УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.172.1

О ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В ПОЛНЫХ q-АРНЫХ ДЕРЕВЬЯХ

А.Б. Дайняк

Аннотация

Получена асимптотика числа независимых множеств в полных q-арных деревьях при фиксированном q.

Ключевые слова: независимое множество, деревья, асимптотические оценки.

Введение

Независимым множеством в простом неориентированном графе называется произвольное множество попарно не смежных вершин графа.

Задача о числе независимых множеств в различных семействах параметрически заданных графов рассматривалась многими авторами. В [1] была получена асимптотика числа независимых множеств в графе булева куба. В [2] и других работах исследовалась задача о числе независимых множеств в плоских прямоугольных решётках, обзор соответствующей литературы можно найти в [3]. Целый ряд работ посвящён оценке числа независимых множеств в деревьях и близких классах графов (см. краткий обзор, приведённый в [4]).

В.П. Ворониным и Е.В. Демаковой в статье [5] была получена асимптотика числа независимых множеств в полных бинарных деревьях. В настоящей работе получено обобщение теоремы Воронина – Демаковой на случай q-арных деревьев при произвольном q (теорема 1). Отметим, что, в отличие от случая $q \in \{2,3,4\}$, вид асимптотики при $q \geqslant 5$ зависит от чётности числа ярусов дерева.

1. Вспомогательные утверждения

Через $\{x_{q,\,k}\}_{k=0}^{\infty}$ будем обозначать последовательность, заданную начальным условием $x_{q,\,0} = 2$ и соотношением $x_{q,\,k+1} = 1 + x_{q,\,k}^{-q}$ при $k \geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть q, t, s – произвольные положительные числа, такие, что $t \in [1,2]$ и $s = 1 + t^{-q}$. Тогда:*

1. *Если $t > 1 + t^{-q}$ и $t > 1 + (1+t^{-q})^{-q}$, то $s < 1 + s^{-q}$ и $s < 1 + (1+s^{-q})^{-q}$;*
2. *Если $t < 1 + t^{-q}$ и $t < 1 + (1+t^{-q})^{-q}$, то $s > 1 + s^{-q}$ и $s > 1 + (1+s^{-q})^{-q}$.*

Доказательство. Докажем первую часть леммы, вторая доказывается аналогично. Имеем

$$t > 1 + t^{-q} \Leftrightarrow t^{-q} < (1+t^{-q})^{-q} \Leftrightarrow 1 + t^{-q} < 1 + (1+t^{-q})^{-q} \Leftrightarrow s < 1 + s^{-q},$$

$$t > 1 + (1+t^{-q})^{-q} \Leftrightarrow 1 + t^{-q} < 1 + (1 + (1+t^{-q})^{-q})^{-q} \Leftrightarrow s < 1 + (1+s^{-q})^{-q}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* q – *произвольная положительная константа. Уравнение* $x = 1 + x^{-q}$ *имеет на отрезке* $[1, 2]$ *единственный действительный корень* ξ_q. *При* $x \in [1, 2]$ *неравенство* $x > 1 + x^{-q}$ $(x < 1 + x^{-q})$ *эквивалентно неравенству* $x > \xi_q$ (*соответственно* $x < \xi_q$).

Доказательство. Утверждение леммы следует из строгого возрастания и непрерывности функции $f(x) = x^{q+1} - x^q - 1$ на отрезке $[1, 2]$ и неравенств $f(1) < < 0 < f(2)$.

Лемма доказана. □

Здесь и далее через ξ_q будем обозначать единственный действительный корень уравнения $x^{q+1} - x^q - 1 = 0$, лежащий на отрезке $[1, 2]$.

Лемма 3. *При любом* $q \geqslant 5$ *существует такое положительное* $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(q)$, *что при любом* $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon < \xi_q - (1 + (\xi_q + \varepsilon)^{-q}) < q\varepsilon, \tag{1}$$

$$\varepsilon < (1 + (\xi_q - \varepsilon)^{-q}) - \xi_q < q\varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $q \geqslant 5$ справедливы неравенства

$$1 < \frac{q}{\xi_q^{q+1}} < q. \tag{3}$$

Неравенство $\dfrac{q}{\xi_q^{q+1}} < q$ очевидно. Докажем неравенство $1 < \dfrac{q}{\xi_q^{q+1}}$. Для этого достаточно показать, что $q^{1/(q+1)} > \xi_q$, что, в свою очередь, в силу леммы 2 равносильно неравенству $q - q^{q/(q+1)} - 1 > 0$. Имеем

$$q - q^{q/(q+1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow (q-1)^{q+1} > q^q \Leftrightarrow (q+1)\ln(q-1) - q\ln q > 0. \tag{4}$$

Функция $f(q) = (q+1)\ln(q-1) - q\ln q$ имеет производную

$$f'(q) = \frac{2}{q-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{q-1}\right),$$

положительную при $g > 1$. Поэтому $f(q)$ возрастает на отрезке $[5, +\infty)$. Отсюда с учётом неравенства $f(5) > 0$ следует, что при всех $q \geqslant 5$ выполнено неравенство $f(q) > 0$. Отсюда и из (4) вытекает (3).

Рассмотрим функцию

$$g(\varepsilon) = \xi_q - (1 + (\xi_q + \varepsilon)^{-q}) = \xi_q^{-q} - (\xi_q + \varepsilon)^{-q}.$$

Имеем $g(0) = 0$ и $g'(0) = \dfrac{q}{\xi^{q+1}}$. Таким образом, в силу (3) получаем $g'(0) \in (1, q)$. Отсюда следует, что при достаточно малых значениях ε выполнено $g(\varepsilon) \in (\varepsilon, q\varepsilon)$, что равносильно (1). Аналогично устанавливается справедливость неравенств (2) при достаточно малых ε.

Лемма доказана. □

Лемма 4. *При* $q \in \{2, 3, 4\}$ *уравнение*

$$x = 1 + (1 + x^{-q})^{-q} \tag{5}$$

имеет на отрезке $[1, 2]$ *единственный действительный корень.*

Доказательство. Уравнение (5) равносильно уравнению $f(x) = 0$, где $f(x) = (x-1)(x^q+1)^q - x^{q^2}$. Единственность корня полинома $f(x)$ на отрезке $[1, 2]$ при $q \in \{2, 3, 4\}$ можно доказать, воспользовавшись, например, известной теоремой Штурма [6, §4.2].

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. *Тогда:*

1. *Последовательность* $\{x_{q,\,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно убывает, а последовательность* $\{x_{q,\,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно возрастает. При этом для каждого* k *выполнены неравенства* $x_{q,\,2k+1} < \xi_q < x_{q,\,2k}$.

2. *При* $q \in \{2, 3, 4\}$ *последовательность* $\{x_{q,\,k}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* ξ_q. *При* $q \geqslant 5$ *последовательность* $\{x_{q,\,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* ζ_q, *а последовательность* $\{x_{q,\,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *сходится к* η_q, *где* η_q *и* ζ_q *суть корни уравнения* $x = 1 + (1 + x^{-q})^{-q}$ *такие, что* $1 < \eta_q < \xi_q < \zeta_q < 2$.

Доказательство. Утверждение п. 1 непосредственно вытекает из лемм 1 и 2 по индукции, базой индукции служат очевидные соотношения $\xi_q < x_{q,\,0}$ и $x_{q,\,2} = 1 + (1 + 2^{-q})^{-q} < 2 = x_{q,\,0}$.

Сходимость последовательностей $\{x_{q,\,2k}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{x_{q,\,2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ к конечным пределам сразу следует из ограниченности и монотонности данных последовательностей. Обозначим через ζ_q и η_q соответственно $\lim\limits_{k\to\infty} x_{q,\,2k}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{q,\,2k+1}$. Очевидно, что η_q и ζ_q являются корнями уравнения (5). Кроме того, из неравенств $x_{q,\,2k+1} < \xi_q < x_{q,\,2k}$, выполненных для любого k, следует, что $\eta_q \leqslant \xi_q \leqslant \zeta_q$. Согласно лемме 4, при $q \in \{2, 3, 4\}$ уравнение (5) имеет на отрезке $[1, 2]$ единственный действительный корень. Этот корень, очевидно, совпадает с ξ_q. Поэтому при $q \in \{2, 3, 4\}$ имеем $\eta_q = \zeta_q = \xi_q$.

Покажем, что при $q \geqslant 5$ выполнены строгие неравенства $\eta_q < \xi_q < \zeta_q$. Предположим, что $\zeta_q = \xi_q$, то есть $x_{q,\,2k} \downarrow \xi_q$ при $k \to \infty$. Пусть $\hat{\varepsilon}$ – константа из формулировки леммы 3. По предположению, найдётся такое k_0, что $x_{q,\,2k_0} - \xi_q < \hat{\varepsilon}/q$. Но тогда, применяя два раза лемму 3, получаем

$$x_{q,\,2k_0} - \xi_q < \xi_q - x_{q,\,2k_0+1} < \hat{\varepsilon}$$

и

$$x_{q,\,2k_0} - \xi_q < \xi_q - x_{q,\,2k_0+1} < x_{q,\,2k_0+2} - \xi_q,$$

что противоречит монотонности последовательности $\{x_{q,\,2k}\}$. Таким образом, $\zeta_q > \xi_q$. Аналогично устанавливается справедливость неравенства $\eta_q < \xi_q$.

Лемма доказана. □

2. Основная теорема

Для $q \geqslant 2$ положим

$$\gamma_q = \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,\,j}\right).$$

Величина γ_q корректно определена в силу сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,j}$, которая непосредственно следует из неравенств $0 \leqslant \ln x_{q,j} \leqslant \ln 2$ при всех j.

Рассмотрим последовательность $i_{q,\,k}$, где $i_{q,\,k}$ – число независимых множеств в q-арном дереве, имеющем k ярусов рёбер, или, что то же самое, диаметр $2k$.

Теорема 1. *При фиксированном q, $q \in \{2, 3, 4\}$, и $k \to \infty$ справедлива асимптотика:*

$$i_{q,\,k} \sim \beta_q \cdot \gamma_q^{q^k},$$

где β_q определяется из таблицы:

q	β_q
2	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}-\frac{1}{2}}$
3	$\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}-\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}}{24}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sqrt{18\left(\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}+\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}\right)}}{\sqrt[3]{12\sqrt{849}+108}-\sqrt[3]{12\sqrt{849}-108}}-1}-1\right)}$
4	$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{100+12\sqrt{69}}}{6}+\frac{\sqrt[3]{100-12\sqrt{69}}}{6}-\frac{1}{3}}$

При фиксированном q, $q \geqslant 5$, и $k \to \infty$ справедлива асимптотика:

$$i_{q,\,2k} \sim \alpha_{q,0} \cdot \gamma_q^{q^{2k}},$$

$$i_{q,\,2k+1} \sim \alpha_{q,1} \cdot \gamma_q^{q^{2k+1}},$$

где константы $\alpha_{q,0}$ и $\alpha_{q,1}$ удовлетворяют неравенству $\alpha_{q,0} > \alpha_{q,1}$ и определяются соотношениями

$$\alpha_{q,0} = \left(1 - \left(\lim_{k\to\infty} x_{q,\,2k}\right)^{-1}\right)^{1/(q^2-1)},$$

$$\alpha_{q,1} = \left(1 - \left(\lim_{k\to\infty} x_{q,\,2k+1}\right)^{-1}\right)^{1/(q^2-1)}.$$

Доказательство. Очевидно, что $i_{q,\,0} = 2$, $i_{q,\,1} = 2^q + 1$. Положив формально $i_{q,\,-1} = 1$, при $k \geqslant 1$ имеем $i_k = i_{q,\,k-1}^q + i_{q,\,k-2}^{q^2}$. Рассмотрим последовательность $\{i_{q,\,k}/i_{q,\,k-1}^q\}_{k=0}^{\infty}$. Поскольку $i_{q,\,0}/i_{q,\,-1}^q = 2$ и при $k \geqslant 1$ выполнены равенства

$$\frac{i_{q,\,k}}{i_{q,\,k-1}^q} = \frac{i_{q,\,k-1}^q + i_{q,\,k-2}^{q^2}}{i_{q,\,k-1}^q} = 1 + \left(\frac{i_{q,\,k-1}}{i_{q,\,k-2}^q}\right)^q,$$

то последовательность $\{i_{q,\,k}/i_{q,\,k-1}^q\}_{k=0}^{\infty}$ совпадает с $\{x_{q,k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Положим $y_{q,\,k} = \ln i_{q,\,k}$. При $k \geqslant 1$ имеем

$$y_{q,\,k} = \ln\left(i_{q,\,k-1}^q + i_{q,\,k-2}^{q^2}\right) = q \ln i_{q,\,k-1} + \ln\left(1 + i_{q,\,k-2}^{q^2}/i_{q,\,k-1}^q\right) =$$
$$= q y_{k-1} + \ln\left(1 + x_{q,\,k-1}^{-q}\right) = q y_{q,\,k-1} + \ln x_{q,\,k}.$$

Отсюда по индукции заключаем, что

$$y_{q,\,k} = q^k y_{q,\,0} + \sum_{j=1}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,\,j} = \sum_{j=0}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,\,j}. \tag{6}$$

Обозначим $r_q(k) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,\,k+j}$. Преобразуем сумму в правой части (6) следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{k} q^{k-j} \ln x_{q,\,j} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{k-j} \ln x_{q,\,j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} q^{k-j} \ln x_{q,\,j} =$$

$$= q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,\,j} - \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,\,k+j} = q^k \ln \gamma_q - r_q(k). \quad (7)$$

Из (6) и (7) имеем, что

$$i_{q,\,k} = \exp\big(q^k \ln \gamma_q - r_q(k)\big) = \gamma_q^{q^k} \cdot e^{-r_q(k)}. \quad (8)$$

При $q \in \{2,3,4\}$ из леммы 5, в силу монотонной сходимости $x_{q,\,k}$, следует, что при $k \to \infty$

$$r_q(k) \to (\ln \xi_q) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} = \frac{\ln \xi_q}{q-1}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) при $q \in \{2,3,4\}$ вытекает асимптотика

$$i_{q,\,k} \sim \gamma_q^{q^k} \cdot (\xi_q^{-1})^{1/(q-1)}.$$

Осталось заметить, что ξ_q – корень уравнения $x = 1 + x^{-q}$, а значит, величина ξ_q^{-1} является корнем уравнения $x^{q+1} + x - 1 = 0$. При $q \in \{2,3,4\}$ последнее уравнение разрешимо в радикалах. Решив его и положив $\beta_q = (\xi_q^{-1})^{1/(q-1)}$, получаем утверждение теоремы для случая $q \leqslant 4$.

Теперь рассмотрим случай $q \geqslant 5$. Имеем

$$r_q(2k) = \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \ln x_{q,\,2k+j} = q \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} \ln x_{q,\,2k+2j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} \ln x_{q,\,2k+2j}.$$

Отсюда и из леммы 5 следует, что при $k \to \infty$

$$r_q(2k) \to (q \ln \eta_q + \ln \zeta_q) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{-2j} = \frac{\ln(\eta_q^q \zeta_q)}{q^2 - 1}. \quad (10)$$

Аналогично доказывается, что при $k \to \infty$

$$r_q(2k+1) \to \frac{\ln(\zeta_q^q \eta_q)}{q^2 - 1}. \quad (11)$$

Из леммы 5 вытекают равенства $\eta_q = 1 + \zeta_q^{-q}$ и $\zeta_q = 1 + \eta_q^{-q}$, из которых следует, что

$$\begin{aligned} (\eta_q^q \zeta_q)^{-1} &= 1 - \zeta_q^{-1}, \\ (\zeta_q^q \eta_q)^{-1} &= 1 - \eta_q^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (8), (10), (11), (12) вытекает утверждение теоремы при $q \geqslant 5$.

Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00444).

Summary

A.B. Dainiak. On the Number of Independent Sets in Perfect q-ary Trees.

Asymptotic representation is obtained for the number of vertex independent sets in perfect q-ary trees for every fixed q.

Key words: independent set, trees, asymptotic bounds.

Литература

1. *Коршунов А.Д., Сапоженко А.А.* О числе двоичных кодов с расстоянием 2 // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1983. – Вып. 40. – С. 111–130.
2. *Calkin N., Wilf H.S.* The number of independent sets in a grid graph // SIAM J. Discr. Math. – 1998. – No 11. – P. 54–60.
3. *Teufl E., Wagner S.* Enumeration problems for classes of self-similar graphs // J. Combinatorial Theory. Ser. A. – 2007. – N 7(114). – P. 1254–1277.
4. *Knopfmacher A., Tichy R.F., Wagner S., Ziegler V.* Graphs, Partitions and Fibonacci Numbers // Discrete Applied Mathematics. – 2007. – N 10(155). – P. 1175–1187.
5. *Воронин В.П., Демакова Е.В.* О числе независимых множеств для некоторых семейств графов // Труды IV Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.). – М.: МАКСПресс. – С. 145–149.
6. *Прасолов В.В.* Многочлены. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.

Поступила в редакцию
18.02.09

Дайняк Александр Борисович – аспирант кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *dainiak@gmail.com*