УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.987

О ПОНЯТИИ НОСИТЕЛЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Г.Д. Луговая

Аннотация

Вводится и обсуждается понятие носителя ортогонального векторного поля на алгебре фон Неймана. Показано, что каждое ультраслабо-слабо непрерывное ортогональное векторное поле обладает носителем.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, ортогональное векторное поле, носитель.

В данной заметке вводится и обсуждается понятие носителя ортогонального векторного поля. Ранее [1] это понятие вводилось для ультраслабо-слабо непрерывных полей. Полезность понятия носителя определяется, в частности, тем обстоятельством, что на редуцированной на носитель алгебре фон Неймана ортогональное векторное поле обладает свойством нормальности (см. ниже).

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H; $\mathcal{M}^{pr}$, $\mathcal{M}^{+}$ – множества ортопроекторов и положительных операторов из $\mathcal{M}$ соответственно; K – гильбертово пространство; θ – нулевой вектор K. Ограниченное линейное отображение $F : \mathcal{M} \to K$, обладающие свойством

$$pq = 0 \ (p, q \in \mathcal{M}^{pr}) \Rightarrow \langle F(p), F(q)\rangle = 0,$$

называется *ортогональным векторным полем.* Ортогональное векторное поле F будем называть σw*–*w*-непрерывным*, если оно непрерывно в ультраслабой топологии алгебры $\mathcal{M}$ и слабой топологии гильбертова пространства K. (Отметим, что из σw–w-непрерывности поля F следует его ограниченность.) Ортогональное векторное поле F называется *нормальным* (см. [2], определение 2), если

$$x_\alpha \nearrow x \ (x_\alpha, x \in \mathcal{M}^{+}) \Rightarrow F(x_\alpha) \nearrow F(x)$$

в смысле порядка, задаваемого в K конусом $C = F(\mathcal{M}^{+})$.

Для $p \in \mathcal{M}^{pr}$ рассмотрим редуцированную алгебру фон Неймана $\mathcal{M}_p \equiv \equiv \{px|pH : x \in \mathcal{M}\}$ и для ортогонального векторного поля $F : \mathcal{M} \to K$ определим отображение $F_p : \mathcal{M}_p \to K$ равенством

$$F_p(px|pH) = F(pxp) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Как нетрудно видеть, F_p – ортогональное векторное поле, причём F_p является σw–w-непрерывным, если σw–w-непрерывно F.

Определение 1. Если $F : \mathcal{M} \to K$ – ортогональное векторное поле и множество $\{p \in \mathcal{M}^{pr} : F(p) = \theta\}$ обладает наибольшим элементом p_0, то проектор $1 - p_0$ называется *носителем* поля F.

Теорема 1. *Если $1-p_0$ – носитель ортогонального векторного поля $F:\mathcal{M}\to$ $\to K$, то ортогональное векторное поле F_{1-p_0} точно на $\mathcal{M}_{1-p_0}$.*

Доказательство. Пусть $(1-p_0)x|(1-p_0)H\in {\mathcal{M}^+}_{1-p_0}$ (можно считать, очевидно, что $x\in\mathcal{M}^+$) и $F_{1-p_0}((1-p_0)x|(1-p_0)H)=F((1-p_0)x(1-p_0))=\theta$. Покажем, что $(1-p_0)x|(1-p_0)H=0$. Запишем спектральное представление оператора $y=(1-p_0)x(1-p_0)$: $y=\int\limits_0^{\|y\|}\lambda p^y(d\lambda)$. Тогда

$$y=\lim_n\sum_{k=0}^{m_n}\lambda_k^n p^y(\Delta_k^n),$$

где (Δ_k^n) – последовательность разложений отрезка $[0,\|y\|]$, определяемых узлами $0=\lambda_0^n<\lambda_1^n<\dots\lambda_{m_n}^n=\|y\|$, λ_k^n – левые концы соответствующих отрезков разложения, $\max\limits_k(\lambda_k^n-\lambda_{k-1}^n)\to 0$ $(n\to\infty)$. Так как $p^y(\Delta_k^n)\le\dfrac{1}{\lambda_k^n}y$ $(k=1,\dots,m_n)$, имеем $F(p^y(\Delta_k^n))=0$ при $k\ge 1$. Таким образом, $p^y(\Delta_k^n)\le p_0$, а значит, $p^y(\Delta_k^n)=$ $=0$. Следовательно, $y=\lim\limits_n\sum\limits_{k=0}^{2^n}\lambda_k^n p^y(\Delta_k^n)=0$. □

Из предложения 3 [2] и теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Если $1-p_0$ – носитель ортогонального векторного поля F, то поле F_{1-p_0} нормально.*

Справедлива

Теорема 2. *Всякое σw–w-непрерывное ортогональное векторное поле обладает носителем.*

Доказательство. Пусть ортогональное векторное поле $F:\mathcal{M}\to K$ σw–w-непрерывно и $p_0=\sup\{p\in\mathcal{M}^{pr}: F(p)=\theta\}$. Покажем сначала, что $F(p)=$ $=F(q)=0$ влечет $F(p\vee q)=0$. Известно (см., например, [3], гл. 5, § 2, п. 9), что

$$\left(\frac{1}{n}+p+q\right)^{-1}(p+q)\nearrow p\vee q.$$

Тогда, с учетом неравенства

$$\left(\frac{1}{n}+p+q\right)^{-1}(p+q)\le n(p+q),$$

получим

$$F\left(\left(\frac{1}{n}+p+q\right)^{-1}(p+q)\right)=0.$$

В силу σw–w-непрерывности F имеем, что

$$F\left(\left(\frac{1}{n}+p+q\right)^{-1}(p+q)\right)\xrightarrow{w}F(p\vee q)$$

и, следовательно, $F(p\vee q)=0$.

Рассмотрим теперь сеть ортопроекторов $p_\sigma = \bigvee\limits_{k\in\sigma} p_k$, где σ – конечные подмножества множества $\{p \in \mathcal{M}^{pr} : F(p) = \theta\}$. Мы только что установили, что $F(p_\sigma) = 0$. Поскольку $p_\sigma \nearrow p_0$, то $p_\sigma \xrightarrow{\sigma-w} p_0$, а значит, $F(p_\sigma) \xrightarrow{w} F(p_0)$, откуда $F(p_0) = \theta$. □

Лемма 1. *Если $F : \mathcal{M} \to K$ – ортогональное векторное поле, то $J \equiv \{x \in \mathcal{M} : F(x^*x) = \theta\}$ – левый идеал в $\mathcal{M}$, причем $J^+ = F^{-1}\{\theta\} \cap \mathcal{M}^+$.*

Доказательство. Очевидно, $x \in J \Rightarrow \lambda x \in J$. Импликация $x, y \in J \Rightarrow x + y \in J$ следует из неравенства $(x + y)^*(x + y) \leq 2(xx^* + y^*y)$. Пусть, далее, $x \in J$, и $y \in \mathcal{M}$– произволен. Тогда $(yx)^*(yx) = x^*y^*yx \leq \|y\|^2x^*x$, что влечет $F((yx)^*yx) = \theta$ и, следовательно, $yx \in J$.

Докажем вторую часть утверждения. Если $x \in F^{-1}\{\theta\} \cap \mathcal{M}^+$, то $F(x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}) = \theta$ влечёт $x^{\frac{1}{2}} \in J^+$, так что $x \in J^+$. Таким образом, $F^{-1}\{\theta\} \cap \mathcal{M}^+ \subset J^+$. Для доказательства обратного включения достаточно доказать, что $F(x^2) = \theta$ влечет $F(x) = \theta$.

Используя обозначения и соглашения, принятые при доказательстве теоремы 1, запишем спектральное представление оператора

$$x = \int\limits_0^{\|x\|} \lambda p^x(d\lambda) = \lim_n \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k^n p^x(\Delta_k^n).$$

Тогда

$$x^2 = \int\limits_0^{\|x\|} \lambda^2 p^x(d\lambda) = \sum_{k=0}^{m_n} \int\limits_{\Delta_k^n} \lambda^2 p^x(d\lambda) \geq \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n)^2 p^x(\Delta_k^n),$$

и $F(x^2) = \theta$ влечет $F(p^x(\Delta_k^n)) = \theta$ $(k = 1, 2, ...)$. С учетом ограниченности F получаем

$$F(x) = \lim_n F(\sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k^n p^x(\Delta_k^n)) = \lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n F(p^x(\Delta_k^n)) = \theta.$$

□

Следствие 2. *Если ортогональное векторное поле F является σw–w-непрерывным, то конус J^+ ультраслабо замкнут.*

Теорема 3. *Если $F : \mathcal{M} \to K$ – ортогональное векторное поле, обладающее носителем $1 - p_0$, то $J = \mathcal{M}p_0$. В этом случае идеал J ультраслабо замкнут.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{M}p_0 \subset J$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in J$. Тогда $F(|x|) = \theta$. Снова используя спектральное представление оператора $|x|$ (в обозначениях доказательства теоремы 1), имеем

$$|x| = \lim_n \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k^n p^{|x|}(\Delta_k^n),$$

а значит $p^{|x|}(\Delta_k^n) \leq p_0$ $(k = 1, \ldots, m_n)$. Отсюда следует, что $|x| \leq \|x\|p_0$, поэтому, $|x| = |x|p_0$. Наконец, используя полярное представление оператора x, имеем $x = u|x| = u|x|p_0 \in \mathcal{M}p_0$, что и требовалось доказать. □

Сравним введенное понятие носителя σw–w-непрерывного ортогонального векторного поля с соответствующим понятием для нормального функционала на алгебре фон Неймана. Напомним, что, если ϕ – нормальный функционал на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, а $1-p_0$ – его носитель, то $\phi(x)=\phi(x(1-p_0))\,(x\in\mathcal{M})$, так как $\phi(xp_0)=0$. Для σw–w-непрерывного ортогонального векторного поля F имеем, что

$$F(|xp_0|^2)=F((xp_0)^*xp_0)=\theta,$$

откуда $F(|xp_0|)=\theta$, однако отсюда не следует, что $F(xp_0)=\theta$. Как показывает следующий пример, для σw-w-непрерывного ортогонального векторного поля F из равенства $F(|x|)=\theta$, вообще говоря, не следует, что $F(x)=\theta$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{C}_2(H)$ – гильбертово пространство операторов Гильберта-Шмидта со скалярным произведением $\langle x,y\rangle\equiv \mathrm{Tr}(y^*x)$ $(x,y\in\mathcal{C}_2(H))$, где Tr – канонический след. Отображение $F:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{C}_2(H)$ зададим равенством $F(x)=\langle\cdot,x^*h\rangle h$, где $h\in H\,(\|h\|=1)$ – фиксированный вектор. Пусть теперь $g\in H\,(\|g\|=1)$ ортогонален h, и u – частичная изометрия такая, что $u^*u=\langle\cdot,g\rangle g$, $uu^*=\langle\cdot,h\rangle h$. Проверим, что F – σw–w-непрерывное ортогональное векторное поле. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис (f_i) в H. Так как $F(x)^*=\langle\cdot,h\rangle x^*h$, то для $p,q\in\mathcal{B}(H)^{pr}$ таких, что $pq=0$, имеем:

$$\langle F(p),F(q)\rangle=\mathrm{Tr}(F(q)^*F(p))=\sum_i\langle F(q)^*F(p)f_i,f_i\rangle=$$
$$=\sum_i\overline{\langle ph,f_i\rangle}\langle qh,f_i\rangle=\langle ph,qh\rangle=0.$$

Пусть теперь $x_\alpha\xrightarrow{\sigma-w}x$ $(x_\alpha,x\in\mathcal{B}(H))$. Тогда

$$\langle F(x_\alpha)f,g\rangle=\langle x_\alpha f,h\rangle\langle h,g\rangle\to\langle xf,h\rangle\langle h,g\rangle=\langle F(x)f,g\rangle\quad\forall f,g\in H,$$

так что $F(x_\alpha)\xrightarrow{w}F(x)$, и F – σw–w-непрерывно. Итак, F – σw–w-непрерывное ортогональное векторное поле. При этом

$$F(|u|)=F(u^*u)^{\frac12})=F(\langle\cdot,g\rangle g)=0,\quad \text{но } F(u)=\langle\cdot,u^*h\rangle h=\langle\cdot,g\rangle h\neq 0$$

для определённого выше оператора u.

Замечание 1. Отметим в качестве иллюстрации характерные случаи, когда

$$F(|x|)=\theta\ \Rightarrow F(x)=\theta. \tag{1}$$

(i) Для произвольного ортогонального векторного поля $F:\mathcal{M}\to K$ указанное свойство имеет место для произвольного самосопряжённого оператора $x\in\mathcal{M}$. Это немедленно следует из представления $x=x^+-x^-$ $(x^\pm\in\mathcal{M}^+)$ и неравенств $x^\pm\le|x|$.

(ii) Свойство (1) выполнено в случае произвольного ортогонального векторного поля $F:\mathcal{M}\to K$ для коммутативной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Пусть $F(|x|)=$ $=\theta$. Из представления $x=x_1+ix_2$ $(x_k=x_k^*\in\mathcal{M}$ $(k=1,2))$ и неравенств $|x_k|\le|x|$ следует, что $F(|x_k|)=\theta$ $(k=1,2)$. С учётом (i) отсюда получаем: $F(x_k)=\theta$ $(k=1,2)$, а значит $F(x)=\theta$.

(iii) Пусть $f\in H$ – фиксированный вектор и $F:\mathcal{M}\to H$ – ортогональное векторное поле, заданное равенством $F(x)\equiv xf$ $(x\in\mathcal{M})$. Свойство (1) в этом случае выполнено в силу теоремы о полярном представлении оператора x.

Summary

G.D. Lugovaya. On the Notion of Support of Orthogonal Vector Field.

The notion of support of the orthogonal vector field is presented and discussed on von Neumann algebra. It is shown that every ultraweakly-weakly continuous orthogonal vector field has support.

Key words: von Neumann algebra, orthogonal vector field, support.

Литература

1. *Луговая Г.Д.* О понятии носителя ортогонального векторного поля // Математика. Образование. Экономика. Экология. Тез. докл. IX межд. конф. – Чебоксары, 2001. – С. 49.
2. *Lugovaya G.D., Sherstnev A.N.* Order properties of orthogonal vector fields and a representation theorem // Russian J. Math. Phys. – 2001. – V. 8, No 2. – P. 172–179.
3. *Луговая Г.Д., Шерстнев А.Н.* Функциональный анализ. Специальные курсы. – М.: УРСС, 2007. – 256 с.

Поступила в редакцию
17.01.08

Луговая Галина Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Казанского государственного университета.

E-mail: *glugovaya@inbox.ru*