УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 517.54

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ n-й ПРОИЗВОДНОЙ

Э.Г. Кирьяцкий

Аннотация

Пусть $\Phi(z) = z^n + b_2 z^{n+1} + b_3 z^{n+2} + \cdots$ – голоморфная в круге $|z| < 1$ функция, причем $b_k \geq 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Пусть $V_n(\Phi)$ – семейство функций $F(z) = z^n + a_2 z^{n+1} + a_3 z^{n+2} + \cdots$, для которых $|a_k| \leq b_k$, $k = 2, 3, \ldots$ Вычисляется радиус наибольшего круга, в котором каждая функция $F(z) \in V_n(\Phi)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$.

Ключевые слова: голоморфная функция, производная, круг, семейство функций, положительная действительная часть.

Введение

Обозначим через $\widetilde{C}_n(E)$ класс голоморфных в единичном круге E (то есть в круге $|z| < 1$) функций вида

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1}, \tag{1}$$

для которых выполнено условие $\operatorname{Re}\{F^{(n)}(z)\} > 0$ при любом $z \in E$ (см. [1]). Число n назовем номером класса.

При $n = 0$ получим класс Каратеодори $\widetilde{C}_0(E)$ (см. [2, с. 35–39.]). Если $n = 1$, то имеем класс однолистных в E функций с ограниченным вращением (см. [3, 4]).

Пусть $n \geq 0$ и фиксировано. Рассмотрим голоморфную в E функцию

$$\Phi(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{n+k-1}, \quad \text{где} \quad b_k \geq 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

и обозначим через $V_n(\Phi)$ семейство функций вида (1), подчиненных условию

$$|a_k| \leq b_k, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Очевидно, главная функция $\Phi(z)$ однозначно определяет семейство $V_n(\Phi)$. Кроме того, она принадлежит этому семейству. Так как $\dfrac{1}{n!} F^{(n)}(0) = 1$, то легко понять, что каждая функция $F_t(z)$ из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n$ в некотором своем круге $|z| < t \leq 1$, который обозначим через E_t.

В настоящей работе мы находим наибольший круг с центром в начале координат, внутри которого любая функция из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит $\widetilde{C}_n$. Радиус такого круга однозначно определяется функцией $\Phi(z)$ из семейства $V_n(\Phi)$. Обозначим его через $r = r[V_n(\Phi)]$.

1. Имеет место следующая

Теорема 1. *Если уравнение*

$$\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)=2 \tag{2}$$

имеет в интервале $0<x<1$ *корень* x_0, *то*

$$r\,[V_n\,(\Phi)]=x_0.$$

Если уравнение (2) *не имеет в интервале* $0<x<1$ *корней, то*

$$r\,[V_n\,(\Phi)]=1.$$

Доказательство. Возьмем любую функцию $F(z)$ из $V_n(\Phi)$ и пусть $x=|z|$, где $z\in E$. Обозначив $B^n_{n+k-1}=\dfrac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$, получим:

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{F^{(n)}\,(z)\right\}\geq 1-\sum_{k=2}^{\infty}B^n_{n+k-1}b_kx^{k-1}\geq 2-\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{F^{(n)}\,(z)\right\}\geq 2-\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)\,, \tag{3}$$

где $F(z)\in V_n(\Phi)$ и $|z|=x$. Пусть x_0 – корень уравнения (2) и $0<x_0<1$. Так как функция $\Phi^{(n)}(x)$ монотонно возрастает в интервале $0<x<1$, то x_0 – единственный корень, и поэтому

$$2-\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)>0,\quad 0\leq x<x_0. \tag{4}$$

Неравенства (3), (4) показывают, что любая функция $F(z)$ из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n(E_{x_0})$. Увеличить радиус круга E_{x_0} нельзя, так как в противном случае в семействе $V_n(\Phi)$ найдется такая функция, которая не будет принадлежать классу $\widetilde{C}_n$ в расширенном круге, например, это функция

$$\Phi_*\,(z)=2z^n-\Phi\,(z)=z^n-\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^{n+k-1},$$

принадлежащая семейству $V_n(\Phi)$. Для функции $\Phi_*(z)$ имеем

$$\frac{1}{n!}\,\Phi_*^{(n)}\,(x)=2-\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)\,.$$

Отсюда следует, что если $x_0<x<x_1$, то

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{\Phi_*^{(n)}\,(x)\right\}<0, \tag{5}$$

то есть $\Phi_*(z)\notin\widetilde{C}_n(E_{x_1})$ в расширенном круге E_{x_1}. Таким образом, $r[V_n(\Phi)]=x_0$, и первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть уравнение (2) не имеет корней в интервале $0<x<1$. Так как $\dfrac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(0)=1$, то, используя монотонность функции $\dfrac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)$ в интервале $0<x<1$, получим:

$$\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x)<2,\quad 0\leq x<1.$$

Тогда из (3) следует, что любая функция $F(z)$ из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n(E)$. Учитывая, что функции вида (1) определены лишь в единичном круге E, получим $r[V_n(\Phi)] = 1$, что доказывает вторую часть теоремы. □

Замечание 1. Функции $\Phi(z)$ и $\Phi_*(z)$ принадлежат классу $\widetilde{C}_n(E_{x_0})$.

В самом деле, так как обе функции взяты из семейства $V_n(\Phi)$, то к ним применимо неравенство (3). Следовательно,

$$\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\left\{\Phi^{(n)}(z)\right\} \geq 2 - \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(x) > 0, \quad |z| = x < x_0,$$

$$\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\left\{\Phi_*^{(n)}(z)\right\} \geq 2 - \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(x) > 0, \quad |z| = x < x_0.$$

Кроме того, неравенство (5) показывает, что для функции $\Phi_*(z)$ увеличить круг принадлежности ее к классу $\widetilde{C}_n$ нельзя.

Теорема 2. *Если функция*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^{n+k-1}$$

принадлежит классу $\widetilde{C}_n(E)$, *то любая функция*

$$Q(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1},$$

коэффициенты которой подчинены условию

$$|a_k| \leq |A_k|, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

принадлежит классу $\widetilde{C}_n$, *в круге* $|z| < 1/3$, *но, вообще говоря, не в большем круге.*

Доказательство. При $|z| = x$ имеем

$$\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\left\{Q^{(n)}(z)\right\} = 1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n a_k z^{k-1}\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \left|\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n a_k z^{k-1}\right\}\right| \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n |a_k| \left|z^{k-1}\right| \geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n |A_k| \left|z^{k-1}\right|. \quad (6)$$

Далее

$$\Psi(z) = \frac{1}{n!}F^{(n)}(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n A_k z^{k-1}. \quad (7)$$

Так как $F(z) \in \widetilde{C}_n(E)$, то $\operatorname{Re}\{\Psi(z)\} > 0$ в E. Это означает, что функция $\Psi(z)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_0(E)$, то есть классу Каратеодори. Но тогда для коэффициентов функции (7) справедливы неравенства (см. [2])

$$B_{n+k-1}^n |A_k| \leq 2, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{Q^{(n)}\left(z\right)\right\} \geq 1-2\sum_{k=2}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1-3x}{1-x}.$$

Если теперь $0 \leq x < 1/3$, то $\mathrm{Re}\,\{Q^{(n)}(z)\} > 0$, где $|z| = x$, то есть $Q(z) \in \widetilde{C}_n(E_{1/3})$.

Рассмотрим теперь функции

$$F_1\left(z\right) = z^n + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{B^n_{n+k-1}} z^{n+k-1},$$

$$Q_1\left(z\right) = z^n - 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{B^n_{n+k-1}} z^{n+k-1}.$$

Для этих функций имеем, что

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{F_1^{(n)}\left(z\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\},$$

$$\frac{1}{n!}\,\mathrm{Re}\left\{Q_1^{(n)}\left(z\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1-3z}{1-z}\right\}.$$

Поэтому функция $F_1(z)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n$ в единичном круге E, а функция $Q_1(z)$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n$ только в круге $|z| < R = 1/3$. □

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы 2, радиус $R = 1/3$ является постоянным вне зависимости от номера n класса $\widetilde{C}_n$.

Следствие 1. *Пусть функция $F(z) = z^n + a_2 z^{n+1} + \cdots$ принадлежит классу $\widetilde{C}_n(E)$. Если произвольным образом изменить аргументы у коэффициентов a_k, $k = 2, 3, \ldots$, функции $F(z)$, то получится новая функция, которая будет принадлежать классу $\widetilde{C}_n$ в круге $|z| < 1/3$, но, вообще говоря, не в большем круге. Радиус $R = 1/3$ является постоянным вне зависимости от номера n класса $\widetilde{C}_n$.*

Следствие 2. *Пусть*

$$\Phi\left(z\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{n+k-1} \in \widetilde{C}_n\left(E\right), \quad \textit{где} \;\; b_k \geq 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Тогда корень x_0 уравнения $\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\left(x\right) = 2$ (если он существует в интервале $0 < x <$ < 1) удовлетворяет неравенству $x_0 \geq 1/3$. Радиус $R = 1/3$ является постоянным вне зависимости от номера n класса $\widetilde{C}_n$.

Доказательство. В самом деле, по теореме 1 любая функция

$$F\left(z\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1},$$

коэффициенты которой подчинены условию

$$|a_k| \leq b_k, \quad k = 2, 3, \ldots, ,$$

принадлежит классу $\widetilde{C}_n$ в круге $|z| < x_0$. С другой стороны, любая такая функция принадлежит классу $\widetilde{C}_n$ в круге $|z| < 1/3$. Отсюда $x_0 \geq 1/3$. □

2. Обозначим через $\widetilde{K}_n(E)$ класс голоморфных в единичном круге E функций вида (1), у которых n-я разделенная разность $[F(z); z_0, z_1, \ldots, z_n]$ отлична от нуля при любых $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$. Имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 3. *Если уравнение*

$$\frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x) = 2 \tag{8}$$

имеет в интервале $0 < x < 1$ *корень, то любая функция из семейства* $V_n(\Phi)$ *принадлежит классу* $\widetilde{K}_n$ *в круге* E_{x_0}*, но, вообще говоря, не в большем. Если же это уравнение не имеет в интервале* $0 < x < 1$ *корней, то любая функция из* $V_n(\Phi)$ *принадлежит классу* $\widetilde{K}_n(E)$.

Доказательство. Пусть уравнение (8) имеет корень x_0 в интервале $0 < x < 1$. Известно (см. [1]), что $\widetilde{C}_n(E_{x_0}) \subset \widetilde{K}_n(E_{x_0})$. Отсюда с учетом теоремы 1 получаем, что любая функция $F(z)$ из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E_{x_0})$. Покажем, что радиус указанного круга увеличить нельзя. Пусть, вопреки утверждению, любая функция из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E_{x_1})$, где $E_{x_1} \supset E_{x_0}$. В частности, $\Phi_*(z) \in \widetilde{K}_n(E_{x_1})$. Для этой функции имеем, что

$$\frac{1}{n!}\,\Phi_*^{(n)}\,(x_0) = 2 - \frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}\,(x_0) = 0, \quad x_0 \in E_{x_1}.$$

Однако последнее равенство не может иметь места, так как n-я производная любой функции, принадлежащей классу $\widetilde{K}_n(E_{x_0})$, отлична от нуля в круге E_{x_1} (см. [1]). Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть уравнение (8) не имеет корней в интервале $0 < x < 1$. Тогда, опираясь на соотношение $\widetilde{C}_n(E) \subset \widetilde{K}_n(E)$ и на теорему 1, заключаем, что любая функция из семейства $V_n(\Phi)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$. □

3. Теперь, в зависимости от взятой главной функции $\Phi(z)$, займемся решением уравнения (2), что позволит нам вычислить радиус $r[V_n(\Phi)]$.

Построим множество многочленов $P_{n,k}(\alpha)$, $k = 2, 3, \ldots$, степени $k-1$ от переменной α с помощью рекуррентной формулы

$$P_{n,k+1}\,(\alpha) = \frac{(k-1)\,P_{n,k-1}\,(\alpha) + (n+1)\,P_{n,k}\,(\alpha)\,P_{n,2}\,(\alpha)}{n+k},$$

$$P_{n,1}(\alpha) \equiv 1, \quad P_{n,2}(\alpha) = \alpha.$$

Эти многочлены, обладающие многими интересными свойствами, были рассмотрены нами в [5]. Предполагая, что $\alpha \geq 0$, $n \geq 0$, построим функцию $\varphi_{n,\alpha}(z)$ следующим образом:

$$\varphi_{n,\alpha}\,(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k+1}\,(\alpha)\,z^{n+k}.$$

Эта функция будет голоморфной в единичном круге E и коэффициенты ее $P_{n,k+1}(\alpha)$ неотрицательны. Исходя из определения функции $\varphi_{n,\alpha}(z)$, запишем при различных значениях параметра α несколько таких главных функций. Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$\varphi_{n,0}\,(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{(n+2)\,(n+4) \cdots (n+2m)}\,z^{n+2m}.$$

В частности,

$$\varphi_{0,0}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \varphi_{1,0}(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\varphi_{n,1}(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} z^{n+m} = \frac{z^n}{1-z}.$$

В частности,

$$\varphi_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \varphi_{1,1}(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_0 = (n+3)/(n+1)$. Тогда

$$\varphi_{n,\alpha_0}(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n+m-1}{n+1} z^{n+m} = \frac{z^n\left(1 + \frac{1-n}{1+n}z\right)}{(1-z)^2}.$$

В частности,

$$\varphi_{n,2}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \varphi_{n,3}(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2}.$$

Функции $\varphi_{1,0}(z)$, $\varphi_{0,1}(z)$, $\varphi_{1,1}(z)$, $\varphi_{1,2}(z)$, $\varphi_{0,3}(z)$ являются однолистными в E функциями. Функции $\varphi_{n,1}(z)$, $\varphi_{n,\alpha_0}(z)$ принадлежат классу $K_n(E)$.

Теорема 4. *Радиус наибольшего круга принадлежности всех функций*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1}$$

семейства $V_n(\varphi_{n,\alpha})$ классу C_n вычисляется по формуле $r[V_n(\varphi_{n,\alpha})] = x_0$, где x_0 – корень уравнения

$$(1+x)^{(\alpha-1)(n+1)/2} = 2(1-x)^{(\alpha+1)(n+1)/2}, \quad 0 < x < 1. \tag{9}$$

Доказательство. Можно показать, что [3]

$$\frac{1}{n!}\varphi_{n,\alpha}^{(n)}(x) = \frac{(1+x)^{(\alpha-1)(n+1)/2}}{(1-x)^{(\alpha+1)(n+1)/2}}. \tag{10}$$

Откуда в силу теоремы 1 мы получаем уравнение (9). Это уравнение, как легко убедиться, имеет единственный корень x_0 в интервале $0 < x < 1$. □

Замечание 3. Из формулы (10), в частности, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\varphi_{n,0}^{(n)}(z) &= \frac{1}{(1-z^2)^{n+1}}, \\ \frac{1}{n!}\varphi_{n,1}^{(n)}(z) &= \frac{1}{(1-z)^{n+1}}, \\ \frac{1}{n!}\varphi_{n,\alpha_0}^{(n)}(z) &= \frac{1+z}{(1-z)^{n+2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Пользуясь формулами (11), имеем

Следствие 3. *Если* $\alpha = 0$, *то*

$$r\left[V_n\left(\varphi_{n,0}\right)\right] = \sqrt{1 - 4^{-1/(n+1)}}.$$

В частности,

$$r\left[V_0\left(\varphi_{0,0}\right)\right] = \sqrt{3/2}, \quad r\left[V_1\left(\varphi_{1,0}\right)\right] = 1/\sqrt{2}.$$

Если $\alpha = 1$, *то*

$$r\left[V_n\left(\varphi_{n,1}\right)\right] = 1 - \sqrt[n+1]{1/2}.$$

В частности,

$$r\left[V_0\left(\varphi_{0,1}\right)\right] = 1/2, \quad r\left[V_1\left(\varphi_{1,1}\right)\right] = 1 - \sqrt{1/2}.$$

Если $\alpha = \alpha_0 = (n+3)/(n+1)$, *то* $r[V_1(\varphi_{1,1})] = x_0$, *где*

$$1 + x_0 = 2\left(1 - x_0\right)^{n+2}.$$

В частности,

$$r\left[V_1\left(\varphi_{1,2}\right)\right] \approx 0,13, \quad r\left[V_0\left(\varphi_{0,3}\right)\right] = \left(5 - \sqrt{17}\right)/4.$$

Возьмем теперь функцию

$$\Phi_c\left(z\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} c z^{n+k-1}$$

где c – некоторое положительное число.

Теорема 5. *Радиус наибольшего круга принадлежности всех функций*

$$F\left(z\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n=k-1}$$

семейства $V_n(\Phi_c)$ *к классу* $\widetilde{C}_n$ *вычисляется по формуле*

$$r\left[V_n\left(\Phi_c\right)\right] = 1 - \sqrt[n+1]{c/\left(1+c\right)}.$$

В самом деле, пользуясь теоремой 1, найдем $r[V_n(\Phi_c)]$. Для этого решим уравнение $\Phi_c^{(n)}\left(x\right) = n!2$ и убедимся, что оно имеет корень $x_0 = 1 - \sqrt[n+1]{c/\left(1+c\right)}$. Значит, $r\left[V_n\left(\Phi_c\right)\right] = 1 - \sqrt[n+1]{c/\left(1+c\right)}$.

Отметим, в частности, что

$$r\left[V_0\left(\Phi_c\right)\right] = 1/\left(1+c\right) \quad \text{и} \quad r\left[V_1\left(\Phi_c\right)\right] = 1 - \sqrt{c/\left(1+c\right)}.$$

Последний результат был получен также В.И. Гавриловым в [6].

Summary

E.G. Kiriyatzkii. On One Family of Holomorphic in a Circle of Functions with Positive Real Part of nth Derivative.

Let $\Phi(z) = z^n + b_2 z^{n+1} + b_3 z^{n+2} + \cdots$ be a holomorphic in the unit circle $|z| < 1$ function with $b_k \geq 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Let $V_n(\Phi)$ be a family of functions $F(z) = z^n + a_2 z^{n+1} + a_3 z^{n+2} + \cdots$, for which $|a_k| \leq b_k$, $k = 2, 3, \ldots$

The radius of the greatest circle is established for which every function $F(z) \in V_n(\Phi)$ satisfies the condition $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$.

Key words: holomorphic function, derivative, circle, family of functions, positive real part.

Литература

1. *Кирьяцкий Э.Г.* Многолистные функции и разделенные разности. – Вильнюс: Техника, 1995. – 393 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. – Томск: Том. гос. ун-т, 2001. – 218 с.
3. *Зморович В.А.* К теории специальных классов однолистных функций. I // Усп. матем. наук. –1959. – Т. 14, № 3. – С. 137–143.
4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
5. *Кирьяцкий Э.Г.* О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием единичного круга // Лит. матем. сб. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 57–65.
6. *Гаврилов В.И.* Замечание о радиусе однолистности голоморфных функций // Матем. зам. – 1970. – Т. 7, № 3. – С. 295–298.

Поступила в редакцию
13.08.08

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования Вильнюсского технического университета им. Гедиминаса, Литва.

E-mail: *Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt*