УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 3 Физико-математические науки *2008*

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ. II. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, Л.У. Султанов

Аннотация

Настоящая статья является второй частью цикла работ «Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел» и содержит изложение теоретических аспектов построения определяющих соотношений для гиперупругих тел. Рассмотрены изотропные материалы и материалы со слабой сжимаемостью.

Ключевые слова: конечные деформации, гиперупругость, потенциал упругой энергии деформаций, физические соотношения.

Введение

В первой части цикла статей [1] были изложены общие вопросы нелинейной механики деформируемых сред, приведены основные положения кинематики конечных деформаций и различные варианты вариационных уравнений. В настоящей части рассмотрены вопросы построения физических соотношений при конечных деформациях. Обозначения полностью соответствуют обозначениям, введенным в статье [1], и используется тот же аппарат прямого тензорного исчисления.

Построению определяющих (физических) соотношений для гиперупругих тел, то есть для таких материалов, которые допускают введение упругого потенциала, имеющего смысл потенциальной энергии деформации, посвящено множество публикаций. Отметим следующие монографии [2–9], в которых приводится обширная библиография по этому вопросу и изложены основные положения построения указанных определяющих соотношений. В настоящей статье в значительной степени приводится этот материал. Из публикаций в периодической литературе можно отметить работы [10–15] в которых излагаются варианты построения физических соотношений для конкретных материалов и приводятся примеры решения задач.

Первый раздел посвящен изложению общих вопросов построения физических соотношений для гиперупругого изотропного материала. Рассматриваются различные случаи определения упругого потенциала как функции либо инвариантов мер деформации Коши – Грина или Фингера, либо главных значений этих тензоров и тензоров искажений. Достаточно подробно излагаются вопросы, связанные с представлением тензоров напряжений в виде разложения по главным значениям.

Во втором разделе приводятся все необходимые выкладки для построения физических соотношений для материалов со слабой сжимаемостью, к которым относятся эластомеры. В этом случае в выражении потенциала упругих деформаций отдельно выделяется слагаемое, определяющее изменение объема, и слагаемое, зависящее от изменения формы. Для этого вводятся модифицированные меры деформации Фингера, которые не зависят от изменения формы.

В третьем разделе излагаются процедуры построения соотношений, связывающих материальные производные от тензоров напряжений и тензоров мер деформаций и искажений. Эти соотношения необходимы для построения численных алгоритмов, используемых в современных методах решения задач с высокой степенью нелинейности (физической и геометрической).

1. Физические соотношения для гиперупругого изотропного тела

Будем считать, что существует функция W, которая определяет значение потенциальной энергии деформации, запасаемой элементарным объемом тела при его деформации. Очевидно, что аргументами этой функции могут быть компоненты любого тензора, описывающего кинематику деформирования. Поскольку предполагается моделирование только изотропной среды, то потенциал упругой энергии W должен быть функцией инвариантов того тензора, который принят базовым для описания деформации. Например,

$$W = W(I_{1C}, I_{2C}, I_{3C}) = W(I_{1B}, I_{2B}, I_{3B}) \tag{1}$$

или

$$W = W(I_{1U}, I_{2U}, I_{3U}) = W(I_{1V}, I_{2V}, I_{3V}).$$

Физические соотношения строятся путем составления уравнения вида

$$\delta W = \frac{1}{2}(S)\cdot\cdot(\delta C),$$

из которого следует базовое соотношение

$$(S) = 2\left(\frac{\partial W}{\partial C}\right). \tag{2}$$

Чтобы воспользоваться полученными соотношениями, учтем, что

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial W}{\partial C}\right) = \frac{\partial W}{\partial I_{1C}}\left(\frac{\partial I_{1C}}{\partial C}\right) + \frac{\partial W}{\partial I_{2C}}\left(\frac{\partial I_{2C}}{\partial C}\right) + \frac{\partial W}{\partial I_{3C}}\left(\frac{\partial I_{3C}}{\partial C}\right), \\ \left(\frac{\partial I_{1C}}{\partial C}\right) = (I)\,, \quad \left(\frac{\partial I_{2C}}{\partial C}\right) = I_{1C}\,(I) - (C)^T\,, \quad \left(\frac{\partial I_{3C}}{\partial C}\right) = I_{3C}\left(C^{-1}\right),\end{gathered} \tag{3}$$

и введем обозначения

$$\frac{\partial W}{\partial I_{iC}} = \frac{\partial W}{\partial I_{iB}} = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{4}$$

В результате после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}(S) &= 2\left\{\psi_1\,(I) + \psi_2\left[I_{1C}\,(I) - (C)\right] + \psi_3 I_{3C}\left(C^{-1}\right)\right\} = \\ &= 2\left[(\psi_1 + \psi_2 I_{1C})\,(I) - \psi_2\,(C) + \psi_3 I_{3C}\left(C^{-1}\right)\right].\end{aligned}$$

Из тождества Гамильтона–Кэли можно выразить

$$I_{3C}\left(C^{-1}\right) = \left(C^2\right) - I_{1C}\,(C) + I_{2C}\,(I) \tag{5}$$

и записать

$$\begin{aligned}(S) &= 2\left[(\psi_1 + \psi_2 I_{1C} + \psi_3 I_{2C})\,(I) - (\psi_2 + \psi_3 I_{1C})\,(C) + \psi_3\left(C^2\right)\right] = \\ &= 2\left[\varphi_1\,(I) + \varphi_2\,(C) + \psi_3\left(C^2\right)\right],\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\varphi_1 = (\psi_1 + \psi_2 I_{1C} + \psi_3 I_{2C})\,, \quad \varphi_2 = -\left(\psi_2 + \psi_3 I_{1C}\right).$$

Если тензоры мер деформаций представить в виде разложения по собственным значениям и направлениям, то из (6) следует соосность тензоров (C) и (S), то есть

$$(S) = \sum_i S_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i), \tag{7}$$

где

$$S_i = 2\left[\varphi_1 + \varphi_2 C_i + \psi_3 C_i^2\right].$$

Для тензора напряжений Коши – Эйлера аналог соотношений (2) имеет вид

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B}\right). \tag{8}$$

Подставляя (1) в (8) с учетом (4), получаем

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left\{\frac{\partial W}{\partial I_{1B}}(I) + \frac{\partial W}{\partial I_{2B}}[I_{1B}(I) - (B)] + \frac{\partial W}{\partial I_{3B}} I_{3B}(B^{-1})\right\} = \\ = \frac{2}{J}\left[\psi_3 I_{3B}(I) + (\psi_1 + \psi_2 I_{1B})(B) - \psi_2(B^2)\right].$$

Отсюда следует соосность меры деформации Фингера (B) и тензора напряжений Коши – Эйлера (Σ), то есть

$$(\Sigma) = \sum_i \sigma_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i),$$

где

$$\sigma_i = \frac{2}{J}\left[\psi_3 I_{3B} + (\psi_1 + \psi_2 I_{1B})B_i - \psi_2 B_i^2\right].$$

Для тензора напряжений Кирхгофа [1] справедливо соотношение

$$(\tau) = \sum_i \tau_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i),$$

где

$$\tau_i = 2\left[\psi_3 I_{3B} + (\psi_1 + \psi_2 I_{1B})B_i - \psi_2 B_i^2\right].$$

Тензор напряжений во вращающейся системе координат (T) [1] будет иметь вид

$$(T) = (R)^T \cdot \sum_i \sigma_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) \cdot (R) = \sum_i \sigma_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i).$$

Тензор напряжений Био [1] может быть представлен в виде

$$(\Xi) = \sum_i S_i U_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i) = \sum_i \Xi_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i).$$

Если потенциал упругих деформаций W задается в виде функций от инвариантов соответствующих мер деформаций, то построение определяющих соотношений сводится к вычислению производных (4).

Часто функцию W записывают в виде функции от главных значений соответствующих мер деформаций. В этом случае определяются главные значения сопряженных тензоров напряжений, что вполне допустимо ввиду соосности этих пар тензоров. Например, если

$$W = W(C_1, C_2, C_3),$$

то
$$S_i = 2\left(\frac{\partial W}{\partial C_i}\right),$$
и далее используется выражение (7).

Если
$$W = W(B_1, B_2, B_3),$$
то
$$\tau_i = 2B_i\left(\frac{\partial W}{\partial B_i}\right).$$

Если
$$W = W(U_1, U_2, U_3) = W(V_1, V_2, V_3), \tag{9}$$
то
$$\Xi_i = U_i S_i = \left(\frac{\partial W}{\partial U_i}\right),$$
откуда
$$S_i = \frac{1}{U_i}\left(\frac{\partial W}{\partial U_i}\right). \tag{10}$$

Отметим справедливость соотношения
$$(\tau) = (F)\cdot(S)\cdot(F)^T = (R)\cdot(U)\cdot(S)\cdot(U)\cdot(R)^T = \\ = (R)\cdot\sum_i U_i^2 S_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i)\cdot(R)^T = \sum_i U_i\frac{\partial W}{\partial U_i}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i),$$
то есть
$$\tau_i = J\sigma_i = U_i\frac{\partial W}{\partial U_i} = V_i\frac{\partial W}{\partial V_i}. \tag{11}$$

2. Малосжимаемый изотропный материал

Для изотропного материала, который характеризуется малой сжимаемостью, а это довольно большая группа так называемых эластомеров (резиноподобных материалов), в определяющих соотношениях выделяют в отдельную группу деформации, вызывающие изменение объема. Для этого вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема, в следующей форме:
$$(\widehat{F}) = J^{-1/3}(F), \quad (\widehat{B}) = J^{-2/3}(B). \tag{12}$$

Действительно, для этих мер третий инвариант равен единице:
$$I_{3\widehat{B}} = J^{-2}I_{3B} = 1, \quad \text{или} \quad \det|\widehat{F}| = 1.$$

Удельную потенциальную энергию деформации можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых зависит только от изменения объема, а второе – от инвариантов введенных модифицированных мер деформаций. Например,
$$W = W_0(J) + W\left(I_{1\widehat{B}}, I_{2\widehat{B}}\right). \tag{13}$$

Отсюда следует, что
$$\delta W = \frac{\partial W_0}{\partial J}\delta J + \frac{\partial W}{\partial I_{1\widehat{B}}}\delta I_{1\widehat{B}} + \frac{\partial W}{\partial I_{2\widehat{B}}}\delta I_{2\widehat{B}},$$

или

$$\delta W = \widehat{\psi}_0 \delta J + \widehat{\psi}_1 \delta I_{1\widehat{B}} + \widehat{\psi}_2 \delta I_{2\widehat{B}},$$

где

$$\widehat{\psi}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial J}, \quad \widehat{\psi}_1 = \frac{\partial W}{\partial I_{1\widehat{B}}}, \quad \widehat{\psi}_2 = \frac{\partial W}{\partial I_{2\widehat{B}}}.$$

Справедливо равенство

$$\delta J = J \nabla_y \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Для вариации инвариантов с учетом (3) получим

$$\delta I_{1\widehat{B}} = \left(\frac{\partial I_{1\widehat{B}}}{\partial \widehat{B}} \right) \cdot \cdot (\delta \widehat{B}) = (I) \cdot \cdot (\delta \widehat{B}),$$

$$\delta I_{2\widehat{B}} = \left(\frac{\partial I_{2\widehat{B}}}{\partial \widehat{B}} \right) \cdot \cdot (\delta \widehat{B}) = \left[I_{1\widehat{B}} (I) - (\widehat{B}) \right] \cdot \cdot (\delta \widehat{B}).$$

Теперь перейдем к вычислению вариаций тензора $(\widehat{B})$:

$$\begin{aligned}
(\delta \widehat{B}) = -\frac{2}{3} J^{-5/3} \delta J (B) + J^{-2/3} (\delta B) = \\
&= -\frac{2}{3} J^{-1} \delta J (\widehat{B}) + J^{-2/3} [(\delta F) \cdot (F)^T + (F) \cdot (\delta F)^T] = \\
&= -\frac{2}{3} (\widehat{B}) \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] + J^{-2/3} \{ [(\delta F) \cdot (F^{-1})] \cdot [(F) \cdot (F)^T] + \\
&\quad + [(F) \cdot (F)^T] \cdot [(F^{-1})^T \cdot (\delta F)^T] \} = \\
&= -\frac{2}{3} (\widehat{B}) \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \cdot (\widehat{B}) + (\widehat{B}) \cdot (\nabla_y \delta \mathbf{R}).
\end{aligned}$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
(I) \cdot \cdot (\delta \widehat{B}) = -\frac{2}{3} I_{1\widehat{B}} \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] + (\widehat{B}) \cdot \cdot \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] = \\
&= 2(\widehat{B}) \cdot \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] - \frac{1}{3} \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] (I) \right\},
\end{aligned}$$

$$(\widehat{B}) \cdot \cdot (\delta \widehat{B}) = 2[(\widehat{B}) \cdot (\widehat{B})] \cdot \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] - \frac{1}{3} \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] (I) \right\}.$$

Отметим, что выражение в фигурных скобках есть девиатор тензора (δd_R), то есть

$$(\delta d'_R) = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] - \frac{1}{3} \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] (I) \right\}.$$

Обозначим теперь

$$(\widehat{G}) = \left[\widehat{\psi}_1 + I_{1\widehat{B}} \widehat{\psi}_2 \right] (\widehat{B}) - \widehat{\psi}_2 (\widehat{B}^2). \tag{14}$$

Таким образом, для вариации удельной энергии деформации получим следующее выражение:

$$\delta W = J \widehat{\psi}_0 \left[\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R} \right] + 2(\widehat{G}) \cdot \cdot (\delta d'_R) = J \widehat{\psi}_0 I_{1\delta d_R} + 2(\widehat{G}\,') \cdot \cdot (\delta d'_R). \tag{15}$$

Полная энергия для текущего состояния будет определяться интегралом

$$\delta U = \int\limits_V \delta W dV. \tag{16}$$

С другой стороны, если ввести в рассмотрение среднее напряжение и девиатор напряжения, то работу внутренних напряжений на виртуальных деформациях в актуальном состоянии (вариации потенциальной энергии деформации) можно записать в виде

$$\delta U = \int\limits_V (\Sigma) \cdot\cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] \right\} dV =$$
$$= \int\limits_V [\sigma_0 [\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R}] + (\Sigma') \cdot\cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla_y \delta \mathbf{R}) + (\nabla_y \delta \mathbf{R})^T \right] - \frac{1}{3} [\nabla_y \cdot \delta \mathbf{R}] \right\}] dV. \quad (17)$$

Сравнивая (15), (16) и (17) имеем, что

$$\sigma_0 = J \widehat{\psi}_0 = J \frac{\partial W_0}{\partial J},$$
$$(\Sigma') = 2(\widehat{G}').$$

В результате получим физические соотношения для тензора истинных напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$(\Sigma) = \widehat{\psi}_0 (I) + 2(\widehat{G}'). \quad (18)$$

Для получения более удобного выражения для вычисления $(\widehat{G}')$в случае квадратичной зависимости (14) проведем следующие преобразования:

$$(B) = \frac{1}{3} I_{1B}(I) + (B'),$$
$$(B^2) = (B) \cdot (B) = \frac{1}{9} I_{1B}^2 (I) + \frac{2}{3} I_{1B} (B') + (B') \cdot\cdot (B'),$$
$$(B^2)' = (B^2) - \frac{1}{3} I_{1B^2}(I) = \frac{1}{9} I_{1B}^2 (I) + \frac{2}{3} I_{1B}(B') + (B') \cdot\cdot (B') - \frac{1}{3} I_{1B^2}(I),$$

$$\frac{1}{9} I_{1B}^2 - \frac{1}{3} I_{1B^2} = \frac{1}{3} \left[I_{1B}^2 - I_{1B^2} \right] - \frac{2}{9} I_{1B}^2 =$$
$$= \frac{2}{3} I_{2B} - \frac{2}{9} I_{1B}^2 = \frac{2}{3} \left[I_{2B} - \frac{1}{3} I_{1B}^2 \right] = \frac{2}{3} I_{2B'}.$$

Окончательно для девиатора тензора (14) получаем выражение

$$(\widehat{G}') = \frac{2}{3} \left[I_{2\widehat{B}} - \frac{1}{3} I_{1\widehat{B}}^2 \right] \widehat{\psi}_2 (I) + \left[\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{3} I_{1\widehat{B}} \widehat{\psi}_2 \right] (\widehat{B}') - \widehat{\psi}_2 (\widehat{B}') \cdot (\widehat{B}'). \quad (19)$$

3. Материальные производные тензоров напряжений

Многие современные методики расчета, основанные на шаговых процедурах (метод последовательных нагружений, метод численного интегрирования по времени и др.) требуют вычисления линеаризированных приращений напряжений, которые вычисляются как материальные производные от напряжений по времени. Рассмотрим примеры их вычисления для рассмотренных выше материалов.

В качестве первого примера рассмотрим дифференциал соотношений (2), связывающих 2-й тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа и меру деформации Коши – Грина. В общем случае справедливо

$$(\dot{S}) = \left(\frac{\partial S}{\partial C} \right) \cdot\cdot (\dot{C}), \quad (20)$$

где $\left(\dfrac{\partial S}{\partial C}\right)$ – тензор 4-го ранга. После некоторых преобразований получим следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right) = 2\left\{(I)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial C}{\partial C}\right) + (C)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial C}\right) + \psi_3\left(\frac{\partial C^2}{\partial C}\right) + (C^2)\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial C}\right)\right\} =$$

$$= 2\left\{\left[(I)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C}\right)\right] + \frac{1}{2}\varphi_2\left[(C_{II}) + (C_{III})\right] + \left[(C)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial C}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[(C^2)\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial C}\right)\right] + \psi_3\left[(C)\cdot(C_{II}) + (C_{II}) * (C)\right]\right\}. \quad (21)$$

Здесь введены тензоры четвертого ранга

$$(C_{II}) = (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j), \quad (C_{III}) = (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i) \quad (22)$$

и операция

$$(C_{II}) * (C) = \left\{\left[(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)\cdot(C)\right](\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)\right\}.$$

Для производных $\left(\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial C}\right)$ – тензоров второго ранга – справедливо выражение

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial C}\right) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{1C}}(I) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{2C}}\left[I_{1C}(I) - (C)\right] + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{3C}} I_{3C}\left(C^{-1}\right) =$$

$$= \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{1C}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{2C}} I_{1C} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{3C}} I_{2C}\right](I) - \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{2C}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{3C}} I_{1C}\right](C) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial I_{3C}}\left(C^2\right)$$

и аналогичное выражение справедливо для $\left(\dfrac{\partial \psi_3}{\partial C}\right)$. Здесь используется тождество Гамильтона – Кэли (5).

В общем случае вместо (20) можно записать

$$(\dot{S}) = 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial C^2}\right)\cdot\cdot(\dot{C}), \quad (23)$$

где $\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial C^2}\right)$ – тензор четвертого ранга.

Для тензора напряжений Кирхгофа [1] с учетом (8) получим

$$(\dot{\tau}) = 2\left(\dot{B}\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) + 2(B)\cdot\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right)\cdot\cdot\left(\dot{B}\right)\right] =$$

$$= 2\left\{\left(\dot{B}\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) + \left[(B)\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right)\right]\cdot\cdot\left(\dot{B}\right)\right\}. \quad (24)$$

Для напряжений Коши – Эйлера соотношение будет сложнее:

$$\left(\dot{\Sigma}\right) = 2\left\{\frac{1}{J}\left(\dot{B}\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{J}\left[(B)\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right)\right]\cdot\cdot\left(\dot{B}\right) - \frac{1}{J}(B)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) I_{1h}\right\}. \quad (25)$$

Эти выражения можно привести к стандартному виду, если ввести два тензора четвертого ранга

$$(G) = 2\left[(C_{III}) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B}\right)\right], \qquad (H) = 2\left[(B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right)\right].$$

Тогда (24) запишется в виде

$$(\dot{\tau}) = (\dot{B}) \cdot\cdot (G) + (H) \cdot\cdot (\dot{B}), \tag{26}$$

а (25) преобразуется в виду

$$(\dot{\Sigma}) = \frac{1}{J}(\dot{B}) \cdot\cdot (G) + \frac{1}{J}(H) \cdot\cdot (\dot{B}) - (\Sigma) I_{1h}. \tag{27}$$

Если в качестве базовой кинематической меры принимается пространственный градиент скорости (или его симметричная часть – тензор деформации скорости), то соотношение (20) следует принять в виде

$$(\dot{S}) = \left(\frac{\partial S}{\partial C}\right) \cdot\cdot (\dot{C}) = 2\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right) \cdot\cdot \left[(F)^T \cdot (d) \cdot (F)\right] = 2\left[(F) \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial C}\right) \cdot (F)^T\right] \cdot\cdot (d).$$

Аналогично для $(\dot{\Sigma})$ получим

$$(\dot{\Sigma}) = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B}\right) \cdot\cdot (\dot{B}) = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B}\right) \cdot\cdot \left[(h) \cdot (B) + (B) \cdot (h)^T\right] =$$
$$= \left[(B) \cdot \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B}\right)\right] \cdot\cdot (h) + \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B}\right) \cdot (B)\right] \cdot\cdot (h)^T.$$

При выводе этих соотношений использовались результаты работы [1].

Подобным образом можно преобразовать выражения (26) и (27).

Теперь рассмотрим структуру производных $(\dot{\Sigma})$, $(\dot{\tau})$, $(\dot{S})$ при задании потенциала упругих деформаций в виде (9), то есть случай, когда аргументами этого потенциала являются относительные удлинения $V_i = U_i$.

Вычисление производной тензора (S) в виде разложения по главным направлениям (7) приводит к выражению

$$(\dot{S}) = (S^{\diamond}) + (\Omega_U) \cdot (S) - (S) \cdot (\Omega_U),$$

где учитываются результаты работы [1]. В частности,

$$(S^{\diamond}) = \sum_i \dot{S}_i (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i).$$

С учетом (10) получим

$$\dot{S}_i = \sum_k \frac{\partial S_i}{\partial U_k} \dot{U}_k = \sum_k \left[\frac{1}{U_i} \frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_k} - \delta_{ik} \frac{1}{U_i^2} \frac{\partial W}{\partial U_i}\right] \dot{U}_k.$$

По аналогии для тензора напряжений Кирхгофа получим, что

$$(\dot{\tau}) = (\tau^{\nabla}) + (\Omega_V) \cdot (\tau) - (\tau) \cdot (\Omega_V),$$

где

$$(\tau^{\nabla}) = \sum_i \dot{\tau}_i (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i).$$

В силу (11) имеем

$$\dot{\tau}_i = \sum_k \frac{\partial \tau_i}{\partial V_k} \dot{V}_k = \sum_k \left[V_i \frac{\partial^2 W}{\partial V_i \partial V_k} + \delta_{ik} \frac{\partial W}{\partial V_i} \right] \dot{V}_k.$$

Для тензора истинных напряжений (Σ) в общем случае справедливо равенство

$$(\dot{\Sigma}) = \frac{1}{J}(\dot{\tau}) - (\Sigma) I_{1h}.$$

Теперь рассмотрим технологию построения линеаризованного выражения для скорости истинных напряжений для малосжимаемых эластомеров с использованием модифицированных мер деформаций Фингера (12). В этом случае потенциал упругих деформаций представляется в виде двух слагаемых, первое из которых характеризует изменении объема, а второе – изменение формы (13). Физические соотношения для тензора напряжений Коши – Эйлера получаются в виде (18). Составим выражение для материальной производной. Из (18) следует, что

$$(\dot{\Sigma}) = \dot{\hat{\psi}}_0(I) + 2(\dot{\widehat{G}}\,').$$

Для первого слагаемого имеем

$$\dot{\hat{\psi}}_0 = \dot{\sigma}_0 = \frac{\partial \sigma_0}{\partial J} \dot{J} = \frac{\partial^2 W_0}{\partial J^2} J I_{1d}.$$

Второе слагаемое структурно имеет вид

$$(\dot{\widehat{G}}\,') = \left(\frac{\partial \widehat{G}\,'}{\partial \widehat{B}\,'} \right) \cdot\cdot (\dot{\widehat{B}}\,'). \tag{28}$$

Тензор четвертого ранга $\left(\frac{\partial \widehat{G}\,'}{\partial \widehat{B}\,'} \right)$ определяется аналогично тому, как определялся тензор $\left(\frac{\partial S}{\partial C} \right)$ (21), так как тензор (S) квадратично зависит от (C) (6), то его девиатор тоже зависит квадратично от $(\widehat{B}\,')$ (19). Поэтому структурно тензор $\left(\frac{\partial \widehat{G}\,'}{\partial \widehat{B}\,'} \right)$ будет иметь вид типа (21).

Выпишем соотношение для $(\dot{\widehat{B}}\,')$:

$$(\dot{\widehat{B}}\,') = \frac{d}{dt} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \left[(B) - \frac{1}{3}(I) I_{1d} \right] \right\} = -\frac{2}{3} J^{-1} (\widehat{B}\,') \dot{J} + J^{-\frac{2}{3}} \left\{ (\dot{B}) - \frac{1}{3}(I) \left[(I) \cdot\cdot (\dot{B}) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{2}{3}(\widehat{B}\,') I_{1d} + (h) \cdot (\widehat{B}) + (\widehat{B}) \cdot (h)^T - \frac{1}{3}(I) \left[(h) \cdot\cdot (\widehat{B}) + (\widehat{B}) \cdot\cdot (h)^T \right].$$

Здесь использовались соотношения работы [1] и формула

$$\frac{\dot{J}}{J} = I_{1d} = \mathrm{tr}(d) = \frac{\partial v_m}{\partial y_m} = \nabla_y \cdot \mathbf{v} = \mathrm{div}\, \mathbf{v}.$$

Альтернативным выражению (28) может быть формула

$$(\dot{\widehat{G}}\,') = \left(\frac{\partial \widehat{G}\,'}{\partial \widehat{B}} \right) \cdot\cdot (\dot{\widehat{B}}).$$

Отсюда получаем:

$$(\dot{\Sigma}) = (I)\frac{\partial^2 W_0}{\partial J^2} J I_{1d} + 2\left(\frac{\partial \widehat{G}'}{\partial \widehat{B}}\right) \cdot\cdot \left[-\frac{2}{3}(\widehat{B}) I_{1d} + (h)\cdot(\widehat{B}) + (\widehat{B})\cdot(h)^T\right].$$

В этом случае материальная производная тензора напряжений Коши – Эйлера уже не представляется в виде шаровой и девиаторной части.

Заключение

Приведенные соотношения имеют общий характер и справедливы для любого гиперупругого изотропного материала. Отметим, что все полученные соотношения связывают между собой сопряженные пары тензоров, которые описаны в работе [1]. Для получения физических соотношений для конкретного материала необходимо иметь явное выражение потенциала упругих деформаций как функций от тех или иных аргументов. Далее процедура их (определяющих соотношений) построения сводится к алгебраическим операциям в соответствии с приведенными выше выражениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00546а).

Summary

A.I. Golovanov, Y.G. Konoplev, L.U. Sultanov. Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. II. Stress-strain relationships.

The current article is the second part of a research work cycle “Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids”. The article presents theoretical aspects of forming stress-strain relationships for hyperelastic solids. Isotropic and nearly incompressible materials are considered.

Key words: large deformations, hyperelasticity, strain energy potential, stress-strain relationships.

Литература

1. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29–37.
2. *Грин А., Адкинс Д.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
3. *Гузъ А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища шк., 1986. – 511 с.
4. *Елисеев В.В.* Механика упругих тел. – СПб.: СПбГТУ, 1999. – 341 с.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
7. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

9. *Черных К.Ф.*Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

10. *Чернышов А.Д.* Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // Изв. АН. МТТ. – 1993. – № 1. – С. 75–81.

11. *Simo J.S., Pister K.S.* Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1984. – V. 46, No 2. – P. 201–215.

12. *Simo J.S., Ortiz M.* A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 49, No 2. – P. 221–245.

13. *Кузнецова В.Г., Роговой А.А.* Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 64–76.

14. *Конюхов А.В, Коноплев Ю.Г.* Модель термогиперупругости и ее применение к исследованию потери устойчивости раздуваемых пластин. Часть 1. // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2006. – № 3. – С. 12–16.

15. *Панов А.Д.* Теория определяющих соотношений при деформировании изотропного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 6. – С. 27–44.

Поступила в редакцию
25.01.08

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexandr.Golovanov@ksu.ru*

Коноплев Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского государственного университета.

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*