УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.716

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ В P_k

О.С. Дудакова

Аннотация

Рассматривается задача о конечной порожденности классов монотонных функций k-значной логики. Найдены условия конечной порожденности классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств специального вида.

Ключевые слова: функции k-значной логики, классы монотонных функций, конечно порожденные замкнутые классы.

В работе исследуются замкнутые классы монотонных функций k-значной логики. Известно, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис [1], а для любого $k \geq 3$ в P_k существуют замкнутые классы как со счетным базисом, так и не имеющие базиса [2]. К настоящему времени отсутствует полное описание всех конечно порожденных классов функций многозначной логики даже для семейства всех предполных классов. При $k \leq 7$ все предполные классы в P_k являются конечно порожденными [3], а начиная с $k = 8$, существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [4] (см. также [5]). В данной работе получены условия конечной порожденности замкнутых классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств специального вида.

Пусть $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ – частично упорядоченные множества, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$. Обозначим через $f|_{\mathcal{Q}'}$ отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{R}$, совпадающее с f на всех элементах множества $\mathcal{Q}'$. Пусть f' – некоторое отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{R}$. *Доопределением* отображения f' на множество $\mathcal{Q}$ будем называть отображение $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ такое что отображение $f|_{\mathcal{Q}'}$ совпадает с f'.

Пусть $\mathcal{P}$ – частично упорядоченное множество. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ будем обозначать класс всех функций, монотонных относительно множества $\mathcal{P}$. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(n)$ будем обозначать множество всех функций от n переменных из класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – конечная система функций из P_k, Φ – формула над $\mathfrak{A}$. Положим $D(\Phi) = 0$, если Φ – тривиальная формула (то есть является символом переменной), $D(\Phi) = 1 + \max D(\Phi_i)$, если формула Φ имеет вид $\varphi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)$, где $\varphi \in \mathfrak{A}$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – некоторые формулы над $\mathfrak{A}$, максимум берется по всем $i = 1, \ldots, k$; величина $D(\Phi)$ называется *глубиной* формулы Φ.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $\varphi(x) = x$. Пусть существует взаимно-однозначное монотонное отображение $\xi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}_\xi \subseteq P^r$, $r \geq 2$, такое, что обратное отображение $\xi^{-1} : \mathcal{P}_\xi \to \mathcal{Q}$ доопределяется до монотонного отображения $\Xi : \mathcal{P}^r \to \mathcal{Q}$. Тогда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ всех функций, монотонных относительно* *множества* $\mathcal{P}$*, имеет конечный базис в том и только том случае, когда класс* $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ *всех функций, монотонных относительно множества* $\mathcal{Q}$*, имеет конечный базис.*

Этот результат следует из доказанных ниже теорем 2 и 3.

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Обозначим через $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ семейство всех функций из $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$, принимающих значения из множества $\mathcal{P}$. Легко видеть, что $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ – замкнутый класс функций.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{Q}$ *– частично упорядоченные множества,* $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$*. Пусть существует монотонное отображение* $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ *такое, что для каждого элемента* $x \in \mathcal{P}$ *выполняется соотношение* $\varphi(x) = x$*. И пусть класс* $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ *имеет конечный базис. Тогда класс* $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *имеет конечный базис.*

Доказательство. Каждой функции $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ поставим в соответствие функцию $f_F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$: положим $f_F = F|_{\mathcal{P}^n}$. Очевидно, что каждой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ соответствует ровно одна функция $f_F \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Кроме того, для каждой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ такая, что $f = f_F$. Действительно, рассмотрим функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$, заданную на каждом наборе $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ равенством $F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\varphi(\sigma_1), \ldots, \varphi(\sigma_n))$. Легко видеть, что определенная таким образом функция F монотонна, не принимает значений из множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ и совпадает с функцией f на всех наборах из $\mathcal{P}^n$. Следовательно, $f = f_F$.

Пусть некоторая функция $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ представляется формулой над множеством $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$:

$$F = F_0(\Phi_1, \ldots, \Phi_m),$$

где $F_0 \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(m)$, формула Φ_i либо является символом переменной, либо реализует некоторую функцию $F_i \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, $i = 1, \ldots, m$. Покажем, что соответствующая функция $f_F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ представляется формулой над $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$:

$$f_F = f_{F_0}(\Theta_1, \ldots, \Theta_m), \tag{1}$$

где формула Θ_i выражает функцию f_{F_i}, если формула Φ_i реализует функцию F_i, и Θ_i является символом переменной x_{j_i}, если формула Φ_i является символом переменной x_{j_i}, $i = 1, \ldots, m$, $x_{j_i} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Действительно, обозначим функцию, реализуемую формулой $f_{F_0}(\Theta_1, \ldots, \Theta_m)$, через $g(\widetilde{x})$. Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{P}^n$. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ выполняется равенство $F_i(\widetilde{\sigma}) = f_{F_i}(\widetilde{\sigma})$, а значит, наборы $(\Phi_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \Phi_m(\widetilde{\sigma}))$ и $(\Theta_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \Theta_m(\widetilde{\sigma}))$ совпадают. Кроме того, эти наборы не содержат элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому выполняется равенство

$$F_0(\Phi_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \Phi_m(\widetilde{\sigma})) = f_{F_0}(\Theta_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \Theta_m(\widetilde{\sigma})),$$

а значит, $F(\widetilde{\sigma}) = g(\widetilde{\sigma})$. Последнее равенство выполняется для каждого набора $\widetilde{\sigma}$ из $\mathcal{P}^n$, следовательно, $g = f_F$.

Пусть $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{A}]$, где $\mathfrak{A} = \{G_1, \ldots, G_k\} \subset \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество функций $\{f_{G_1}, \ldots, f_{G_k}\}$. Рассмотрим произвольную функцию $F(\widetilde{x})$ из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Индукцией по глубине формулы над $\mathfrak{A}$, выражающей функцию F, с использованием соотношения (1) нетрудно показать, что $f_F(\widetilde{x}) \in [\mathfrak{B}]$. Далее, как показано выше, для каждой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ такая, что $f = f_F$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = [\mathfrak{B}]$. □

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{Q}$ *– частично упорядоченные множества,* $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$*. Пусть существует монотонное отображение* $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ *такое, что для каждого элемента* $x \in \mathcal{P}$ *выполняется равенство* $\varphi(x) = x$*. Пусть также существует* *взаимно-однозначное монотонное отображение* $\xi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}_\xi \subseteq P^r$, $r \geq 2$, *такое, что обратное отображение* $\xi^{-1} : \mathcal{P}_\xi \to \mathcal{Q}$ *доопределяется до монотонного отображения* $\Xi : \mathcal{P}^r \to \mathcal{Q}$. *И пусть класс* $\mathcal{M}_\mathcal{Q}$ *является конечно порожденным. Тогда класс* $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ *является конечно порожденным.*

Доказательство. Покажем, что класс $\mathcal{M}'_\mathcal{Q}$ является конечно порожденным. По лемме 1 отсюда будет следовать, что и класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ является конечно порожденным.

Рассмотрим произвольную функцию $F(\widetilde{x}) \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Покажем, что существует функция $\alpha F \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(rn)$ такая, что для каждого набора $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ выполняется равенство

$$\alpha F(\xi(\sigma_1), \ldots \xi(\sigma_n)) = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \tag{2}$$

Действительно, соотношение (2) задает на множестве $\mathcal{Q}^{rn}$ частичную функцию $\alpha F''$, определенную на всех наборах из $\mathcal{P}_\xi^n \subseteq \mathcal{P}^{rn} \subset \mathcal{Q}^{rn}$ вида

$$(\varrho_1^1, \ldots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \ldots, \varrho_2^r, \ldots, \varrho_n^1, \ldots, \varrho_n^r),$$

где $(\varrho_i^1, \ldots, \varrho_i^r) = \xi(\sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Определим на множестве $\mathcal{Q}^{rn}$ частичную функцию $\alpha F'$: для каждого набора из $\mathcal{P}^{rn}$ положим

$$\alpha F'(\varrho_1^1, \ldots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \ldots, \varrho_2^r, \ldots, \varrho_n^1, \ldots, \varrho_n^r) = \\ = F(\Xi(\varrho_1^1, \ldots, \varrho_1^r), \Xi(\varrho_2^1, \ldots, \varrho_2^r), \ldots, \Xi(\varrho_n^1, \ldots, \varrho_n^r)).$$

Из определения отображения Ξ следует, что $\alpha F' \mid_{P_\xi^n} = \alpha F''$, то есть функция $\alpha F'$ является доопределением частичной функции $\alpha F''$. Кроме того, из монотонности функции F и отображения Ξ следует, что функция $\alpha F'$ монотонна. Далее определим функцию $\alpha F'$ на множестве $\mathcal{Q}^{rn}$: для каждого набора из $\mathcal{Q}^{rn}$ положим

$$\alpha F(\sigma_1, \ldots, \sigma_{rn}) = \alpha F'(\varphi(\sigma_1), \ldots, \varphi(\sigma_{rn})).$$

Легко видеть, что функция αF монотонна и является доопределением частичной функции $\alpha F'$, а значит, и доопределением частичной функции $\alpha F''$. Следовательно, для нее выполняется соотношение (2).

Пусть $\sigma \in \mathcal{Q}$ и выполнено равенство $\xi(\sigma) = (\varrho_1^\sigma, \ldots, \varrho_r^\sigma)$, где $(\varrho_1^\sigma, \ldots, \varrho_r^\sigma) \in \mathcal{P}_\xi \subseteq \subseteq \mathcal{P}^r$. Определим r отображений $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$: для каждого $\sigma \in \mathcal{Q}$ положим $\xi_i(\sigma) = = \varrho_i^\sigma$, $i = 1, \ldots, r$. Из монотонности отображения ξ следует, что все отображения $\xi_1, \ldots, \xi_r$ монотонны.

В силу включения $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ монотонные отображения $\xi_1, \ldots, \xi_r, \varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ можно рассматривать как функции из $\mathcal{M}'_\mathcal{Q}(1)$. Пусть $F(\widetilde{x})$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Для каждого $i = 1, \ldots, r$ обозначим через $\xi_i F(\widetilde{x})$ функцию $\xi_i(F(\widetilde{x}))$. Обозначим через $\varphi F(\widetilde{x})$ функцию $\varphi(F(\widetilde{x}))$. Заметим, что $\xi_1 F, \ldots, \xi_r F, \varphi F \in \mathcal{M}'_\mathcal{Q}(n)$.

Пусть для некоторой функции $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$ имеет место представление

$$F(\widetilde{x}) = F_0(F_1(\widetilde{x}), \ldots, F_m(\widetilde{x})),$$

где $F_0 \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(m)$, $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Пусть $\widetilde{\sigma}$ – произвольный набор из $\mathcal{Q}^n$. Положим $\gamma_i = F_i(\widetilde{\sigma})$, $i = 1, \ldots, m$. Согласно соотношению (2) и определению функций $\xi_1(x), \ldots, \xi_r(x)$

$$F_0(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \alpha F_0(\xi(\gamma_1), \ldots, \xi(\gamma_m)) = \\ = \alpha F_0(\xi_1(\gamma_1), \ldots, \xi_r(\gamma_1), \ldots, \xi_1(\gamma_m), \ldots, \xi_r(\gamma_m)),$$

а значит, выполняется равенство

$$F(\widetilde{\sigma}) = \alpha F_0(\xi_1 F_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_r F_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_1 F_m(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_r F_m(\widetilde{\sigma})). \tag{3}$$

Таким образом, функция $F(\widetilde{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$ представляется в виде

$$F(\widetilde{x}) = \alpha F_0(\xi_1 F_1(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F_1(\widetilde{x}), \ldots, \xi_1 F_m(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F_m(\widetilde{x})). \tag{4}$$

Рассмотрим некоторую функцию $F(\widetilde{x}) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$. Пусть имеет место представление $F(\widetilde{x}) = F_0(F_1(\widetilde{x}), \ldots, F_m(\widetilde{x}))$, где $F_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(m)$, $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$. Покажем, что выполняется равенство

$$F(\widetilde{x}) = \varphi\alpha F_0(\xi_1 F_1(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F_1(\widetilde{x}), \ldots, \xi_1 F_m(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F_m(\widetilde{x})). \tag{5}$$

Действительно, пусть $\widetilde{\sigma}$ – произвольный набор из $\mathcal{Q}^n$. Имеет место равенство (3). Обозначим набор $(\xi_1 F_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_r F_1(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_1 F_m(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_r F_m(\widetilde{\sigma}))$ через $\widetilde{\beta}_\sigma$. Так как функция $F(\widetilde{x})$ не принимает значений из $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$, то $\alpha F_0(\widetilde{\beta}_\sigma) \in \mathcal{P}$ для каждого набора $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$. Поэтому равенство (3) останется верным, если функцию αF_0 заменить на $\varphi\alpha F_0$. Таким образом, соотношение (5) установлено.

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{C}]$, где $\mathfrak{C} = \{G_1, \ldots, G_k\} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. Обозначим через $G'_1, \ldots, G'_s$ функции из $\mathfrak{C}$, принадлежащие классу $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ $(0 \le s < k)$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество $\{G'_1, \ldots, G'_s, \xi_j(x), \xi_j G_i, \xi_j \alpha G_i, \varphi\alpha G_i\}$, где $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, r$; очевидно, что $\mathfrak{D} \subset \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$.

Покажем, что $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{D}]$. Рассмотрим произвольную функцию $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Если F – одна из функций $G'_1, \ldots, G'_s$, то очевидно, что $F \in \mathfrak{D}$. В противном случае рассмотрим формулу над множеством $\mathfrak{C}$, реализующую функцию F: $F = G(F_1, \ldots, F_m)$, где $G \in \mathfrak{C}$, $F_1, \ldots, F_m \in [\mathfrak{C}]$. В силу соотношения (5) выполняется равенство

$$F = \varphi\alpha G(\xi_1 F_1, \ldots, \xi_r F_1, \ldots, \xi_1 F_m, \ldots, \xi_r F_m).$$

Нетрудно показать, что для любой функции $F \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ и для любого $j = 1, \ldots, r$ выполняется включение $\xi_j F \in [\mathfrak{D}]$ (доказательство проводится индукцией по глубине формулы над $\mathfrak{C}$, выражающей функцию F, с использованием соотношения (4)). Поэтому $\xi_j F_i \in [\mathfrak{D}]$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$. Кроме того, $\varphi\alpha G \in \mathfrak{D}$. Следовательно, $F \in [\mathfrak{D}]$. Таким образом, класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $\varphi(x) = x$. Пусть также существует взаимно-однозначное монотонное отображение $\xi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}_\xi \subseteq P^r$, $r \ge 2$, такое, что обратное отображение $\xi^{-1} : \mathcal{P}_\xi \to \mathcal{Q}$ доопределяется до монотонного отображения $\Xi : \mathcal{P}^r \to \mathcal{Q}$. И пусть класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является конечно порожденным. Тогда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.*

Доказательство. Покажем сначала, что класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_s) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Очевидно, что найдутся такие числа n и p, $n \ge 1$, $0 \le p < r$, что $s = (n-1)r + p$. Будем считать, что $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$, добавив, если нужно, в функцию f несущественные переменные (не более чем $r-p$ переменных). Определим функцию ψ_f следующим образом: для каждого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ положим

$$\psi_f(\widetilde{\sigma}) = f(\xi(\sigma_1), \ldots, \xi(\sigma_n)). \tag{6}$$

Легко видеть, что $\psi_f \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$.

Покажем, что для каждой функции $F(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$ найдется функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$ такая, что $F = \psi_f$. Действительно, рассмотрим функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$. Для каждого набора из $\mathcal{P}^{rn}$ вида

$$(\varrho_1^1,\ldots,\varrho_1^r,\varrho_2^1,\ldots,\varrho_2^r,\ldots,\varrho_n^1,\ldots,\varrho_n^r)$$

положим

$$f(\varrho_1^1,\ldots,\varrho_1^r,\varrho_2^1,\ldots,\varrho_2^r,\ldots,\varrho_n^1,\ldots,\varrho_n^r) = \\ = F(\Xi(\varrho_1^1,\ldots,\varrho_1^r),\Xi(\varrho_2^1,\ldots,\varrho_2^r),\ldots,\Xi(\varrho_n^1,\ldots,\varrho_n^r)). \tag{7}$$

Из монотонности функции F и отображения Ξ следует, что так определенная функция f монотонна. Для этой функции f рассмотрим соответствующую функцию ψ_f. В соответствии с соотношениями (6) и (7) для каждого набора $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ выполняются равенства

$$\psi_f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = f(\xi(\sigma_1),\ldots,\xi(\sigma_n)) = F(\Xi(\xi(\sigma_1)),\ldots,\Xi(\xi(\sigma_n))) = F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n).$$

Таким образом, $F = \psi_f$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Обозначим через $\widehat{f}$ функцию из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(m)$ такую, что $\widehat{f}\,|_{\mathcal{P}^m} = f$ (легко видеть, что для любой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $\widehat{f} \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ с таким свойством; заметим, что функция $\widehat{f}$ определяется неоднозначно).

Пусть для некоторой функции $f(\widetilde{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$ имеет место представление

$$f(\widetilde{x}) = f_0(f_1(\widetilde{x}),\ldots,f_m(\widetilde{x})),$$

где $f_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(m), f_1,\ldots,f_m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$. Покажем, что выполняется равенство

$$\psi_f(y_1,\ldots,y_n) = \widehat{f}_0(\psi_{f_1}(y_1,\ldots,y_n),\ldots,\psi_{f_m}(y_1,\ldots,y_n)). \tag{8}$$

Установим сначала справедливость соотношения

$$\psi_f(y_1,\ldots,y_n) = f_0(\psi_{f_1}(y_1,\ldots,y_n),\ldots,\psi_{f_m}(y_1,\ldots,y_n)). \tag{9}$$

Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \mathcal{Q}^n$. Обозначим через $\widetilde{\varrho} = (\varrho_1^1,\ldots,\varrho_1^r,\ldots,\varrho_n^1,\ldots,\varrho_n^r)$ набор $(\xi(\sigma_1),\ldots,\xi(\sigma_n))$, $\widetilde{\varrho} \in \mathcal{P}^{rn}$. Имеем

$$f_0(\psi_{f_1}(\widetilde{\sigma}),\ldots,\psi_{f_m}(\widetilde{\sigma})) = f_0(f_1(\widetilde{\varrho}),\ldots,f_m(\widetilde{\varrho})) = \\ = f(\widetilde{\varrho}) = f(\xi(\sigma_1),\ldots,\xi(\sigma_n)) = \psi_f(\widetilde{\sigma}).$$

Таким образом, соотношение (9) установлено.

Далее, так как $\psi_{f_1},\ldots,\psi_{f_m} \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, то для любого набора $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ набор $(\psi_{f_1}(\widetilde{\sigma}),\ldots,\psi_{f_m}(\widetilde{\sigma}))$ не содержит элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому равенство (9) останется верным, если функцию $f_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ заменить на функцию $\widehat{f}_0 \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, совпадающую с f_0 на всех наборах из $\mathcal{P}^m$.

Итак, соотношение (8) установлено.

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = [\mathfrak{A}]$, где $\mathfrak{A} = \{g_1,\ldots,g_k\} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество функций $\{\widehat{g}_1,\ldots,\widehat{g}_k,\psi_{g_1},\ldots,\psi_{g_k},\psi_{e_1},\ldots,\psi_{e_r}\}$, где e_i – r-местные селекторные функции в $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, то есть $e_i(x_1,\ldots,x_r) = x_i$, $i = 1,\ldots,r$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Индукцией по глубине формулы над $\mathfrak{A}$, выражающей функцию f, с использованием соотношения (8) нетрудно показать, что выполняется соотношение $\psi_f \in [\mathfrak{B}]$. Далее, как было показано ранее, для любой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ найдется такая функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, что $F = \psi_f$. Поэтому для любой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ выполняется $F \in [\mathfrak{B}]$.

Таким образом, $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{B}]$.

Покажем теперь, что класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Пусть $\sigma \in \mathcal{Q}$ и выполнено равенство $\xi(\sigma) = (\varrho_1^\sigma, \ldots, \varrho_r^\sigma)$, где $(\varrho_1^\sigma, \ldots, \varrho_r^\sigma) \in \in \mathcal{P}_\xi \subseteq \mathcal{P}^r$. Определим r отображений $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$: для каждого $\sigma \in \mathcal{Q}$ положим $\xi_i(\sigma) = \varrho_i^\sigma$, $i = 1, \ldots, r$. Из монотонности отображения ξ следует, что все отображения $\xi_1, \ldots, \xi_r$ монотонны. В силу включения $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ эти отображения можно рассматривать как функции из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(1)$.

Пусть $F(\widetilde{x})$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$. Для каждого $i = 1, \ldots, r$ обозначим через $\xi_i F(\widetilde{x})$ функцию $\xi_i(F(\widetilde{x}))$. Заметим, что $\xi_1 F, \ldots, \xi_r F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$.

Определим функцию $\chi(x_1, \ldots, x_r)$ следующим образом: для каждого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathcal{Q}^r$ положим $\chi(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = \Xi(\varphi(\sigma_1), \ldots, \varphi(\sigma_r))$. Из монотонности отображений φ и Ξ следует, что функция χ монотонна. Кроме того, для любого набора $\widetilde{\varrho} = (\varrho_1, \ldots, \varrho_r) \in \mathcal{P}^r$ выполняется равенство $\chi(\widetilde{\varrho}) = \Xi(\widetilde{\varrho})$.

Покажем, что для произвольной функции $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ выполняется равенство

$$F(\widetilde{x}) = \chi(\xi_1 F(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F(\widetilde{x})). \tag{10}$$

Действительно, легко видеть, что для функции F имеет место представление

$$F(\widetilde{x}) = \Xi(\xi_1 F(\widetilde{x}), \ldots, \xi_r F(\widetilde{x})). \tag{11}$$

Далее, для каждого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{Q}^n$ набор $(\xi_1 F(\widetilde{\sigma}), \ldots, \xi_r F(\widetilde{\sigma}))$ не содержит элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому равенство (11) останется верным, если заменить отображение Ξ на функцию $\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(r)$.

Таким образом, соотношение (10) установлено.

Из соотношения (10) следует, что любая функция $F \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ представляется формулой над множеством $\{\chi\} \cup \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Следовательно, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} = [\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} \cup \{\chi\}]$. Согласно предыдущим рассуждениям, класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Таким образом, класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Summary

O.S. Dudakova. Classes of Functions of the k-valued Logic Monotone with respect to Partially Ordered Sets.

A criterion for the property of being finitely generated is obtained for classes of functions monotone with respect to partially ordered sets of certain type.

Key words: k-valued logic, monotone functions of the k-valued logic, monotone clones, finite basis.

Литература

1. *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. – 1921. – V. 43, No 3. – P. 163–185.
2. *Янов Ю.И., Мучник А.А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
3. *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Z. Math. Logik u. Grundl. Math. – 1978. – Bd. 24. – S. 79–96.

4. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. – 1986. – V. 3. – P. 211–218.

5. *Дудакова О.С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Физматлит, 2008. – Вып. 17. – С. 13–104.

Поступила в редакцию
06.04.09

Дудакова Ольга Сергеевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Франко-русского центра по прикладной математике и информатике им. А.М. Ляпунова МГУ им. М. В. Ломоносова.

E-mail: *olga.dudakova@gmail.com*