхней строке, мы получим поверхностный интеграл второго рода. Формальное «умножение» символического оператора на функцию означает, что от этой функции следует взять частную производную по соответствующей переменной.
В частном случае – когда поверхность S – это плоскость XOY, то есть $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (0,0,1)$, формула Стокса превращается в формулу Грина.

П р и м е р ы.

1.Вычислить с применением формулы Стокса $\oint_C (z+y)dx + (x-z)dy + (y+2x)dz$

, где C – окружность, полученная в пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $x - y + 3z = 0$ и проходимая так, что та сторона конечной части плоскости, нормаль к которой имеет координаты $(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}})$, остается слева.

Р е ш е н и е. В качестве поверхности S можно выбрать как часть заданной сферы, так и часть заданной плоскости. Для простоты вычислений мы выберем плоскость. Применяя формулу Стокса, получим

$$\oint_C (z+y)dx+(x-z)dy+(y+2x)dz=\frac{1}{\sqrt{11}}\iint_S \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z+y) & (x-z) & (y+2x) \end{vmatrix} ds=\frac{3}{\sqrt{11}}\iint_S ds$$

Последний интеграл равен площади круга, находящегося в сечении шара плоскостью, проходящей через центр шара. Поскольку этот круг имеет радиус 2, получим $\oint_C (z+y)dx+(x-z)dy+(y+2x)dz=\frac{12\pi}{\sqrt{11}}$.

2. Вычислить двумя способами $\oint_C xdx+ydy+zdz$, где С – кривая, получаемая в пересечении конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскости $y/2+z=1$ и проходимая так, что та сторона конечной части плоскости, нормаль к которой имеет координаты $(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$, остается слева.

Р е ш е н и е. а) Непосредственное вычисление. Переходя к цилиндрическим координатам, получим параметрические уравнения конуса: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости, пересекающейся с конусом, получим для точек, общих для конуса и плоскости, связь между параметрами r и φ: $r(1+\sin\varphi/2)=1$. Следовательно, для точек кривой С имеем параметризацию:

$x(\varphi)=\frac{2\cos\varphi}{2+\sin\varphi},\ y(\varphi)=\frac{2\sin\varphi}{2+\sin\varphi},\ z(\varphi)=\frac{2}{2+\sin\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Таким образом,

$$\oint_C xdx+ydy+zdz=\int_0^{2\pi}[x(\varphi)x'(\varphi)+y(\varphi)y'(\varphi)+z(\varphi)z'(\varphi)]d\varphi=$$
$$=\left.\frac{x^2(\varphi)+y^2(\varphi)+z^2(\varphi)}{2}\right|_0^{2\pi}=0.$$

б) Вычисление с помощью формулы Стокса:

$$\oint_C xdx+ydy+zdz=\frac{1}{\sqrt{5}}\iint_S \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} ds=0.$$

Связь интеграла по замкнутой поверхности с тройным интегралом по телу, ограниченному этой поверхностью. Формула Гаусса-Остроградского

Пусть S – двусторонняя замкнутая поверхность, ограничивающая тело V. Предположим, что функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные в V и непрерывны на S. В этом случае справедлива **формула Гаусса-Остроградского**:

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

где поверхностный интеграл взят по внешней стороне поверхности S.

П р и м е р ы.

1. Вычислить поток вектора $\vec{V} = (x, 2y, 3z)$ через единичную сферу с центром в нуле в направлении внешней нормали двумя способами.

Р е ш е н и е.

а) Непосредственное вычисление. Вводя сферические координаты $x = \cos\varphi\cos\psi,\ y = \sin\varphi\cos\psi,\ z = \sin\psi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi/2 < \psi < \pi/2$, и вычисляя соответствующие якобианы, запишем интеграл, необходимый для вычисления потока:

$$\oiint_S xdydz + 2ydzdx + 3zdxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\varphi\cos^3\psi +$$

$$+2\sin^2\varphi\cos^3\psi + 3\sin^2\psi\cos\psi)d\psi.$$

б) Решение с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

$$\oiint_S xdydz + 2ydzdx + 3zdxdy = \iiint_\Omega (1+2+3)dxdydz = 6\iiint_\Omega dxdydz.$$

Последний интеграл равен $\frac{4}{3}\pi$ как объем шара радиуса 1. То есть величина потока равна 8π.

2. Вычислить поток вектора $\vec{V} = (y-x, 2x, z+3x)$ через полную поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. Если считать поток непосредственно, придется брать сумму потоков через боковую поверхность конуса и через его основание. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\oiint_S (y-x)dydz + 2xdzdx + (z+3x)dxdy = \iiint_\Omega (-1+1)dxdydz = 0.$$

3. Вычислить поток вектора $\vec{V} = (x, y, z)$ через полную поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. Применим формулу Гаусса-Остроградского:

$$\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint_\Omega dxdydz.$$

Последний интеграл равен объему тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, то есть, $4\pi abc/3$.
Следовательно, искомый поток равен $4\pi abc$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Полем называют скалярную или векторную функцию, заданную в каждой точке некоторой части пространства и являющейся физической характеристикой этой части пространства. В зависимости от вида заданной функции различают **скалярное** или **векторное** поле.

Примеры скалярных полей: поле температур, поле электрического потенциала.

Примеры векторных полей: поле скоростей, силовое поле.

Характеристики скалярного поля.
Пусть задано скалярное поле функции $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$.
Поверхностью уровня данного скалярного поля называется поверхность, задаваемая уравнением $u(x, y, z) = const$. Примером является поле температур в части пространства, обеспеченное точечным излучением тепла, и сферические поверхности с центром в точке источника излучения.

Скалярное поле может задаваться не только в пространстве, но и в области на плоскости. Примером плоского скалярного поля может служить поле значений высоты над уровнем моря, заданное на карте местности.
Линией уровня плоского скалярного поля называется кривая, находящаяся в области задания скалярной функции $z = z(x, y)$ и задаваемая уравнением $z(x, y) = const$. Примером линий уровня служат изолинии на картах.

Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$, называется вектор-функция, заданная на A, и равная $\mathrm{grad}\, u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

С помощью градиента определяют производную функции по направлению. Если $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$– единичный вектор направления, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma = (\mathrm{grad}\, u, \vec{l})$.
Как известно, наибольшее изменение в фиксированной точке функция претерпевает в направлении градиента в этой точке.

По заданной функции легко построить градиент. Обратно, если известен градиент функции, то есть, все ее частные производные, то саму функцию легко восстановить с точностью до постоянного слагаемого по формуле

$$u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(\mathrm{grad}\,u,d\vec{r}).$$

Характеристики векторного поля.

Рассмотрим поле вектора $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$.

Векторной линией данного векторного поля называется линия, касательная к которой в любой точке параллельна вектору поля, определенному в этой точке. Примеры: в случае поля скоростей векторные линии называются **линиями тока**, в случае электростатического поля – **силовыми линиями**.

Выведем систему уравнений, связывающих дифференциалы векторных линий. Согласно определению вектор (dx,dy,dz) параллелен вектору (P,Q,R). Следовательно, справедливы соотношения

$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$, которые называются дифференциальными уравнениями векторных линий в пространстве.

Дивергенцией данного векторного поля с непрерывно дифференцируемыми компонентами (P,Q,R) является скалярная величина

$$\mathrm{div}\vec{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Термин дивергенция (или расхождение) поля в точке связан с наличием дополнительных источников или стоков в этой точке. Для того, чтобы не зависеть от выбранной координатной системы при определении дивергенции, в дополнение к аналитическому дадим механическое определение дивергенции. Пусть точка $M_0\in A$. Возьмем шар $B_r(M_0)\subset A$ с центром M_0 радиуса r, лежащий в A. Поверхность этого шара обозначим S_r.

Сосчитаем поток вектора поля через поверхность S_r в направлении внешней нормали:

$$F_r=\oiint\limits_{S_r}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

Согласно формуле Гаусса-Остроградского $F_r=\iiint\limits_{B_r(M_0)}\mathrm{div}\vec{V}dx\,dy\,dz$. В силу непрерывности дивергенции возможно применение к последнему интегралу теоремы о среднем: $F_r=\mathrm{div}\vec{V}(\tilde{M})\frac{4}{3}\pi r^3$, где точка $\tilde{M}\in B_r(M_0)$. Таким образом, $\frac{3F_r}{4\pi r^3}=\mathrm{div}\vec{V}(\tilde{M})$. Пусть теперь $r\to 0$. Тогда вследствие непрерывности дивергенции $\operatorname{div}\vec{V}(\tilde{M}) \to \operatorname{div}\vec{V}(M_0)$. Поэтому мы получаем следующее определение дивергенции в точке M_0:

$$\operatorname{div}\vec{V}(M_0) = \lim_{r\to 0}\frac{3F_r}{4\pi r^3},$$

где F_r – поток вектора поля через сферу радиуса r с центром в точке M_0.

Циркуляцией вектора $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$, вдоль некоторой замкнутой ориентированной кривой С , находящейся внутри множества A, назовем следующий криволинейный интеграл второго рода:

$$G = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \oint_C (\vec{V}, d\vec{r}).$$

Ротором вектора поля с непрерывно дифференцируемыми компонентами назовем следующую векторную величину:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Здесь «умножение» элементов второй строки на элементы третьей строки означает, что от функции из третьей строки берется соответствующая производная.

Ротор иногда называют вихрем, он характеризует вращение поля в данной точке. Дадим определение ротора, не связанное с выбранной в A координатной системой. Поскольку ротор – векторная величина, а вектор задается своими проекциями на определенные направления, определим проекцию ротора в точке M_0 на заданное направление $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ независимо от координат вектора поля. Рассмотрим плоскость H с нормалью $\vec{n}_0$, содержащую точку M_0. Пусть C_r – лежащая в плоскости H окружность радиуса r с центром в точке M_0, ориентированная таким образом, что с конца вектора $\vec{n}_0$ видно, что она обходится в положительном направлении. Найдем циркуляцию вектора поля вдоль окружности C_r:

$G_r = \oint_{C_r} Pdx + Qdy + Rdz$. В соответствие с формулой Стокса

$$G_r = \iint_{D_r(M_0)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \iint_{D_r(M_0)} (\operatorname{rot}\vec{V}, \vec{n}_0) ds,$$ где $D_r(M_0)$ – круг радиуса r с центром в точке M_0, лежащий внутри окружности C_r. Поверхностный интеграл в данном случае представляет собой двойной интеграл по плоской

области $D_r(M_0)$. Воспользуемся теперь непрерывностью компонент ротора и теоремой о среднем для двойного интеграла. Получим $G_r = (\mathrm{rot}\vec{V}, \vec{n}_0)|_{\tilde{M}}\, \pi r^2$, где точка $\tilde{M} \in D_r(M_0)$. Следовательно, $\dfrac{G_r}{\pi r^2} = (\mathrm{rot}\vec{V}, \vec{n}_0)|_{\tilde{M}}$. Пусть теперь $r \to 0$. Тогда вследствие непрерывности компонент ротора имеем $(\mathrm{rot}\vec{V}, \vec{n}_0)|_{\tilde{M}} \to (\mathrm{rot}\vec{V}, \vec{n}_0)|_{M_0}$. Следовательно, мы получили проекцию ротора в точке M_0 на заданное направление $\vec{n}_0$:

$$(\mathrm{rot}\vec{V}, \vec{n}_0)|_{M_0} = \lim_{r\to 0} \frac{G_r}{\pi r^2},$$

где G_r – циркуляция вектора поля по окружности радиуса r с центром в точке M_0, лежащей в плоскости с нормалью $\vec{n}_0$ и ориентированной так, что с конца вектора $\vec{n}_0$ видно, что она обходится против часовой стрелки. Поскольку вектор задается проекциями на выбранные направления, ротор может быть определен таким образом.

Оператор Гамильтона (набла-оператор).

Для упрощения записи характеристик скалярных и векторных полей был введен символический векторный оператор, имеющий вид $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

Символическое «умножение» этого оператора на какую-то величину означает, что каждая из компонент $\nabla-$оператора применяется к этой величине.
Например, если $u = u(x, y, z)$– скалярная величина, то

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}\, u.$$

Для векторных величин возможно как скалярное, так и векторное умножение. Проследим, что дадут такие произведения с $\nabla-$оператором в случае векторного поля $\vec{V} = (P, Q, R)$.

Скалярное произведение: $(\nabla, \vec{V}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{V}$.

Векторное произведение: $[\nabla, \vec{V}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\vec{V}$.

Отдельный интерес представляет определенный для скалярных полей оператор

$$(\nabla,\nabla u)=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv\Delta u\,.$$

Такой оператор называется оператором Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u=0,(x,y,z)\in A,$ называются **гармоническими** в A функциями.

Специальные векторные поля.

Потенциальным полем называется поле вектора $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$, если существует скалярная функция $U(x,y,z),\,(x,y,z)\in A,$ такая, что $P=\dfrac{\partial U}{\partial x},Q=\dfrac{\partial U}{\partial y},R=\dfrac{\partial U}{\partial z}$ или $\vec{V}=\mathrm{grad}U$. При этом функция $U(x,y,z)$ называется потенциалом вектора $\vec{V}$.
Необходимым и достаточным условием того, что **поле вектора** $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ **потенциально**, является выполнение равенства

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ U'_x & U'_y & U'_z\end{vmatrix}=0,\ (x,y,z)\in A\,.$$

Итак, потенциальное векторное поле – это безвихревое, бесциркуляционное поле, так как циркуляция вдоль любого замкнутого контура согласно формуле Стокса равна нулю:

$$G_r=\oint\limits_{\partial D}(\mathrm{grad}\,U,d\vec{r})=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ U'_x & U'_y & U'_z\end{vmatrix}ds=0\,.$$

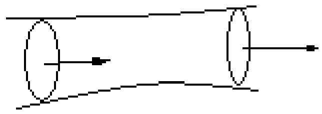
Пример потенциального поля – поле ньютоновского притяжения.

Соленоидальным полем называется поле вектора $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$, если существует вектор-функция $\vec{W}=(L(x,y,z),M(x,y,z),N(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$, такая, что $\vec{V}=\mathrm{rot}\vec{W}$ или $P=\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}$, $Q=\dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$, $R=\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}$. В этом случае вектор-функцию $\vec{W}(x,y,z)$ называют векторным потенциалом вектора $\vec{V}$.
Необходимым и достаточным условием того, что поле вектора $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ соленоидально, является выполнение равенства

$$\mathrm{div}\vec{V}=0,\ (x,y,z)\in A.$$

Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля на основе формулы Гаусса-Остроградского обеспечивает равенство нулю потока вектора поля через любую замкнутую и ограничивающую некоторое тело поверхность: $\oint\!\!\oint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V \mathrm{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz=0$

Рассмотрим в A «векторную трубку». Так называют поверхность, состоящую из векторных линий, в сечении которой поперечником получается замкнутая кривая.



Возьмем замкнутую поверхность, состоящую из векторной трубки и двух поперечников. В соответствии со сказанным выше поток вектора поля через такую замкнутую поверхность равен нулю. Поток через боковую поверхность – векторную трубку – также равен нулю, так как по определению векторных линий направление вектора поля $\vec{V}$ совпадает с направлением векторных линий, и значит, ортогонален к нормали к боковой поверхности. Таким образом, сумма потоков через поперечники внутрь (или вне) замкнутой поверхности равна нулю. Следовательно, в соленоидальном поле поток вектора поля через поперечные сечения векторной трубки сохраняет постоянную величину. Эта величина называется интенсивностью векторной трубки.

Разложение произвольного векторного поля.

Пусть $\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $(x,y,z)\in A$, – произвольное векторное поле. Покажем, что вектор $\vec{V}$ может быть представлен как сумма двух векторов, один из которых представляет потенциальное, а другой – соленоидальное векторное поле.

Пусть вектор $\vec{V}'=\mathrm{grad}U$. Какой должна быть эта функция $U(x,y,z)$, чтобы вектор $\vec{V}''=\vec{V}-\vec{V}'$ был соленоидальным?

Поскольку $\mathrm{div}\vec{V}''=0$, получим $\mathrm{div}\vec{V}-\mathrm{div}(\mathrm{grad}U)=0$, то есть $\Delta U=\mathrm{div}\vec{V}$. Таким образом, чтобы разложить исходный вектор $\vec{V}$ на сумму потенциального и соленоидального векторов, необходимо сначала решить уравнение Пуассона $\Delta U=\mathrm{div}\vec{V}$. Такое уравнение всегда имеет решение (и даже бесчисленное множество решений). Определив $U(x,y,z)$, мы получим потенциальный вектор $\vec{V}'=\mathrm{grad}U$. Теперь по построению вектор $\vec{V}''=\vec{V}-\vec{V}'$ соленоидальный. Следовательно, требуемое разложение $\vec{V}=\vec{V}'+\vec{V}''$ построено.

КОМПЛЕКСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

При изучении алгебры и начал анализа в средней школе мы сталкивались с рядом запретов. Эти запреты были естественными для функций, имеющих значения в множестве вещественных чисел. Так, нельзя было извлекать квадратный корень из отрицательного числа, нельзя было рассматривать логарифм отрицательного числа, нельзя было рассматривать арксинус числа, большего по модулю единицы. Действительно, в множестве вещественных чисел нет таких, которые удовлетворяли бы, например, уравнениям: $x^2=-1,\ \ e^x=-1,\ \ \sin x=5$.

Возникает вопрос: если нет **вещественных** чисел, удовлетворяющих предыдущим уравнениям, то, может быть, следует расширить понятие числа, выйдя с вещественной оси на плоскость?

Революцией в этой области явилось открытие формулы, называемой формулой Эйлера:

$$e^{\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,$$

где i– то мнимое число, квадрат которого равен -1.

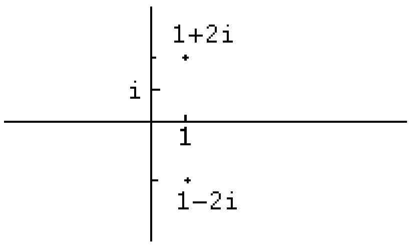
Мы сами можем убедиться в правильности формулы Эйлера, если используем известные разложения функций $e^x,\ \sin x,\ \cos x$ в ряды Тейлора по степеням x:

$$e^{\mathrm{i}\cdot t}=1+\mathrm{i}\cdot t-\frac{t^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\mathrm{i}\frac{t^5}{5!}-\frac{t^6}{6!}-\mathrm{i}\frac{t^7}{7!}+.....=(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+...)+$$

$$+\mathrm{i}(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+....)=\cos t\ +\ \mathrm{i}\cdot\sin t.$$

Итак, комплексные числа – это числа, для геометрической интерпретации которых недостаточно одной прямой, а нужна вторая прямая, где можно было бы размещать вторую координату – коэффициент при мнимой единице. Поскольку элементы, задающиеся парой вещественных координат, проще всего представлять точками декартовой плоскости, наилучшей интерпретацией множества комплексных чисел является плоскость.

Представим себе декартову плоскость, в которой роль оси OX исполняет вещественная прямая, а роль оси OY – «мнимая ось», вдоль которой откладывают коэффициент при чисто мнимой единице i. Предположим, мы решаем уравнение $t^2 - 2t + 5 = 0$ с отрицательным дискриминантом. Применяя формулу для получения корней этого уравнения, мы получим $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Обозначая, следуя Эйлеру, $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, имеем $t_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. В комплексной плоскости два этих комплексных числа выглядят так:



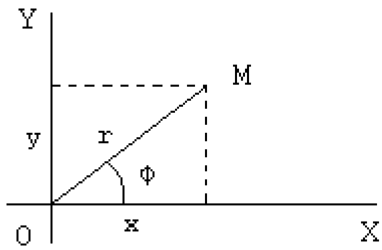
Таким образом, комплексное число z представляет собой сумму

$$z = x + \mathrm{i}\, y,$$

где компонента x называется вещественной частью z (x = Re z), компонента y называется мнимой частью z (y = Im z). Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда у них совпадают как действительные, так и мнимые части. Два комплексных числа называются взаимно сопряженными, если у них совпадают действительные части, а мнимые части различаются знаками. На нашем рисунке мы как раз имеем два взаимно сопряженных комплексных числа. Операция комплексного сопряжения означает смену знака у мнимой части и обозначается надчеркиванием. Например, $\overline{3-2\mathrm{i}} = 3 + 2\mathrm{i}$.

Введенная нами форма записи комплексного числа в виде линейной комбинации действительной и мнимой частей называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Точка на плоскости необязательно задается с помощью декартовых координат. Другим возможным способом задания точки M на плоскости является задание расстояния (r) от точки M до фиксированной точки O, называемой полюсом, и угла (φ), который вектор OM составляет с фиксированным лучом, исходящим из полюса O и называемым полярной осью. Координаты (r, φ) называются полярными координатами. Традиционно при сравнении декартовых (x,y) и полярных (r, φ) координат полюс O помещают в начало декартовых координат, а за полярную ось берут положительную часть оси OX.



Легко видеть, что связь между декартовыми и полярными координатами такая: $\mathrm{x} = r\cos\varphi$, $\mathrm{y} = r\sin\varphi$.

Если комплексное число задавать полярными координатами, то координата $r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$ называется **модулем комплексного числа**, а координата φ называется **аргументом комплексного числа**. В случае задания комплексного числа с помощью его модуля и аргумента мы получаем **тригонометрическую форму** записи комплексного числа:

$$\mathrm{z} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Нетрудно заметить, что аргумент комплексного числа по известным значениям его вещественной и мнимой частей определяется неоднозначно – с точностью до слагаемого $2\pi k$, где $k \in \mathrm{Z}$.

Наконец, применяя формулу Эйлера, получим запись комплексного числа в **показательной форме:**

$$\mathrm{z} = re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Перевод комплексного числа из алгебраической в показательную форму с помощью пакета программ MAXIMA осуществляется по команде **polarform.** Например, если ввести команду **polarform(3-4*%i)** нажать Shift+Enter, мы получим $5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{atan}(\frac{4}{3})}$. Обратный перевод из показательной в алгебраическую форму осуществляется по команде **rectform.**

Множество комплексных чисел обозначается **C**. Введем **правила арифметических действий** с комплексными числами.

1. Для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ определим $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$.

2. Для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ определим $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$.

3. Для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ определим $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

4. Для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{C}$, $z_2 \neq 0$, определим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + \mathrm{i}(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^{\;2} + y_2^{\;2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Возможно применение пакета MAXIMA при произведении действий с комплексными числами. Например, команда **rectform((3+4*%i)/(4-3*i))** и нажатие Shift+Enter даст значение i.

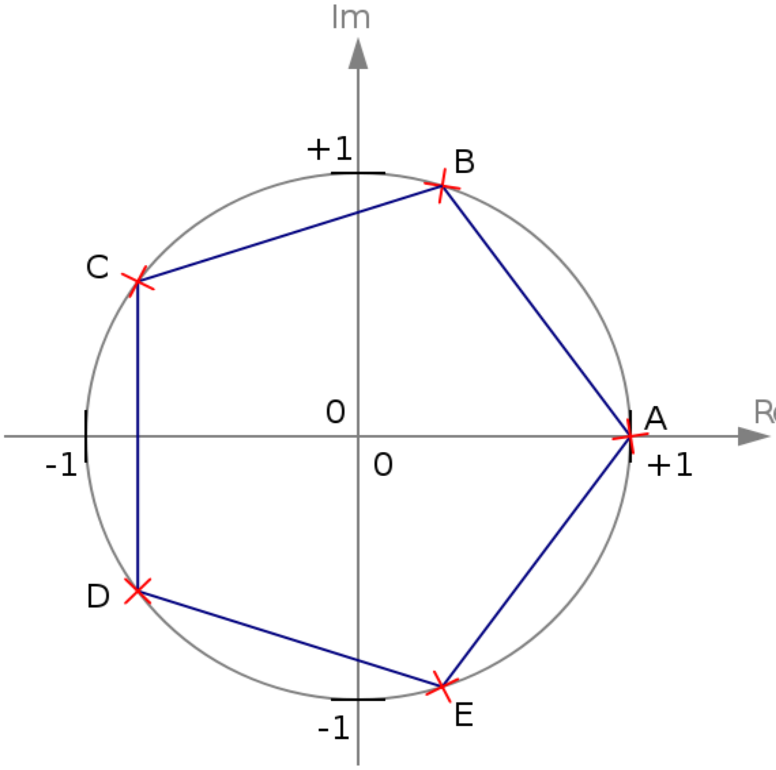
Возведение в степень и извлечение корня

Возможность представления комплексного числа в показательной форме позволяет возводить комплексное число в степень – целую или дробную.

Рассмотрим функцию z^n, задав число z в показательной форме: $z^n = (re^{\mathrm{i}\varphi})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\varphi}$. Таким образом, при возведении комплексного числа в степень n получим новое комплексное число с модулем, равным модулю исходного числа в n-й степени и аргументом, равным аргументу исходного числа, умноженному на n.

При извлечении корня степени n также используем показательную форму записи комплексного числа, но при этом отметим, что уравнение $w^n = z$ при любой правой части имеет ровно n комплексных корней.

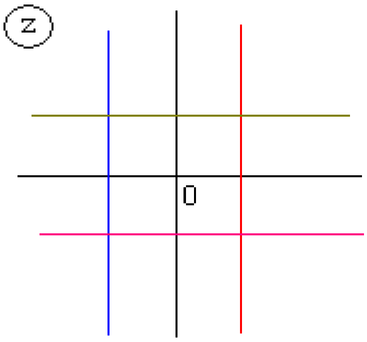
Действительно, если вместо w взять $w \cdot e^{\mathrm{i}2\pi k/n}$ при любом целом k, то при возведении в степень n мы получим тот же результат, так как при любом целом значении k справедливо равенство $e^{\mathrm{i}2\pi k} = 1$. Поскольку $we^{\mathrm{i}2\pi k/n}$ и $we^{\mathrm{i}2\pi(k+mn)/n}$ при любом целом m – это одно и то же комплексное число, имеет смысл брать $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому при извлечении корня из комплексного числа $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ представим его в виде $z = re^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то есть мы получим n различных корней, имеющих одинаковый модуль, но разные аргументы. Два корня с соседними значениями k отличаются друг от друга аргументами, разность между которыми $2\pi / n$. Следовательно, все корни из одного и того же комплексного числа находятся на окружности с центром в нуле радиуса $\sqrt[n]{r}$ и представляют собой вершины правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

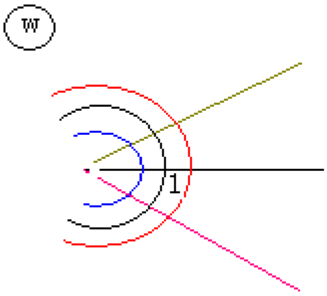


Заметим, что обобщением того свойства, что уравнение $w^n = z$ имеет ровно n комплексных корней, является знаменитая **основная теорема алгебры**, в соответствии с которой любое уравнение n-й степени вида $w^n + a_1 w^{n-1} + a_2 w^{n-2} + ... + a_0 = 0$ имеет ровно n корней в множестве комплексных чисел, правда в этом случае корни могут быть кратными (совпадать).

Показательная функция, тригонометрические функции и обратные к ним

1. Показательная функция $w = e^z$ определена и однозначна во всей комплексной плоскости. Если комплексное число w записать в показательной форме: $w = R \cdot e^{i\Phi}$, а комплексное число z записать в алгебраической форме: $z = x + i \cdot y$, то согласно соотношению $R \cdot e^{i\Phi} = e^{x+iy}$ и формуле Эйлера получим $R = e^x$, $\Phi = y$.





2. Тригонометрические функции представляются с помощью показательной функции благодаря формуле Эйлера. Поскольку согласно формуле Эйлера $\cos t = \dfrac{e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}}{2}$, $\sin t = \dfrac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$, соответствующие функции комплексного переменного так и определяются: $\cos z = \dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

Обе эти функции определены и однозначны для всех точек комплексной плоскости.

Тангенс и котангенс комплексного переменного вводятся так же, как и для вещественного переменного: $\mathrm{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\mathrm{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

3. Функция, обратная к показательной, называется, как и в случае вещественного переменного, логарифмической функцией и обозначается $w = \mathrm{Ln}\, z$. Она определена всюду в комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$. Однако теперь это функция, имеющая бесконечное множество значений. Действительно, как уже было отмечено, $z = e^{w} = e^{w + 2\pi k \cdot \mathrm{i}}$ для любого целого значения числа k. Поэтому одному значению комплексного числа z соответствует бесконечное множество значений $w = \mathrm{Ln}\, z$, отличающихся на слагаемое $2\pi k \cdot \mathrm{i}$. Представим число z в показательной форме: $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, а число w в алгебраической форме: $w = u + \mathrm{i}v$. Тогда $w = u + \mathrm{i}v = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)$. То есть, $u = \ln r$, где логарифм положительной функции – известная со школьных времен однозначная функция вещественного переменного, $v = \varphi + 2\pi k$. Для того, чтобы избавиться от неоднозначности логарифма, рассматривают функцию $w = \ln z$ – однозначную ветвь логарифма, договариваясь, какие значения принимает мнимая часть функции. Заметим, что функцию комплексного переменного $w = \ln z$ можно рассматривать только в такой области комплексной плоскости, где невозможно обойти вокруг точки $z = 0$, иначе функция перестанет быть однозначной.

Заметим, что теперь мы можем вычислять логарифм отрицательного числа. Например, $\mathrm{Ln}(-25)=\mathrm{Ln}(25e^{\pi\cdot\mathrm{i}})=\ln 25+\mathrm{i}(\pi+2\pi k)$.

4. Для того, чтобы вычислить обратную тригонометрическую функцию, следует решить соответствующее уравнение. Например, следует вычислить функцию, обратную к синусу $w=\mathrm{Arcsin}\,z$. Запишем: $z=\sin w=\dfrac{e^{\mathrm{i}w}-e^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}$. Теперь решим уравнение $z=\dfrac{e^{\mathrm{i}w}-e^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}$ относительно w. Имеем $e^{\mathrm{i}w}-e^{-\mathrm{i}w}-2\mathrm{i}z=0$ или $e^{2\mathrm{i}w}-2\mathrm{i}ze^{\mathrm{i}w}-1=0$. Это квадратное уравнение относительно $e^{\mathrm{i}w}$, решим его: $e^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z\pm\sqrt{1-z^2}$. Теперь $w=\mathrm{Arcsin}\,z=-\mathrm{i}\cdot\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z\pm\sqrt{1-z^2}\right)$. Очевидно, что раз в представлении арксинуса содержится бесконечнозначная функция Ln, функция $w=\mathrm{Arcsin}\,z$ также бесконечнозначна.

Аналитические функции комплексного переменного

На примерах рассмотренных в предыдущих параграфах функций мы убедились в том, что применяя к комплексному переменному $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрическую или обратную тригонометрическую функции, мы снова получаем некоторое комплексное число $w=u+\mathrm{i}\cdot v$. Возникает вопрос: если рассматривать произвольную комплекснозначную функцию комплексного переменного z, то каким должно быть условие дифференцируемости этой функции по z в точке z_0? Поскольку и комплексное переменное z содержит две координаты (x и y), и результат действия функции – комплексное число w – также содержит две координаты (u и v), комплекснозначную функцию комплексного переменного можно воспринимать как отображение некоторой области плоскости R^2 с координатами x и y в некоторую область плоскости R^2 с координатами u и v, то есть $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Необходимым условием дифференцируемости такого отображения в точке с координатами (x_0,y_0) является существование частных производных u'_x,u'_y,v'_x,v'_y. В случае, когда эти производные непрерывны в точке (x_0,y_0), отображение $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ дифференцируемо в точке (x_0,y_0), и вектор приращений отображения выражается линейно с точностью до бесконечно малых высших порядков через вектор приращений аргумента:

$$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).$$

Однако, когда речь идет о дифференцируемости по **комплексному** переменному, важно, чтобы при замене линейно с точностью до бесконечно малых высших порядков приращения функции на приращение аргумента также **сохранялась комплексная структура**, то есть,

$$\Delta w=\Delta u+\mathrm{i}\cdot\Delta v=(A+\mathrm{i}\cdot B)\cdot\Delta z+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})=$$

$$=(A+\mathrm{i}\cdot B)\cdot(\Delta x+\mathrm{i}\cdot\Delta y)+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).$$

Сравнивая коэффициенты при Δx и при Δy в последних двух формулах, получим: $A=u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0),\ B=-u'_y(x_0,y_0)=v'_x(x_0,y_0)$. Таким образом, условием дифференцируемости функции $w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\cdot v(x,y)$ по комплексному переменному $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ в точке $z_0=x_0+\mathrm{i}\cdot y_0$ является выполнение двух равенств

$$u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0),\ -u'_y(x_0,y_0)=v'_x(x_0,y_0),$$

называемых условиями Коши-Римана. Обозначая, как в случае вещественного переменного, $A+\mathrm{i}\cdot B=w'(z_0)$, получим

$$w'(z_0)=u'_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}\cdot v'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)-\mathrm{i}\cdot u'_y(x_0,y_0).$$

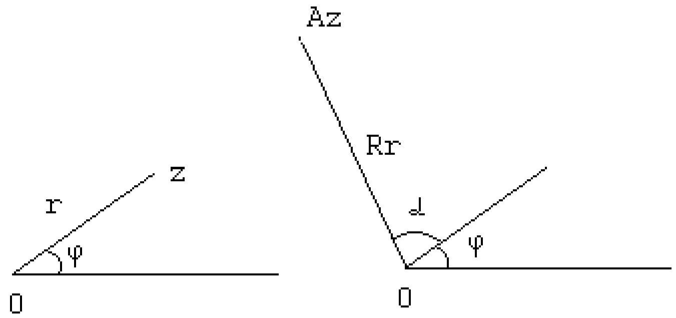
Однозначные дифференцируемые в каждой точке некоторой области функции называются **аналитическими** в этой области функциями. В дальнейшем мы увидим, что выполнение условия аналитичности и однозначности функции в некоторой области обеспечивает существование в этой области у этой функции производных по комплексному переменному любого порядка.

Аналитическая и однозначная в области функция называется **регулярной** функцией**.**

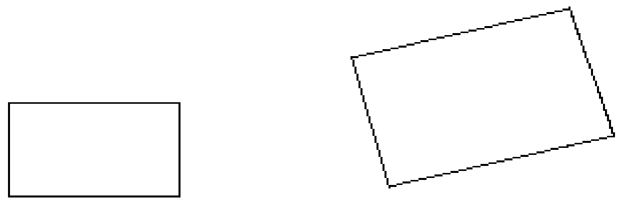
Конформные отображения

Любая комплекснозначная функция комплексного переменного отображает одно множество комплексных чисел в другое множество комплексных чисел. Это отображение нельзя задать графиком, как в случае вещественнозначной функции вещественного переменного. Однако можно исследовать вопрос о том, куда функция отображает область, в которой задана. Существует утверждение о том, что аналитическая функция отображает односвязную область (то есть область, любые две точки которой можно соединить кривой, лежащей в этой области) на односвязную область, причем граница области задания функции перейдет в границу образа.

Простейшим примером регулярной функции является **линейная функция** $w = A \cdot z + B$, имеющая постоянную производную. Проследим за тем, как изменяется радиус-вектор точки $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ под действием заданной функции. Пусть $A = R \cdot e^{i \cdot \alpha}$. Тогда $A \cdot z = R \cdot r \cdot e^{i \cdot (\alpha + \varphi)}$. То есть длина радиуса-вектора любой точки z увеличивается в R раз, а аргумент точки изменяется на слагаемое α, что означает, поворот вектора.



Следовательно, если функция $A \cdot z$ действует в области D, то результатом действия будет новая область, полученная из исходной растяжением в R раз и поворотом на угол α.



Остается добавить к функции $A \cdot z$ слагаемое B, что означает смещение каждой точки $A \cdot z$ на величину $\operatorname{Re} B$ вдоль оси OX и на величину $\operatorname{Im} B$ вдоль оси OY. Таким образом, применение к каждой точки области линейной функции $w = A \cdot z + B$ означает поворот, растяжение и параллельный перенос области. Очевидно, что линейная функция не изменяет форму области.

Предположим теперь, что регулярная в некоторой области D функция $w = f(z)$ обладает свойством $f'(z_0) \neq 0,\ z_0 \in \mathrm{D}$. Из условия дифференцируемости в точке z_0 получим

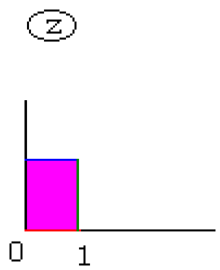
$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

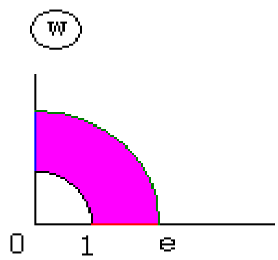
или $f(z) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + f(z_0) + o(|z - z_0|)$.

Мы видим, что в малой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$ мало отличается от линейной функции $f'(z_0)\cdot(z - z_0) + f(z_0)$, и значит, сохраняет форму малой окрестности точки z_0.

Отображение с помощью регулярной функции, производная которой отлична от нуля в некоторой области, называется **конформным отображением** этой области. Следует подчеркнуть, что сохранение формы происходит только в **малой окрестности** каждой точки, а форма самой области может сильно меняться. В том случае, если производная отлична от нуля вплоть до границы области, все углы, которые образует граница исходной области, сохраняются.

В качестве примера рассмотрим отображение прямоугольника $0 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \dfrac{\pi}{2}$ функцией $w = e^z$. Очевидно, что эта функция осуществляет конформное отображение, области задания, так как $|w'(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \ne 0,\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1.$ Для построения образа заданного прямоугольника достаточно проследить за отображением его границы. Отрезок границы $\operatorname{Im} z = 0,\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ отобразится в отрезок вещественной оси $[1, e]$, отрезок границы $\operatorname{Re} z = 1,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \dfrac{\pi}{2}$ отобразится в дугу окружности $|w| = e,\ 0 \le \arg w \le \dfrac{\pi}{2}$, отрезок границы $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ отобразится в отрезок мнимой оси между точками i и $\mathrm{i}\cdot e$, отрезок границы $\operatorname{Re} z = 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \dfrac{\pi}{2}$ отобразится в дугу окружности $|w| = 1,\ 0 \le \arg w \le \dfrac{\pi}{2}$.





Действительная и мнимая части аналитической функции

Пусть $w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\cdot v(x,y)$ – аналитическая в области D функция. Вспомним, что эта функция удовлетворяет в каждой точке области условиям Коши-Римана:

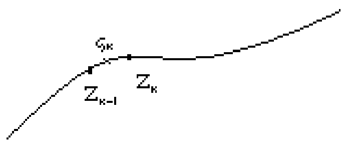
$$\begin{cases} u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0), \\ -u'_y(x_0,y_0)=v'_x(x_0,y_0). \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение по x, а второе по y и вычтем второе из первого – получим соотношение $u''_{xx}+u''_{yy}=0$. Продифференцируем первое уравнение по y, второе по x и сложим – получим соотношение $v''_{xx}+v''_{yy}=0$. Таким образом, и действительная, и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа, то есть являются **гармоническими** функциями. Две гармонические функции, для которых выполняются условия Коши-Римана, называются **сопряженными гармоническими** функциями и могут служить действительной и мнимой частями одной и той же аналитической функции.

Свойство аналитичности (то есть справедливость условий Коши-Римана) функции в области накладывает настолько жесткие ограничения на функцию, что позволяет восстанавливать функцию по заданным значениям ее вещественной (мнимой) частей. Действительно, если, например, гармоническая функция $u(x,y)$ является действительной частью аналитической функции, то согласно соотношениям Коши-Римана мы сможем найти v'_x и v'_y, а значит, можно восстановить с точностью до произвольной вещественной постоянной сопряженную гармоническую функцию по ее полному дифференциалу: $v(x,y)=\int v'_x dx+v'_y dy=\int -u'_y dx+u'_x dy$. Поскольку в выражение аналитической функции ее мнимая часть входит с коэффициентом i, аналитическая функция по своей вещественной части восстанавливается с точностью до произвольной чисто мнимой константы.
Аналогичным образом аналитическая функция по своей мнимой части восстанавливается с точностью до вещественной константы.

Интеграл от регулярной функции по комплексному переменному

Рассмотрим функцию $w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\cdot v(x,y)$, регулярную в некоторой области D комплексной плоскости. Пусть гладкая кривая C с началом и концом, соответственно, в точках A и B, лежит в области D. Разобьем кривую на фрагменты C_k , $k=1,...,n,$ точками разбиения $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$, выберем на каждом фрагменте отмеченную точку $\varsigma_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$



и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} w(\varsigma_k)\cdot\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}\cdot v(\xi_k,\eta_k))(\Delta x_k+\mathrm{i}\cdot\Delta y_k)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k+\mathrm{i}\cdot\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k+v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k \; .$$

Стягивая фрагменты в точки и одновременно увеличивая количество фрагментов, получим в пределе линейную комбинацию двух криволинейных интегралов второго рода, которую и назовем интегралом от функции $w(z)$ по кривой C:

$$\int_C w(z)dz=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C udy+vdx .$$

Условия Коши-Римана обеспечивают независимость каждого из криволинейных интегралов в правой части от пути интегрирования. Следовательно, интеграл от аналитической функции по комплексному переменному зависит только от начала и конца кривой C, то есть от координат точек A и B. Пусть $\Phi(z)=U(x,y)+\mathrm{i}V(x,y)$ – первообразная функции $w(z)$ по комплексному переменному, то есть, $\Phi'(z)=w(z)$. В соответствии с условиями Коши-Римана для функции $\Phi(z)$ имеем соотношения: $u(x,y)=U'_x=V'_y,\ v(x,y)=V'_x=-U'_y$. Таким образом,

$$\int_A^B udx-vdy=\int_A^B U'_x dx+U'_y dy=U(B)-U(A),$$

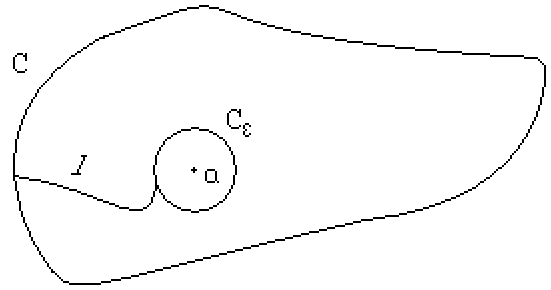
$$\int_A^B udy+vdx=\int_A^B V'_y dy+V'_x dx=V(B)-V(A),$$

и значит, $\int_A^B w(z)dz=\Phi(B)-\Phi(A)$. Следовательно, в случае интегрирования аналитической функции по комплексному переменному справедлива формула Ньютона-Лейбница.

Из сказанного выше следует также справедливость **интегральной теоремы Коши**: для любого замкнутого контура *C*, лежащего в области D регулярности функции $f(z)$ справедливо: $\oint_C f(z)dz=0$.

Интегрирование степеней $(z-a)$

Пусть C – **замкнутая** кривая, точка a находится внутри области D, ограниченной этой замкнутой кривой. Для любого целого неотрицательного значения n функция $(z-a)^n$ является регулярной внутри любой конечной области комплексной плоскости, поэтому согласно интегральной теореме Коши $\oint_C (z-a)^n dz=0$ для неотрицательных целых n. Пусть теперь n целое отрицательное число. В этом случае функция $(z-a)^n$ уже не является непрерывной в точке *a*, а следовательно, не является регулярной в области D. Однако, в точках области D, отличных от точки *a*, функция $(z-a)^n$ является аналитической. Поэтому, если мы из области D вырежем круговую окрестность точки a радиуса ε и назовем новую область D_ε, то в области D_ε функция $(z-a)^n$ является регулярной. Область D_ε представляет собой деформированное кольцо, граница которого состоит из внешней кривой *C* и внутренней кривой C_ε, то есть является двусвязной областью. Для того, чтобы превратить двусвязную область D_ε в односвязную область $\tilde{D}_\varepsilon$, проведем разрез по кривой l, соединяющей точку кривой *C* и точку окружности C_ε.



Теперь для того, чтобы обойти область $\tilde{D}_\varepsilon$ по границе так, чтобы область оставалась слева, необходимо пройти по кривой l от точки на кривой C до точки на окружности C_ε, затем по окружности C_ε по часовой стрелке (в отрицательном направлении), далее по кривой l в обратном направлении и наконец по кривой C против часовой стрелки (в положительном направлении). В соответствии с интегральной теоремой Коши и однозначностью интегрируемой функции получим $\int\limits_l (z-a)^n dz - \oint\limits_{C_\varepsilon} (z-a)^n dz - \int\limits_l (z-a)^n dz + \oint\limits_C (z-a)^n dz = 0$. Следовательно, $\oint\limits_C (z-a)^n dz = \oint\limits_{C_\varepsilon} (z-a)^n dz$. Интеграл в правой части последнего соотношения легко подсчитать, если параметризовать окружность C_ε: $z = a + \varepsilon \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, причем с ростом параметра θ кривая C_ε обходится в положительном направлении. Итак,

$$\oint\limits_C (z-a)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon^n e^{in\theta} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = \varepsilon^{n+1} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i, \ n = -1, \\ 0, \ n = -2, -3, \ldots \end{cases}.$$

Таким образом, если C – замкнутая кривая, охватывающая точку a и проходимая так, что конечная область, обходимая кривой и содержащая точку a, остается слева, то при всех целых значениях n, кроме -1, $\oint\limits_C (z-a)^n dz = 0$, и $\oint\limits_C (z-a)^{-1} dz = 2\pi i$.

Интегральная формула Коши и ее следствие

Пусть $f(z)$ регулярна в области D, замкнутая кривая C лежит в области D и ограничивает область $\tilde{D}$. Пусть $a \in \tilde{D}$. Рассмотрим в области D функцию $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a}, \ z \neq a, \\ f'(a), \ z = a \end{cases}$. Функция $\tilde{f}(z)$ регулярна в области D, и следовательно, согласно интегральной теореме Коши $\oint\limits_C \tilde{f}(z) dz = 0$.

Поэтому $\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)} = f(a)\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)} = f(a)\cdot 2\pi i$. Таким образом, зная значения регулярной функции на границе C области $\tilde{D}$, легко получить значения этой функции в любой внутренней точке a области $\tilde{D}$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)},$$

где обход кривой производится в положительном направлении.

Согласно полученной формуле регулярную внутри области, ограниченной границей *C*, функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z)},$$

где ς – точки кривой *C*, обходимой так, что область регулярности остается слева. Это и есть **интегральная формула Коши**.

Правая часть интегральной формулы Коши зависит от переменного z и может быть продифференцирована по z сколь угодно раз, если $z \notin C$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z)^{n+1}}.$$

Таким образом, регулярная в области (то есть однозначная и имеющая производную первого порядка по переменному z в каждой точке области) функция оказывается дифференцируемой по этому переменному сколь угодно раз.

Ряд Тейлора для регулярной функции

Воспользуемся формулой Тейлора и ее следствием для разложения регулярной функции в ряд Тейлора.

Для степенных рядов в комплексной плоскости справедлива **теорема Абеля**, аналогичная теореме, доказанной для функций вещественного переменного: если степенной ряд по неотрицательным степеням $(z-a)$ сходится в точке z_0, то он сходится, причем абсолютно, в любой точке внутри круга с центром a радиуса $|z_0 - a|$, а если расходится в точке z_1, то расходится и в любой точке вне круга с центром a радиуса $|z_1 - a|$. Таким образом, для степенного ряда в комплексной плоскости существует круг сходимости, внутри которого ряд сходится, а вне которого расходится. Поэтому формула суммы бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^n + ...$ справедлива в комплексной плоскости при $|t| < 1$.

Пусть точка a лежит в области регулярности. Возьмем в качестве кривой C окружность с центром в точке a. Тогда для точек z, расположенных внутри окружности $|\frac{z-a}{\varsigma-a}|<1$, так как точка ς находится на окружности. Применим указанное разложение:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a+a-z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)(1-\frac{z-a}{\varsigma-a})}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)}+$$

$$+(z-a)\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^2}+(z-a)^2\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^3}+...+(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}}+....$$

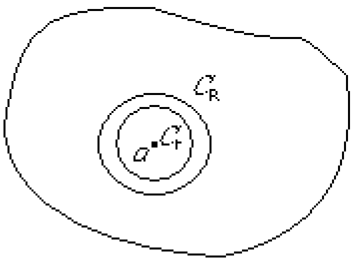
В соответствии с интегральным представлением производных высших порядков имеем $f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+...+\frac{f^{(n)}}{n!}(z-a)^n+...$

.

Следовательно, любая регулярная в области функция представима в виде ряда Тейлора в окрестности любой внутренней точки области регулярности.

Разложение функции в ряд Лорана в окрестности особой точки однозначного характера

Пусть функция $f(z)$ регулярна во всех точках области D, кроме внутренней точки a, где функция неаналитична (и возможно, обращается в бесконечность), но при обходе которой функция $f(z)$ не меняет значения. Проведем две окружности с центром в точке a и с радиусами r и R, $r<R$, так чтобы окружности и кольцо между ними лежали в области регулярности функции $f(z)$.



Поскольку $f(z)$ регулярна в кольце, применяя интегральную формулу Коши, при любом z внутри кольца справедливо представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)}.$$

Заметим, что $|\frac{z-a}{\varsigma-a}|<1$, если $\varsigma\in C_R$, $|\frac{\varsigma-a}{z-a}|<1$, если $\varsigma\in C_r$. Поэтому

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a+a-z)}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a+a-z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)(1-\frac{z-a}{\varsigma-a})}-$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(z-a)(1-\frac{\varsigma-a}{z-a})}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}f(\varsigma)(\varsigma-a)^n d\varsigma.$$

Таким образом, в кольце в окрестности особой точки однозначного характера регулярная функция раскладывается в ряд вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n},\quad \text{где}\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}f(\varsigma)(\varsigma-a)^n d\varsigma,\quad n=1,2,\ldots\ .$$

Такой ряд называется **рядом Лорана.** Часть ряда Лорана, содержащая неотрицательные степени $(z-a)$, называется **правильной частью ряда**, часть ряда Лорана, содержащая отрицательные степени $(z-a)$, называется **главной частью ряда**. В случае, когда функция аналитична в точке a, главная часть Лорана обращается в нуль, и ряд Лорана превращается в ряд Тейлора.

В зависимости от вида ряда Лорана в окрестности особой точки определяется тип особой точки.

1. Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество отрицательных степеней $(z-a)$, соответствующая особая точка a называется **существенно особой** точкой.
2. Если главная часть ряда Лорана содержит конечное множество отрицательных степеней $(z-a)$, соответствующая особая точка a называется **полюсом,** причем порядок полюса – это наибольшая степень $(z-a)^{-1}$, входящая в разложение.
3. Если главная часть ряда Лорана отсутствует, соответствующая точка a называется **устранимой** особенностью.

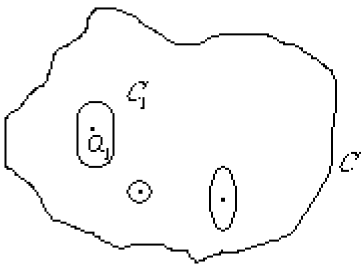
П р и м е р ы. 1. Для функции $f(z)=e^{1/z}$ точка 0 является существенной особенностью, так как $e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+...+\frac{1}{n!z^n}+...$.

2. Для функции $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$ точка 0 является полюсом второго порядка, так как $\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1-z^2/2!+z^4/4!-...}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-...$.

3. Для функции $\frac{\sin z}{z}$ точка 0 является устранимой особенностью, так как $\frac{\sin z}{z}=\frac{z-z^3/3!+z^5/5!-...}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...$.

Вычеты

В случае, когда комплекснозначная функция регулярна в области, интеграл от нее по границе области равен нулю согласно интегральной теореме Коши. Возникает вопрос: чему равен интеграл по границе области в случае, когда внутри области содержится конечное число особых точек однозначного характера интегрируемой функции? Итак, предположим, что функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением конечного числа особых точек однозначного характера. Пусть замкнутая кривая C лежит в области D и ограничивает область $\tilde{D}$, внутри которой содержатся n особых точек $a_1,a_2,...,a_n$. Вырежем из области $\tilde{D}$ попарно непересекающиеся окрестности особых точек, ограниченных замкнутыми кривыми C_j, $j=1,...,n$. Мы получим новую – $(n+1)$-связную (то есть имеющую n дырок) область $\tilde{D}_0$.



В области $\tilde{D}_0$ функция $f(z)$ регулярна, поэтому согласно интегральной теореме Коши $\oint\limits_C f(z)dz-\sum\limits_{j=1}^{n}\oint\limits_{C_j} f(z)dz=0$, где все замкнутые контуры обходятся против часовой стрелки. Следовательно, справедлива формула:

$\oint_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)dz$. Таким образом, если в области функция имеет конечное число особенностей однозначного характера, интеграл по границе области равен сумме интегралов по замкнутым кривым, окружающим каждую особую точку. Такой интеграл по замкнутой кривой, окружающей одну особую точку a_j однозначного характера и проходимой против часовой стрелки, деленный на $2\pi \mathrm{i}$, называется **вычетом** функции $f(z)$ в точке и обозначается $\mathrm{res}_{a_j} f(z)$. То есть, $\mathrm{res}_{a_j} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_j} f(z)dz$. С учетом введенного обозначения справедлива **теорема о вычетах**:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{a_j} f(z).$$

Мы знаем, что в кольце, расположенном в окрестности особой точки однозначного характера регулярная функция раскладывается в ряд Лорана. Следовательно, если разложение функции $f(z)$ в окрестности особой точки a_j имеет вид $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^j (z - a_j)^k$, то согласно правилу интегрирования степеней $(z - a_j)$ получим $\oint_{C_j} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot c_{-1}^j$. Таким образом, $\mathrm{res}_{a_j} f(z) = c_{-1}^j$. То есть, **вычет функции в особой точке однозначного характера равен коэффициенту при степени (-1) разложения функции в ряд Лорана в окрестности этой особой точки**.
Таким образом, интегрирование функций по замкнутым контурам сводится к вычислению коэффициентов при степени (-1) разложения функции в ряд Лорана в окрестности всех особых точек однозначного характера, расположенных в области, ограниченной заданным контуром и $\oint_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} c_{-1}^j$.

Вычисление вычета функции f(z) в точке a с помощью MAXIMA возможно при применении команды **residue(f(z),z,a).**

П р и м е р ы. 1. Для того, чтобы вычислить вычет функции $\frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}$ в особой точке $2\mathrm{i}$, введем команду **residue((8*z^3-z^2+3*z)*(z^2+4)^(-3),z,2*%i)** и нажмем Shift+Enter. Ответом будет $\frac{\mathrm{i}}{128}$.

2. Вычислить $\oint\limits_C \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} dz$, где C – а) окружность радиуса 1 с центром в точке 0, б) граница полукруга радиуса 3, основанием которого является отрезок [-3,3], расположенного в верхней полуплоскости, в) граница полукруга радиуса 3, основанием которого является отрезок [-3,3], расположенного в нижней полуплоскости, г) окружность радиуса 4 с центром в точке 0. Все контуры проходятся против часовой стрелки.

а) Для функции $\frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}$ особыми точками являются точки $\pm 2\mathrm{i}$, в круге радиуса 1 с центром в 0 особых точек нет. Значит согласно интегральной теореме Коши $\oint\limits_C \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} dz$ =0.

б) Для функции $\frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}$, заданной в верхнем полукруге радиуса 3 с центром 0, особой точкой является точка 2i. Следовательно,

$$\oint\limits_C \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{2\mathrm{i}} \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} = 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{i}}{128} = -\frac{\pi}{64}.$$

в) Для функции $\frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}$, заданной в нижнем полукруге радиуса 3 с центром 0, особой точкой является точка -2i. Следовательно,

$$\oint\limits_C \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{-2\mathrm{i}} \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} = 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{-\mathrm{i}}{128} = \frac{\pi}{64}.$$

г) Для функции $\frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}$, заданной в круге радиуса 4 с центром в точке 0, обе особые точки однозначного характера $\pm 2\mathrm{i}$ находятся в этом круге. Следовательно, согласно теореме о вычетах

$$\oint\limits_C \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot (\mathrm{res}_{2\mathrm{i}} \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3} + \mathrm{res}_{-2\mathrm{i}} \frac{8z^3 - z^2 + 3z}{(z^2+4)^3}) =$$

$$= 2\pi \mathrm{i}(\frac{\mathrm{i}}{128} + \frac{-\mathrm{i}}{128}) = 0.$$

Применение теории вычетов

Теорему о вычетах удобно применять для вычисления не только интегралов по замкнутому контуру от комплекснозначных функций, но и собственных и несобственных интегралов от функций вещественного переменного.

1. Вычисление интегралов от 2π-периодической функции вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, где R означает рациональную дробь по каждому из переменных. Такие интегралы сводятся к вычислению контурных интегралов по единичной окружности с помощью представлений $\cos t = \frac{e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$ и замены переменной интегрирования: $z = e^{\mathrm{i}t}$. Если исходная переменная интегрирования проходит, возрастая, отрезок $[0, 2\pi]$, комплексная переменная z проходит единичную окружность против часовой стрелки. При этом $dt = \frac{dz}{\mathrm{i}z}$. Поэтому $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)\frac{dz}{\mathrm{i}z} = 2\pi \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{a_j} \frac{\tilde{R}(z)}{z}$. Здесь суммируются вычеты во всех особых точках функции $\frac{\tilde{R}(z)}{z}$, попавших внутрь единичного круга.

П р и м е р. Вычислить $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos t}$.

После введения переменного $z = e^{\mathrm{i}t}$ получим

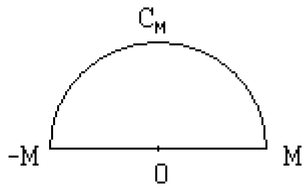
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(5 + \frac{3}{2}(z + z^{-1}))z\mathrm{i}} = \frac{2}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(10z + 3z^2 + 3)} =$$

$$= 4\pi \mathrm{res}_{-1/3} \frac{1}{10z + 3z^2 + 3} = 4\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что у функции $\frac{1}{10z + 3z^2 + 3}$ особой точкой является не только -1/3, но и -3. Вторая особая точка расположена вне единичного круга, поэтому вычет в этой точке не вычислялся.

2. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, где R – рациональная дробь и для сходимости несобственного интеграла 1-го родя необходимым условием является требование: $\lim_{x\to\infty} x \cdot R(x) = 0$.

Мы знаем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{+M} R(x)dx$. Введем интеграл по замкнутому контуру C, ограничивающему полукруг радиуса M с центром 0, расположенный в верхней полуплоскости.



Этот контур состоит из отрезка [-*M*,*M*] и дуги C_M. То есть $\int_{-M}^{+M} R(x)dx = \oint_C R(z)dz - \int_{C_M} R(z)dz$. На отрезке [-*M*,*M*] комплексное переменное *z* превращается в вещественное переменное *x*. На полуокружности C_M введем новое переменное интегрирование: $z = Me^{\mathrm{i}t}$, где $t \in [0, \pi]$. Тогда $\int_{C_M} R(z)dz = \int_0^{\pi} R(Me^{\mathrm{i}t})M\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}dt$. Согласно условию сходимости несобственного интеграла $\lim_{M\to\infty}\int_0^{\pi} R(Me^{\mathrm{i}t})M\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}dt = 0$. Поэтому $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{+M} R(x)dx = \lim_{M\to\infty}\oint_C R(z)dz$. Согласно теореме о вычетах для вычисления интеграла по контуру *C* следует сложить вычеты во всех особых точках, расположенных внутри соответствующего полукруга. Но так как с ростом числа *M* полукруг превращается в полуплоскость,
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{res}_{a_j} R(z)$, где a_j, $j = 1,...,n$, – особые точки функции *R(z)*, расположенные в верхней полуплоскости.

П р и м е р. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}dx$.

Найдем особые точки подынтегральной функции с помощью MAXIMA. Запишем **solve(x^4+10*x^2+9=0,x)** и нажмем Shift+Enter. Мы получим 4 особые точки – нули знаменателя подынтегральной функции: -i, i, -3i, 3i. Только 2 из них расположены в верхней полуплоскости: i и 3i. Поэтому
$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}dx = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{res}_{\mathrm{i}}\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} + \mathrm{res}_{3\mathrm{i}}\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}) = \frac{5\pi}{12}$.

Элементы теории плоского векторного поля

В качестве иллюстрации теории плоского векторного поля будем применять поле скоростей плоско-параллельного течения жидкости.

Пусть $\vec{V}(x,y)=(A(x,y),B(x,y))$ – вектор скорости в точке с координатами (x,y). Представим, что поле течения жидкости потенциально и соленоидально, что соответствует течению идеальной жидкости. Потенциальность означает выполнение равенства $\mathrm{rot}\vec{V}=B'_x-A'_y=0$.

Соленоидальность означает выполнение равенства $\mathrm{div}\vec{V}=A'_x+B'_y=0$.

Введем две функции переменных x и y: $u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} A(x,y)dx+B(x,y)dy$,

$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -B(x,y)dx+A(x,y)dy$. Вследствие произвольности точки (x_0,y_0) каждая из введенных функций $u(x,y),\ v(x,y)$ определяется с точностью до произвольного вещественного слагаемого. Пути интегрирования во введенных интегралах не указаны, так как согласно условиями потенциальности и соленоидальности эти интегралы не зависят от пути интегрирования. Мы видим, что введенные функции удовлетворяют равенствам $u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x$, и значит, являются комплексно-сопряженными функциями. Следовательно, $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=w(z)$ – аналитическая функция комплексного переменного $z=x+\mathrm{i}y$. Эту функцию, заданную в области определения поля скоростей, называют **комплексным потенциалом** поля скоростей. Заметим, что

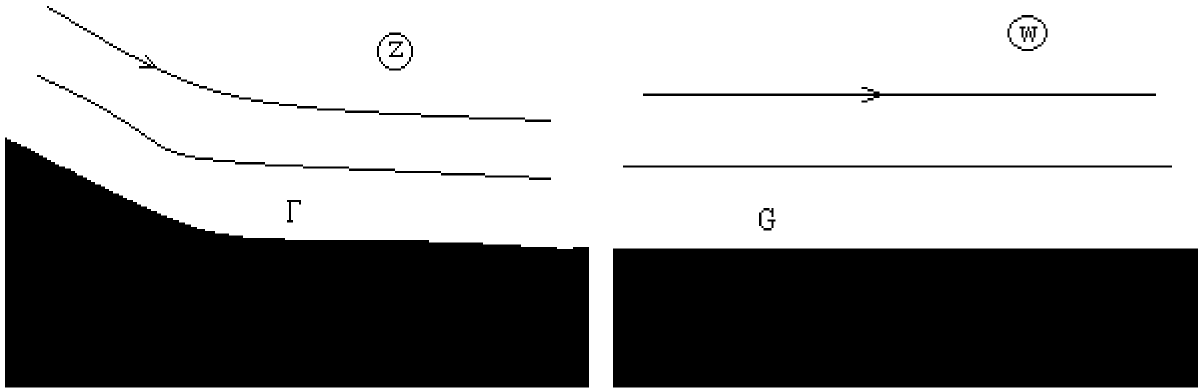
$$w'(z)=u'_x+\mathrm{i}v'_x=A(x,y)-\mathrm{i}B(x,y),$$

и значит, по комплексному потенциалу легко определить скорость в соответствующей точке: $\vec{V}(x,y)=\overline{w'(z)}$.

Линией тока называется та линия в области течения жидкости, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору скорости в соответствующей точке. Таким образом, линии тока – это линии, вдоль которых перемещается жидкость. В соответствии с определением дифференциальное уравнение линий тока имеет вид: $\dfrac{dx}{A(x,y)}=\dfrac{dy}{B(x,y)}$ или $A(x,y)dy-B(x,y)dx=0$. Это значит, что вдоль линий тока имеем $v(x,y)=const$. Если теперь представить конформное отображение области течения жидкости, полученное применением аналитической функцией $w(z)$, то **линии тока в плоскости течения перейдут в горизонтальные линии в плоскости комплексного потенциала**.

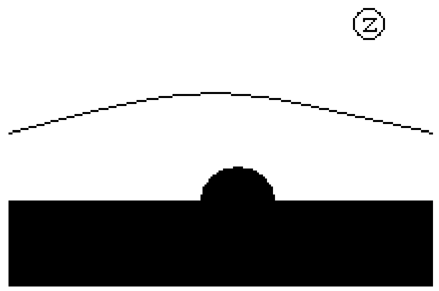
Это свойство позволяет находить скорости в произвольных точках области течения в результате применения конформного отображения области течения на область с горизонтальными границами. Приведем примеры применения таких конформных отображений.

1. **Задача обтекания бесконечной кривой**. Следует найти скорости в любой точке бесконечной области течения, ограниченной бесконечной кривой Γ, если известно значение скорости в бесконечно удаленной точке.



Для решения задачи следует конформно отобразить бесконечную область течения в плоскости z на полуплоскость в плоскости w так, чтобы граница Г (линия тока) перешла в горизонтальную прямую G – границу полуплоскости. При этом необходимо, чтобы бесконечно удаленная точка в плоскости z перешла в бесконечную точку в плоскости w. Кроме того, отображающая функция $w(z)$ должна обладать следующим свойством: $|w'(\infty)| = V_\infty$.

П р и м е р. Исследовать обтекание бесконечной прямой с выпуклостью в виде границы полукруга радиуса R. Вектор скорости в бесконечности имеет величину V_∞.



Пусть граница области течения лежит на оси OX, центр круга, половина которого является выпуклостью на прямой, находится в начале координат. Функция $z_1(z) = \dfrac{z}{R}$ отображает область течения на подобную область, где выпуклость имеет радиус 1. Теперь функция $z_2(z_1)=\frac{A}{2}(z_1+\frac{1}{z_1})$ при $A>0$ отображает область в плоскости z_1 на верхнюю полуплоскость, причем бесконечность переходит бесконечность. Следовательно, $w(z)=\frac{A}{2}(\frac{z}{R}+\frac{R}{z})$. Остается подобрать число A так, чтобы скорость в бесконечности была заданной. Так как $\overline{w'(\infty)}=\frac{A}{2R}$, получим комплексный потенциал: $w(z)=V_\infty(z+\frac{R^2}{z})$.

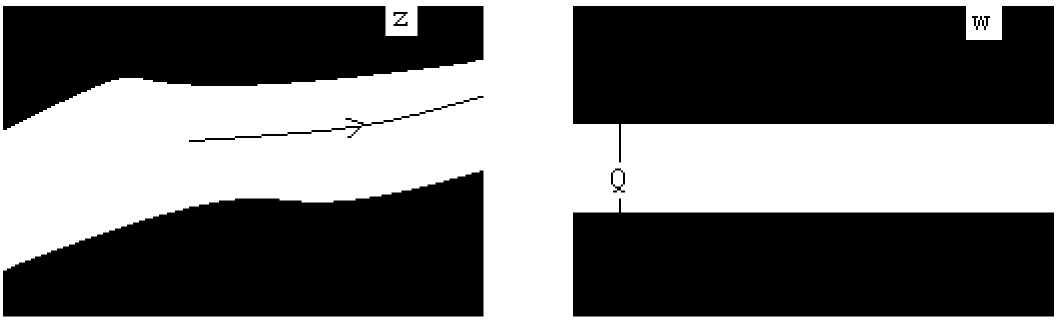
Предположим, что нужно узнать скорость потока в точке $z=2\mathrm{i}R$. Для этого найдем $\overline{w'(2\mathrm{i}R)}=1{,}25\cdot V_\infty$.

2. **Течение жидкости в канале**. Следует найти скорости в любой точке бесконечной области течения, ограниченной двумя бесконечными кривыми, если известно значение расхода жидкости Q.

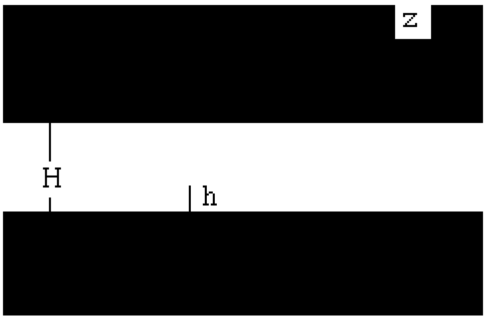
Расходом жидкости в канале называют количество жидкости, протекающее за единицу времени перпендикулярно любой кривой, соединяющей берега канала, то есть,

$$Q=\int_{M_1}^{M_2}(\vec{V},\vec{n})ds=\int_{M_1}^{M_2}A(x,y)dy-B(x,y)dx=v(x_2,y_2)-v(x_1,y_1),$$

где $M_j=(x_j,y_j),\ j=1,2,$ – точки на разных берегах канала. Поскольку комплексный потенциал отображает берега канала на горизонтальные прямые в плоскости w, значение Q совпадает с шириной полосы в плоскости комплексного потенциала. Поэтому для решения поставленной задачи следует отобразить криволинейную полосу, изображающую канал, на горизонтальную полосу шириной Q с соответствием $w(\infty)=\infty$.



П р и м е р. Исследовать течение жидкости в бесконечном канале с перпендикулярным штифтом, торчащим из одной из стенок канала.



Пусть ширина канала равна H, высота штифта равна h, причем $h < H/2$. Пусть сторона с штифтом расположена на оси OX, причем основание штифта в начале координат.

Преобразование $z_1 = \frac{\pi}{H} z$ переводит область течения в подобную полосу с надрезом ширины π, причем высота надреза равна $\frac{\pi}{H} h$. Функция $z_2 = e^{z_1}$ переводит область в плоскости z_1 на верхнюю полуплоскость с разрезом по дуге окружности радиуса 1 с центром в нуле от точки 1 до точки $e^{\pi h \mathrm{i}/\mathrm{H}}$. Теперь функция $z_3 = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$ отображает полученную в плоскости z_2 область на плоскость с разрезом, лежащим на оси OX и соединяющим через бесконечность точки $\cos\frac{\pi}{H} h$ и -1. Функция $z_4 = \frac{z_3 - \cos \pi h / H}{z_3 + 1}$ переводит область в плоскости z_3 на плоскость с разрезом вдоль положительной части оси OX, при этом образом бесконечно удаленной точки является 1. Функция $z_5 = \sqrt{z_4}$ при соответствующем выборе ветви переводит область в плоскости z_4 на верхнюю полуплоскость. Теперь верхнюю полуплоскость переведем в себя так, чтобы точка 1 перешла в бесконечно удаленную точку, а точка -1 в ноль. Это сделает функция $z_6 = \frac{1 + z_5}{1 - z_5}$. И наконец, полуплоскость переведем в полосу шириной Q с помощью функции $z_7 = \frac{Q}{\pi} \ln z_6$. В итоге комплексным потенциалом будет суперпозиция всех перечисленных функций: $w(z) = z_7(z_6(z_5(z_4(z_3(z_2(z_1(z)))))))$. То есть,

$$w(z) = \frac{Q}{\pi}\left[\ln \frac{\sqrt{e^{2\pi z/H} + 1 + 2e^{\pi z/H}} + \sqrt{e^{2\pi z/H} + 1 - 2e^{\pi z/H} \cos \pi h / H}}{\sqrt{e^{2\pi z/H} + 1 + 2e^{\pi z/H}} + \sqrt{e^{2\pi z/H} + 1 - 2e^{\pi z/H} \cos \pi h / H}}\right].$$

Теперь, чтобы получить значение скорости в любой точке области течения, следует взять комплексное сопряжение от производной $w(z)$ в соответствующей точке.