УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.68

О СХОДИМОСТИ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Карчевский

Аннотация

Рассматривается задача Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида. Доказывается сходимость многосеточного итерационного метода решения указанной задачи. Метод, исследованный в работе, основан на использовании конформных конечных элементов и процедуры сглаживания Якоби.

Ключевые слова: линейное эллиптическое уравнение второго порядка, метод конечных элементов, многосеточный итерационный метод, исследование сходимости.

Введение

Многосеточные методы принадлежат в настоящее время к наиболее экономичным способам численного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Построению и исследованию различных вариантов многосеточных методов посвящена обширная литература (см., например, [1–4]). К числу наиболее изученных с этой точки зрения принадлежат эллиптичесие уравнения с самосопряженными положительно определенными операторами второго порядка. Что касается уравнений с несамомсопряженными операторами, то теория многосеточных методов для этих задач развита значительно слабее. Отметим в этой связи монографию [2], в которой изучался метод, основанный на симметризации конечноэлементного оператора, а также [4, 5], где рассматривались специальные варианты уравнения конвекции-диффузии (при доминирующей конвекции). В настоящей работе исследована сходимость двусеточного метода для общего эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида. Для аппроксимации краевой задачи используется конечноэлементный метод с произвольными конформными (вообще говоря, криволинейными) элементами. Из полученных в работе результатов стандартным образом выводится сходимость так называемого W-цикла многосеточного метода со скоростью, не зависящей от h (параметра триангуляции). Применяемая нами методика построения и исследования многосеточного метода наиболее близка к [3]. Отметим также, что что несколько менее общие результаты о сходимости многосеточного метода для эллиптических уравнений с несимметричными операторами другими методами получены в [6][1].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + ub) + a\cdot\nabla u + a_0 u = f, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

[1] К сожалению, эта работа стала нам известна в ходе оформления настоящей статьи.

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $n = 2,\ 3$, Γ – граница области Ω,

$$A = A(x) = (a_{ij}(x))_{j,j=1}^n, \quad a = a(x) = (a_i(x))_{i=1}^n,\ b = b(x) = (b_i(x))_{i=1}^n.$$

Здесь и далее $x \cdot y = \sum\limits_i x_i y_i$ – скалярное произведение в конечномерном арифметическом пространстве векторов. Через $L_2(\Omega)$ обозначаем гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_\Omega uv\,dx,$$

$\|u\| = (u,u)^{1/2}$, $H^m(\Omega)$ – пространство Соболева функций, имеющих обобщенные производные на Ω из $L_2(\Omega)$ вплоть до порядка $m \geq 1$, $H_0^1(\Omega)$ – подпространство $H^1(\Omega)$, получающееся замыканием линейного пространства гладких финитных на Ω функций в норме $H^1(\Omega)$.

Как обычно, под обобщенным решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\mathbf{a}(u, v) \equiv \int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + ub \cdot \nabla v + va \cdot \nabla u + a_0 uv)dx = (f, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Будем предполагать, что матрица $A(x)$ симметрична при любом $x \in \Omega$ и равномерно положительно определена, то есть

$$A(x)t \cdot t \geq c_0|t|^2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega,\ c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Будем предполагать также, что выполнены условия, обеспечивающие положительную определенность и ограниченность билинейной формы $\mathbf{a}$ на $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathbf{a}(u, u) \geq c_1\|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

$$|\mathbf{a}(u, v)| \leq c_2\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

c_1, $c_2 = \mathrm{const} > 0$, $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Оценки (3), (4), например, выполняются, если все коэффициенты a_{ij}, a_i, b_i принадлежат $L_\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, а величина $\|a\|_{L_\infty(\Omega)} + \|b\|_{L_\infty(\Omega)}$ достаточно мала.

Условие (3) выполняется без ограничений на величину $\|a\|_{L_\infty(\Omega)} + \|b\|_{L_\infty(\Omega)}$, если a_i, b_i, $\in C^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_0 - \mathrm{div}(a + b) \geq 0$ на Ω.

Известно (см., например, [7]), что при выполнении условий (3), (4) задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение u при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$, причем $\|u\|_1 \leq c\|f\|$, $c = \mathrm{const}$.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать сопряженную задачу, состоящую в отыскании функции $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\mathbf{a}(v, u) \equiv \int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + vb \cdot \nabla u + ua \cdot \nabla v + a_0 uv)dx = (f, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Понятно, что при выполнении условий (3), (4) задача (5) имеет единственное решение при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$.

В дальнейшем дополнительно к (3), (4) будем предполагать, что выполнены так называемые условия регулярности, то есть a_i, b_i, a_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, принадлежат $C^1(\overline{\Omega})$, Γ – поверхность класса C^2. Тогда (см., например, [7]) обобщенное решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, справедлива оценка

$$\|u\|_2 \le c\|f\|,$$

где $c=\mathrm{const}$. То же справедливо и для сопряженной задачи (5). Здесь и далее $\|u\|_2 = \|u\|_{H^2(\Omega)}$.

2. Метод конечных элементов. Свойства конечномерных операторов

Пусть $\mathcal{T}_h$ – правильная регулярная триангуляция области Ω, удовлетворяющая так называемому обратному предположению (см., например, [8, 9]). Пусть далее $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ – конечноэлементное пространство такое, что для любой функции $u \in H^2(\Omega)$ существует функция $u_h \in V_h$ такая, что[2]

$$\|u-u_h\|_1 \le ch\|u\|_2. \tag{6}$$

Предполагается также выполненным обратное неравенство

$$\|v\|_1 \le ch^{-1}\|v\| \quad \forall\, v \in V_h. \tag{7}$$

Лемма 1 (Обэн – Нитше). *Пусть выполнены условия регулярности задачи* (1), (2), $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in V_h$

$$\mathbf{a}(u-v,w)=0 \quad \forall\, w \in V_h.$$

Тогда

$$\|u-v\| \le ch\|u-v\|_1.$$

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в [8].

В дальнейшем предполагается, что в пространстве V_h фиксирован некоторый базис. Через v^h будем обозначать вектор координат функции $v \in V_h$ в выбранном базисе. Для регулярной триангуляции справедливы неравенства

$$c^{-1}h^n v^h \cdot v^h \le \int\limits_{\Omega} v^2 dx \le ch^n v^h \cdot v^h. \tag{8}$$

Описание способов построения конечноэлементных пространств V_h, удовлетворяющих условиям (6)–(8) можно посмотреть, например, в [8, 9].

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $y \in V_h$ такую, что

$$\mathbf{a}(y,v)=(f,v) \quad \forall\, v \in V_h. \tag{9}$$

Если условие (3) выполнено, то задача (9), очевидно, имеет единственное решение при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$.

При исследовании многосеточного итерационного метода решения задачи (9) нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 2. *Пусть* $y \in V_h$. *Положим*

$$\|y\|_{2,h} = \sup_{v\in V_h,\ v\ne 0} \frac{\mathbf{a}(y,v)}{\|v\|}, \quad \|y\|_{2,h}^* = \sup_{v\in V_h,\ v\ne 0} \frac{\mathbf{a}(v,y)}{\|v\|}. \tag{10}$$

Существует такая, не зависящая от h, *постоянная* c, *что*

$$\|y\|_{2,h}^* \le c\|y\|_{2,h} \quad \forall y \in V_h. \tag{11}$$

[2] Далее через $c, c_1, \dots$ обозначаются постоянные, не зависящие от параметра триангуляции h.

Доказательство. По определению

$$\mathbf{a}(y,v)-\mathbf{a}(v,y)=\int\limits_{\Omega}(a\cdot\nabla yv-a\cdot\nabla vy+b\cdot\nabla vy-b\cdot\nabla yv)\,dx,$$

откуда, применяя формулу интегрирования по частям, а затем неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|\mathbf{a}(y,v)-\mathbf{a}(v,y)|\le c\|\nabla y\|\,\|v\|, \tag{12}$$

следовательно, $\|y\|^*_{2,h}\le c(\|y\|_{2,h}+\|\nabla y\|)$, причем вследствие условия (3) и неравенства Фридрихса для $y\neq 0$ имеем

$$\|\nabla y\|\le c\frac{\sqrt{\mathbf{a}(y,y)}\|y\|}{\|y\|}\le c\frac{\mathbf{a}(y,y)}{\|y\|}\le c\sup_{v\in V_h,\ v\neq 0}\frac{\mathbf{a}(y,v)}{\|v\|}=c\|y\|_{2,h}.$$

□

Введем в рассмотрение взаимносопряженные операторы $\mathcal{A},\mathcal{A}^*:V_h\to V_h$, определяемые соотношениями

$$(\mathcal{A}y,v)=(v,\mathcal{A}^*y)=\mathbf{a}(y,v)\quad\forall\, y,v\in V_h. \tag{13}$$

Положим $\mathcal{A}_0=(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)/2$, $\mathcal{A}_1=(\mathcal{A}-\mathcal{A}^*)/2$.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$\overset{\circ}{\gamma}_1\,(y,y)\le(\mathcal{A}_0y,y)\le\overset{\circ}{\gamma}_2\,(y,y)\quad\forall\, y\in V_h, \tag{14}$$

$$\|\mathcal{A}_1\|\le\overset{\circ}{\gamma}_3, \tag{15}$$

где $\overset{\circ}{\gamma}_1=c_1$, $\overset{\circ}{\gamma}_2=c_2h^{-2}$, $\overset{\circ}{\gamma}_3=c_3h^{-1}$.

Доказательство. Неравенства (14) непосредственно вытекают из очевидного тождества

$$(\mathcal{A}_1y,y)=0\quad\forall y\in V_h,$$

оценок (3), (4) и обратного неравенства (7). Неравенство (15) получается последовательным применением (12), (7). □

Введем в рассмотрение оператор $I_h:V_h\to V_h$ при помощи тождества

$$(I_hy,v)=h^ny^h\cdot v^h\quad\forall\, y,v\in V_h.$$

Определим так называемую сеточную норму на пространстве V_h как энергетическую норму оператора I_h:

$$\|y\|^2_{I_h}=(I_hy,y)\quad\forall\, y\in V_h.$$

Вследствие (8) справедливы оценки

$$\gamma_1(y,y)_{I_h}\le(I_h^{-1}\mathcal{A}_0y,y)_{I_h}\le\gamma_2(y,y)_{I_h}\quad\forall\, y\in V_h,$$

$$\|I_h^{-1}\mathcal{A}_1\|_{I_h}\le\gamma_3,$$

где $\gamma_1=\bar c_1$, $\gamma_2=\bar c_2h^{-2}$, $\gamma_3=\bar c_3h^{-1}$, постоянные $\bar c_i$ очевидным образам определяются по c_i и c из оценок (8).

Лемма 4 [10, с. 290]. *Пусть* $\overline{\tau}_0 = \tau_0(1 - \varkappa\overline{\rho}_0)$, *где*

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \varkappa = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_2}}, \quad \overline{\rho}_0 = \frac{1 - \overline{\xi}}{1 + \overline{\xi}}, \quad \overline{\xi} = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Тогда $\|E - \overline{\tau}_0 I_h^{-1}\mathcal{A}\|_{I_h} \le \overline{\rho}_0 < 1$, *где* E *– единичный оператор.*

Лемма 5. *Если* $\|E - \tau\mathcal{A}\| \le 1$, $\theta \in [0,1]$, *то* $\|E - \theta\tau\mathcal{A}\| \le 1$.

Доказательство немедленно вытекает из представления

$$E - \theta\tau\mathcal{A} = (1 - \theta)E + \theta(E - \tau\mathcal{A}).$$

Лемма 6. *Пусть* $\overline{\tau}_1 = \overline{\tau}_0/2$. *Тогда для любого целого* $\nu \ge 1$

$$\|I_h^{-1}\mathcal{A}(E - \overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu\|_{I_h} \le 1/\overline{\tau}_1\sqrt{e\nu}. \tag{16}$$

Доказательство. Положим $B = E - 2\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A} = E - \overline{\tau}_0 I_h^{-1}\mathcal{A}$. Тогда

$$I_h^{-1}\mathcal{A} = (2\overline{\tau}_1)^{-1}(E - B), \ E - \overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A} = 2^{-1}(E + B),$$

$$I_h^{-1}\mathcal{A}(E - \overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu = \overline{\tau}_1^{-1} 2^{-(\nu+1)}(E - B)(E + B)^\nu,$$

причем $\|B\|_{I_h} < 1$. Покажем, что $\|(E-B)(E+B)^\nu\|_{I_h} \le 2^{\nu+1}/\sqrt{e\nu}$. В соответствии с теоремой Неймана (см., например, [11, с. 461]) для этого достаточно установить, что

$$\max_{|z|=1} |(1 - z)(1 + z)^\nu| \le 2^{\nu+1}/\sqrt{e\nu}.$$

Полагая $z = e^{i\varphi}$, получим $|(1 - z)(1 + z)^\nu|^2 = 2^{\nu+1}(1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)^\nu$. Далее нетрудно убедиться, что

$$\max_{-1 \le t \le 1} (1 - t)(1 + t)^\nu = \frac{2^{\nu+1}}{\nu(1 + 1/\nu)^{\nu+1}} < 2^{\nu+1}/e\nu.$$

□

Замечание 1. Доказательство леммы 6 совпадает в основном с доказательством леммы Реускена (см. [3, 4, 6]), однако использование техники гильбертовых пространств позволило нам несколько улучшить оценку нормы оператора $I_h^{-1}\mathcal{A}(E - \overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu$. Как известно (см., например, [3, 4, 6]), существенное улучшение оценок типа (16) достигается в случае, когда $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, то есть при $\gamma_3 = 0$. Действительно, в рассматриваемой нами ситуации это приводит к тому, что $B = B^*$ в энергетическом пространстве оператора I_h, и поскольку $\|B\|_{I_h} < 1$, то $\mathrm{sp}(B) \subset (-1, 1)$, следовательно,

$$\|(E - B)(E + B)^\nu\|_{I_h} = \max_{t \in \mathrm{sp}(B)} (1 - t)(1 + t)^\nu \le 2^{\nu+1}/e\nu.$$

Таким образом, при $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

$$\|I_h^{-1}\mathcal{A}(E - \overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu\|_{I_h} \le 2/\tau_0 e\nu.$$

3. Многосеточный метод. Исследование сходимости

Опишем и исследуем сначала так называемый двусеточный метод решения задачи (9). Введем в рассмотрение триангуляцию $\mathcal{T}_{h_1}$ области Ω такую, что $V_{h_1} \subset V_h$. Понятно, что триангуляция $\mathcal{T}_h$ должна при этом получаться как измельчение триангуляции $\mathcal{T}_{h_1}$. В дальнейшем будем полагать, что

$$h_1 \leq ch. \tag{17}$$

Пусть $y^0 \in V_h$ – заданное начальное приближение к решению задачи (9). Построим последовательность приближений $y^1, y^2, \ldots \in V_h$ по следующему правилу.

1. Если y^k уже найдено, положим $y^{k,0} = y^k$ и вычислим $y^{k,\nu}$, $\nu \geq 1$ (используя итерационный метод Якоби) при помощи соотношений

$$y^{k,j+1} = y^{k,j} - \theta\overline{\tau}_1 I_h^{-1}(\mathcal{A}y^{k,j} - f_h), \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \tag{18}$$

Здесь $\theta \in (0, 1]$, $f_h \in V_h$ и определяется при помощи тождества

$$(f_h, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V_h.$$

2. Найдем $w \in V_{h_1}$, решив уравнение

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{19}$$

3. Положим $\tilde{y}^{k,0} = y^{k,\nu} + w$ и вычислим $\tilde{y}^{k,\mu}$, $\mu \geq 0$ при помощи соотношений

$$\tilde{y}^{k,j+1} = \tilde{y}^{k,j} - \theta\overline{\tau}_0 I_h^{-1}(\mathcal{A}y^{\tilde{k},j} - f_h), \quad j = 0, 1, \ldots, \mu - 1. \tag{20}$$

4. Положим $y^{k+1} = \tilde{y}^{k,\mu}$.

Замечание 2. Матрица оператора I_h диагональна в выбранном выше базисе пространства V_h, поэтому $y^{k,\nu}$, $\tilde{y}^{k,\mu}$ находятся по явным формулам. Предполагается, что система уравнений (19) относительно координат функции w в некотором базисе пространства V_{h_1} решается точно (прямым методом).

Замечание 3. При организации многосеточного метода уравнение (19), в свою очередь, решается при помощи описанного итерационного метода с переходом на более крупную сетку (подробнее см., например, [1–6]).

Теорема 1. *Существует такое $\nu \geq 1$, что*

$$\|y^{k+1} - y\| \leq q\|y^k - y\|, \tag{21}$$

где y – решение задачи (9), *$q \in (0, 1)$ – постоянная, не зависящая от h.*

Доказательство. По предположению $V_{h_1} \subset V_h$, поэтому из (9), (19) вытекает, что

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, v) = 0 \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{22}$$

Вследствие (3)

$$\|y^{k,\nu} + w - y\|_1^2 \leq c\,\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, y^{k,\nu} + w - y).$$

Используя (22), получим, что

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, y^{k,\nu} + w - y) = \mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, y^{k,\nu} - y)$$

и потому (см. (10))

$$\|y^{k,\nu}+w-y\|_1^2 \le c\|y^{k,\nu}+w-y\|\|y^{k,\nu}-y\|_{2,h}^*.$$

Вследствие леммы 1

$$\|y^{k,\nu}+w-y\| \le ch\|y^{k,\nu}+w-y\|_1,$$

поэтому

$$\|y^{k,\nu}+w-y\|_1 \le ch_1\|y^{k,\nu}-y\|_{2,h}^*,$$

откуда, вновь применяя лемму 1, а затем (11), (17), получим что

$$\|y^{k,\nu}+w-y\| \le ch^2\|y^{k,\nu}-y\|_{2,h}. \tag{23}$$

Применяя последовательно (10), (13), (18), (8), (16), находим, что

$$\begin{aligned}\|y^{k,\nu}-y\|_{2,h} &\le \|\mathcal{A}(E-\theta\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu(y^k-y)\| \le \\ &\le c\|I_h^{-1}\mathcal{A}(E-\theta\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu\|_{I_h}\|y^k-y\| \le (c/\overline{\tau_1}\sqrt{e\nu})\|y^k-y\|.\end{aligned} \tag{24}$$

Из (20), очевидно, вытекает, что

$$y^{k+1}-y=(E-\theta\overline{\tau}_0 I_h^{-1}\mathcal{A})^\mu(y^{k,\nu}+w-y).$$

Используя леммы 4, 5, отсюда получаем неравенство

$$\|y^{k+1}-y\|_{I_h} \le \|y^{k,\nu}+w-y\|_{I_h}$$

и, следовательно,

$$\|y^{k+1}-y\| \le c\|y^{k,\nu}+w-y\|. \tag{25}$$

Таким образом, на основании (23)–(25) получаем

$$\|y^{k+1}-y\| \le (ch^2/\overline{\tau_1}\sqrt{e\nu})\|y^k-y\|.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\frac{h^2}{\overline{\tau}_1}=\frac{2h^2}{\tau_0(1-\varkappa\rho_0)} \le \frac{2h^2}{\tau_0(1-\varkappa)}=\frac{h^2(\gamma_1+\gamma_2)}{1-\varkappa}=\frac{\bar{c}_1h^2+\bar{c}_2}{1-\bar{c}_3/\sqrt{\bar{c}_3^2+\bar{c}_1\bar{c}_2}} \le \mathrm{const}\,.$$

□

Построение и обоснование сходимости так называемого W-цикла многосеточного метода решения задачи (9) может быть проведено далее на основе теоремы 1 стандартным образом (см., например, [3, 4, 6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00814, 09-01-97015).

Summary

M.M. Karchevsky. On Convergence of Multigrid Method for Elliptic Equations of Second Order.

The Dirichlet problem for the general elliptic equation of second order in divergence form is considered. Convergence of the multigrid method for solving this problem is proved. The method investigated in the article is based on the application of conform finite elements and Jacobi smoother procedure.

Key words: linear elliptic equation of second order, finite element method, multigrid method, convergence research.

Литература

1. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. – Berlin: Springer, 1985. – 377 p.
2. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
3. *Braess D.* Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. – Berlin: Springer, 2003. – 342 S.
4. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М.: Физматлит, 2005. – 176 с.
5. *Ольшанский М.А.* Анализ многосеточного метода для уравнения конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле // Журн. вычисл. матем. и матем физ. – 2004. – Т. 44, № 8. – С. 1462–1491.
6. *Reusken A.* Introduction to multigrid methods for elliptic boundary value problems // Multiscale Simulation Methods in Molecular Sciences. NIC Series / Eds. J. Grotendorst, N. Attig, S. Blügel, D. Marx. – Jüulich: Institute for Advanced Simulation, Forschungszentrum Jüulich, 2009. – V. 42. – P. 467–506. – URL: http://www.fz-juelich.de/nic-series/volume42/reusken.pdf, свободный.
7. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. - 408 с.
8. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
9. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Ведение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2004. – 239 с.
10. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
11. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

Поступила в редакцию
09.06.09

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@ksu.ru*