УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ. I. КИНЕМАТИКА И ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, Л.У. Султанов

Аннотация

Настоящая работа открывает цикл статей, посвященных построению вычислительного алгоритма исследования конечных деформаций гиперупругих тел. В первой части цикла работ рассматриваются общие вопросы нелинейной механики деформируемых сред, приводятся основные положения кинематики конечных деформаций. Изложены основные виды вариационных уравнений и тензоры напряжений, используемые для решения нелинейных задач механики.

Ключевые слова: конечные деформации, гиперупругость, тензор градиента деформаций, меры деформаций, тензор напряжений, вариационные уравнения.

Введение

Гиперупругие материалы являются важными элементами в конструкциях многих инженерных изделий и широко применяются на практике. Это обусловлено тем, что они допускают большие деформации (до 1000 %), сохраняя при этом упругие свойства. Исследованию их свойств и разработке различных методов расчета реальных конструкций посвящена обширная литература (здесь можно отметь известные монографии [1, 2]). С точки зрения механики твердого деформируемого тела речь идет о нелинейно упругих средах, при деформировании которых необходимо учитывать геометрическую нелинейность в рамках конечных деформаций. Подобного рода проблемы рассматриваются в большом числе статей и обобщены в ряде монографий, например [1–8]. В настоящей статье рассматриваются общие вопросы нелинейной механики деформируемых сред. Изложение ведется в безындексной форме, а именно в виде так называемого прямого тензорного исчисления. В этом случае тензор представляется в виде суммы диад базисных векторов. Подобная форма является наиболее компактной. Такого стиля изложения придерживаются авторы монографий [2–5], где можно найти подробное описание технологии работы с использованием такого тензорного исчисления. В первом разделе приведены основные положения кинематики конечных деформаций и произвольных течений сплошных сред. Определены основные тензоры, используемые для описания движения сплошных сред, выписаны соотношения, связывающие эти величины и их материальные производные между собой. Значительное внимание уделено представлению введенных тензоров в виде разложения по главным значениям и главным направлениям. Кратко описывается семейство объективных тензоров, состоящих из инвариантных и индифферентных тензоров. Вывод большинства соотношений опущен, так как его можно найти в приведенных в списке литературы монографиях. Второй раздел посвящен изложению основных видов вариационных уравнений, используемых в качестве разрешающих уравнений в современных численных методах. Первая группа уравнений основана на принципе виртуальных перемещений. Выписаны варианты вариационного уравнения этого типа, в которых в качестве базовой используется либо исходная конфигурация, либо деформированное состояние. Вторая группа разрешающих уравнений основана на принципе виртуальных скоростей (виртуальных мощностей). Приведены также уравнения для исходной и деформированной конфигураций. Выписаны соотношения для различных тензоров напряжений, используемых при реализации той или иной стратегии решения задач, и приведены соотношения, связывающие их между собой. В заключение кратко описываются свойства введенных тензоров напряжений с точки зрения их объективности. Тут же определены сопряженные пары тензоров, описывающих кинематику, с тензорами, описывающими напряженное состояние.

1. Кинематика конечных деформаций

В глобальной неподвижной системе координат с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ рассмотрим положения исследуемого деформируемого тела, реализующиеся в момент времени t_0 и t. Будем считать, что в начальный момент оно занимает объем V_0 и имеет плотность ρ_0, это положение будем называть исходным или недеформированным состоянием. В текущий момент времени t его объем обозначим через V, а плотность – через ρ и будем его называть актуальным или деформированным состоянием.

Пусть $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ – радиус-вектор произвольной материальной точки в недеформированном состоянии; $\mathbf{R} = y_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i$ – радиус-вектор той же точки в деформированном состоянии; $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = u_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i$ – вектор перемещений; вектор скорости v может быть определен как $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{R}} = v_i(x_1, x_2, x_3, t)\mathbf{e}_i$ либо $\mathbf{v} = v_i(y_1, y_2, y_3, t)\mathbf{e}_i$. Введем операторы Гамильтона относительно исходной геометрии $\nabla_x = \mathbf{e}_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ и актуального состояния $\nabla_y = \mathbf{e}_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}$.

Базовым тензором, играющим ключевую роль в кинематике конечных деформаций, является тензор градиента деформации

$$(\nabla_x \mathbf{R})^T = (\mathbf{R}\nabla_x) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = (F).$$

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются:

- мера деформации Коши – Грина (правый тензор Коши – Грина)

$$(C) = (F)^T \cdot (F) = \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = C_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j); \tag{1}$$

- мера деформации Фингера (левый тензор Коши – Грина)

$$(B) = (F) \cdot (F)^T = \frac{\partial y_i}{\partial x_m}\frac{\partial y_j}{\partial x_m}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = B_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j); \tag{2}$$

- правый тензор искажения (U) и левый тензор искажения (V), которые появляются при полярном разложении градиента деформации

$$(F) = (R) \cdot (U) = (V) \cdot (R), \tag{3}$$

где (R) – ортогональный тензор;

- тензор деформаций Коши – Грина

$$(E) = \frac{1}{2}\left[(C) - (I)\right] = \frac{1}{2}\left[(F)^T \cdot (F) - (I)\right] = E_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \tag{4}$$

где компоненты E_{ij} имеют вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right);$$

- пространственный градиент скорости

$$(h) = (\nabla_y \dot{\mathbf{R}})^T = \frac{\partial v_i}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1}); \tag{5}$$

- тензор деформации скорости

$$(d) = \frac{1}{2}[(h) + (h)^T] = \frac{1}{2}[(\dot{F}) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot (\dot{F})^T] = d_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j), \tag{6}$$

где компоненты d_{ij} имеют вид

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right);$$

- пространственная мера скорости искажения

$$(l) = \frac{1}{2}[(\dot{U}) \cdot (U^{-1}) + (U^{-1}) \cdot (\dot{U})]. \tag{7}$$

Эти тензоры связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
(C) = (U) \cdot (R)^T (R) \cdot (U) = (U)^2, \\
(B) = (V) \cdot (R) \cdot (R)^T \cdot (V) = (V)^2, \\
(B) = (F) \cdot (F)^T = (R) \cdot (U) \cdot (U) \cdot (R)^T = (R) \cdot (C) \cdot (R)^T,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
(d) = \frac{1}{2}&[(F^{-1})^T \cdot (F)^T \cdot (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot (\dot{F})^T \cdot (F) \cdot (F^{-1})] = \\
&= \frac{1}{2}(F^{-1})^T \cdot [(F)^T \cdot (\dot{F}) + (\dot{F})^T \cdot (F)] \cdot (F^{-1}) = \frac{1}{2}(F^{-1})^T \cdot (\dot{C}) \cdot (F^{-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{B}) = (\dot{F}) \cdot (F)^T + (F) \cdot (\dot{F})^T &= \\
= (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) \cdot (F) \cdot (F)^T + (F) \cdot (F)^T \cdot (F^{-1})^T \cdot (\dot{F})^T &= \\
= (h) \cdot (B) + (B) \cdot (h)^T&,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
(h) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) = (\dot{R}) \cdot (U) \cdot (U^{-1}) \cdot (R)^T + \\
+ (R) \cdot (\dot{U}) \cdot (U^{-1}) \cdot (R)^T = (\Omega) + (R) \cdot (\dot{U}) \cdot (U^{-1}) \cdot (R)^T, \\
(d) = (R) \cdot (l) \cdot (R)^T,
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{C}) = 2(\dot{E}) = 2(F)^T \cdot (R) \cdot (l) \cdot (R)^T \cdot (F) &= \\
= 2(U)^T \cdot (R)^T \cdot (R) \cdot (l) \cdot (R)^T \cdot (R) \cdot (U) = 2(U) \cdot (l) \cdot (U)&,
\end{aligned} \tag{10}$$

где кососимметричный тензор, определяющий скорость вращение элементарного объема как твердого целого, ассоциированного с рассматриваемой материальной точкой, имеет вид

$$(\Omega) = (\dot{R}) \cdot (R)^T.$$

Обозначим через $\mathbf{c}_i$ орты главных направлений меры деформации Коши – Грина (1), через C_i – главные значения этого тензора. Тогда справедливо представление

$$(C) = \sum_i C_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i) = \sum_i U_i^2(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i),$$

где U_i – главные значения правого тензора искажения (тензоры (C) и (U) соосны). Аналогично для меры деформации Фингера справедливо

$$(B) = \sum_i B_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) = \sum_i V_i^2(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i).$$

Существует зависимость между главными направлениями $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{c}_i$ в виде

$$\mathbf{b}_i = (R)\cdot\mathbf{c}_i.$$

Известно, что $V_i = U_i$, откуда следует равенство главных инвариантов

$$I_{1C} = \sum_i C_i = \sum_i U_i^2 = \sum_i V_i^2 = \sum_i B_i = I_{1B},$$

$$I_{2C} = C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_1 = I_{2B},$$

$$I_{3C} = C_1C_2C_3 = B_1B_2B_3 = I_{3B}.$$

Если использовать выражения для мер деформаций и тензоров искажений в виде разложения по главным направлениям, то для их производных будут справедливы следующие соотношения

$$(\dot{U}) = (U^{\diamondsuit}) + (\Omega_U)\cdot(U) - (U)\cdot(\Omega_U),$$

$$(\Omega_U) = (\dot{\mathbf{c}}_k\mathbf{c}_k) = \Omega_{ij}^U(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j),$$

$$(\dot{V}) = (V^{\nabla}) + (\Omega_V)\cdot(V) - (V)\cdot(\Omega_V),$$

$$(\Omega_V) = (\dot{\mathbf{b}}_k\mathbf{b}_k) = \Omega_{ij}^V(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j);$$

$$(\dot{C}) = (C^{\diamondsuit}) + (\Omega_U)\cdot(C) - (C)\cdot(\Omega_U),$$

$$(\dot{B}) = (B^{\nabla}) + (\Omega_V)\cdot(B) - (B)\cdot(\Omega_V),$$

где

$$(U^{\diamondsuit}) = \sum_i \dot{U}_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i),$$

$$(V^{\nabla}) = \sum_i \dot{V}_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i), \tag{11}$$

$$(C^{\diamondsuit}) = \sum_i \dot{C}_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i) = 2\sum_i U_i\dot{U}_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i) = (U)\cdot(U^{\diamondsuit}) + (U^{\diamondsuit})\cdot(U),$$

$$(B^{\nabla}) = \sum_i \dot{B}_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) = 2\sum_i V_i\dot{V}_i(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) = (V)\cdot(V^{\nabla}) + (V^{\nabla})\cdot(V). \tag{12}$$

Для пространственного градиента скорости (5), его симметричной (6) и кососимметричной (ω) частей аналогичные представления после ряда преобразований будут иметь вид

$$(h) = \sum_i \frac{\dot{V}_i}{V_i}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) + (\Omega_V) - (F)\cdot(\Omega_U)\cdot(F^{-1}),$$

$$(d) = \sum_i \frac{\dot V_i}{V_i}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left[\frac{V_k}{V_i} - \frac{V_i}{V_k}\right]\Omega^U_{ik}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k), \tag{13}$$

$$(\omega) = \frac{1}{2}[(h) - (h)^T] = (\Omega_V) + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left[\frac{V_k}{V_i} + \frac{V_i}{V_k}\right]\Omega^U_{ik}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k).$$

Тензор пространственной меры скорости искажений (7) записывается в виде

$$(l) = (R)^T \cdot (d) \cdot (R) = \sum_i \frac{\dot U_i}{U_i}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left[\frac{U_k}{U_i} - \frac{U_i}{U_k}\right]\Omega^U_{ik}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_k). \tag{14}$$

С учетом того, что $V_i = U_i$, тензор деформации скорости (13) и тензор пространственной меры искажения (14) структурно совпадают между собой и отличаются лишь базисами, на которых они построены. Это указывает на внутреннюю связь между этими тензорами.

Теперь приведем краткие сведения о свойстве вышеописанных тензоров и их производных представлять движения как жесткого целого элементарных объемов. Здесь вводится группа объективных тензоров, состоящих из инвариантных и индифферентных тензоров. Первые (инвариантные) обладают тем свойством, что при наложении жестких движений их компоненты в проекциях на базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не изменяются. К ним относятся мера деформации Коши – Грина (C) (1) и его материальная производная $(\dot C)$ (10), тензор деформации Коши – Грина (E) (4) и его материальная производная $(\dot E)$ (10), правый тензор искажения (U) (3) и его производная по времени $(\dot U)$, тензор пространственной меры искажения (l) (7). Вторая группа (индифферентные тензоры) характеризуются тем, что их компоненты в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ при наложении жестких вращений преобразуются по закону данного жесткого движения. Таким свойством обладают: мера деформаций Фингера (B) (2), его материальная производная (9), обобщенная производная (12):

$$\begin{aligned}(B^\nabla) &= (\dot B) - (\Omega_V)\cdot(B) + (B)\cdot(\Omega_V) = \\ &= [(h) - (\Omega_V)]\cdot(B) + (B)\cdot\left[(h)^T + (\Omega_V)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

левый тензор искажения (V) и его обобщенная производная (11)

$$(V^\nabla) = (\dot V) - (\Omega_V)\cdot(V) + (V)\cdot(\Omega_V), \tag{16}$$

тензор деформации скорости (d). Остальные тензоры не принадлежат классу объективных тензоров, что исключает их применение при формулировке определяющих соотношений.

Отметим, что производные вида (12), (15), (11) и (16) называют объективными производными (коротационными). Они играют важную роль при постулировании определяющих соотношений в скоростях напряжений и деформаций, которые, в свою очередь, неизбежно возникают при построении линеаризованных уравнений.

2. Вариационные уравнения и тензоры напряжений

Основными уравнениями, которые используются в качестве разрешающих при численной реализации, являются вариационные уравнения принципа виртуальных перемещений и принципа виртуальных мощностей. Первое из них имеет вид

$$\delta U + \delta I = \delta A, \tag{17}$$

где δU – работа внутренних напряжений на возможных деформациях, которая для упругих материалов является вариацией потенциальной энергии деформаций. Соответственно, подынтегральное выражение определяет значение вариации удельной потенциальной энергии деформации. Выражение этой величины может быть представлено в различных видах, а именно

$$\delta U = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} (S)\cdot\cdot(\delta C)\, dV_0 = \int\limits_{V_0} (S)\cdot\cdot(\delta E)\, dV_0 = \int\limits_{V_0} (P)\cdot\cdot(\delta F)\, dV_0 = \\ = \int\limits_{V_0} (\Xi)\cdot\cdot(\delta U)\, dV_0 = \int\limits_{V} (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d_R)\, dV, \quad (18)$$

где (Σ) – тензор напряжения Коши – Эйлера, или гидродинамический тензор напряжений, который является тензором истинных напряжений;

$$(P) = J(F^{-1})\cdot(\Sigma) \quad (19)$$

есть тензор напряжений Лагранжа, или номинальный тензор напряжений (к нему транспонированный тензор $(P)^T$ называют первым тензором напряжений Пиолы – Кирхгофа);

$$(S) = J(F^{-1})\cdot(\Sigma)\cdot(F^{-1})^T \quad (20)$$

есть второй (симметричный) тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа;

$$(\Xi) = \frac{1}{2}\left[(S)\cdot(U) + (U)\cdot(S)\right] \quad (21)$$

есть тензор напряжений Био;

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \det(F) = \sqrt{I_{3C}} = \sqrt{I_{3B}}$$

есть относительное изменение объема;

$$(\delta d_R) = \frac{1}{2}\left[(\nabla_y \delta\mathbf{R})^T + (\nabla_y \delta\mathbf{R})\right].$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (17) – работа сил инерции на возможных перемещениях

$$\delta I = \int\limits_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV_0 = \int\limits_{V} \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV.$$

В правой части уравнения (17) фигурирует работа внешних массовых и поверхностных сил

$$\delta A = \int\limits_{V_0} \rho_0 \mathbf{f}_0\cdot\delta\mathbf{R}\, dV_0 + \int\limits_{S_0^\sigma} \mathbf{t}_{0n}^*\cdot\delta\mathbf{R}\, dS_0 = \int\limits_{V} \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV + \int\limits_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^*\cdot\delta\mathbf{R}\, dS.$$

Здесь предполагается, что граница деформируемого тела состоит из двух частей: $S_0 = S_0^u \cup S_0^\sigma$, где S_0^u – часть границы, на которой заданы кинематические граничные условия и для нее $\delta\mathbf{R} = 0$, S_0^σ – часть границы, на которой заданы силовые граничные условия $\mathbf{t}_{0n} = \mathbf{t}_{0n}^*$. Аналогично для деформированного состояния, когда $S = S^u \cup S^\sigma$, где S^u – часть границы, на которой заданы кинематические граничные условия $\delta\mathbf{R} = 0$, S^σ – часть границы, на которой заданы силовые граничные условия $\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_n^*$.

В приведенных соотношениях фигурирует вариация $\delta\mathbf{R}$, которая тождественно совпадает с вариацией вектора перемещения $\delta\mathbf{u}$. Поэтому все сказанное будет справедливо, если заменить $\delta\mathbf{R}$ на $\delta\mathbf{u}$.

Таким образом, вариационное уравнение виртуальных работ может быть записано с использованием интегралов либо по исходному объему, либо относительно текущей конфигурации. Чаще всего используется первый вариант (задача формулируется относительно исходной конфигурации), причем в качестве базового тензора напряжений выбирается 2-й тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа (20). Базовой мерой деформации в этом случае могут быть два тензора: либо мера деформации Коши – Грина (1), либо тензор деформации Коши – Грина (4). Это зависит от того, какой вектор является неизвестной функцией. Если неизвестной функцией является деформированная конфигурация, то есть радиус-вектор $\mathbf{R}$, то следует использовать меру деформации Коши – Грина (C), а если принять в качестве неизвестной вектор перемещений $\mathbf{u}$, тогда используется тензор деформации Коши – Грина (E). Какой из векторов принять в качестве неизвестных зависит от степени деформируемости исследуемого объекта. При малых и средних деформациях (до 50%) вполне уместно использовать вектор перемещений $\mathbf{u}$. При больших деформациях следует использовать в качестве неизвестной функции радиус-вектор деформированного состояния $\mathbf{R}$. Выпишем вариационное уравнение для последнего варианта:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} (S)\cdot\cdot(\delta C)\, dV_0 + \int\limits_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV_0 = \int\limits_{V_0} \rho_0 \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{R}\, dV_0 + \int\limits_{S_0^\sigma} \mathbf{t}_{0n}^* \cdot \delta\mathbf{R}\, dS_0.$$

Альтернативным вариантом постановки задачи в рамках принципа виртуальных перемещений является использование в качестве базовой текущей (деформированной) конфигурации. В этом случае базовым является тензор истинных напряжений (Коши – Эйлера), а неизвестным вектором – вектор приращения перемещений $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{R}$. Соответствующее вариационное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V} (\Sigma)\cdot\cdot\left[(\nabla_y\delta\mathbf{R})^T + (\nabla_y\delta\mathbf{R})\right]\, dV + \int\limits_{V} \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV = \int\limits_{V} \rho\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{R}\, dV + \int\limits_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^*\cdot\delta\mathbf{R}\, dS.$$

Напомним, что для любого варианта уравнений неизвестные функции должны удовлетворять кинематическим граничным условиям на части границы S_0^u или на S^u.

В качестве разрешающего уравнения можно использовать также вариационное уравнение принципа виртуальных мощностей

$$\int\limits_{V} (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\, dV = \int\limits_{V} \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})\cdot\delta\mathbf{v}\, dV + \int\limits_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^*\cdot\delta\mathbf{v}\, dS. \qquad (22)$$

Левая часть приведенного уравнения представляет собой вариацию мощности внутренних сил δN, и она может быть представлена в различных формах. Например,

$$\delta N = \int\limits_V (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\,dV = \int\limits_V (T)\cdot\cdot(\delta l)\,dV =$$
$$= \int\limits_{V_0} (\tau)\cdot\cdot(\delta d)\,dV_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} (S)\cdot\cdot(\delta\dot{C})\,dV_0 = \int\limits_{V_0} (\Xi)\cdot\cdot(\delta\dot{U})\,dV_0, \quad (23)$$

где введен тензор напряжений Кирхгофа

$$(\tau) = J(\Sigma) = \frac{\rho_0}{\rho}(\Sigma) \quad (24)$$

и тензор истинных напряжений во вращающейся системе координат (“rotated stress tensor”)

$$(T) = (R)^T\cdot(\Sigma)\cdot(R) = \frac{1}{J}(U)\cdot(S)\cdot(U). \quad (25)$$

Таким образом, уравнение (22) может быть записано и относительно исходной конфигурации. Например,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} (S)\cdot\cdot(\delta\dot{C})\,dV_0 = \int\limits_{V_0} \rho_0(\mathbf{f}_0 - \dot{v})\cdot\delta\,dV_0 + \int\limits_{S_0^\sigma} \mathbf{t}_{0n}^*\cdot\delta\mathbf{v}\,dS_0.$$

Интерес представляет уравнение

$$\int\limits_{V_0} (\tau)\cdot\cdot(\delta d)\,dV_0 = \int\limits_V \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})\cdot\delta\mathbf{v}\,dV + \int\limits_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^*\cdot\delta\mathbf{v}\,dS,$$

в котором левая часть представлена в виде интеграла по исходному объему, однако подынтегральные сомножители определены в текущей конфигурации.

Все введенные тензоры напряжений являются объективными тензорами. В частности, тензор истинных напряжений Коши – Эйлера (Σ), тензор напряжений Кирхгофа (24) являются индифферентными тензорами, а тензор напряжений Био (21), 2-й тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа (20) и тензор истинных напряжений во вращающейся системе координат (25) являются инвариантными тензорами. Отметим здесь же, что все свертки, определяющие вариацию мощности (23) и вариацию потенциальной энергии деформаций (18), образованы тензорами одной природы, а именно: инвариантные тензоры свертываются с инвариантными, а индифферентные – с индифферентными. Соответствующие пары называют сопряженными, именно для них следует определять физические соотношения, характеризующие конкретные свойства рассматриваемого материала.

В качестве справки приведем сопряженные пары:

- по потенциальной энергии деформации

$$(P)\sim(F), \quad (S)\sim\frac{1}{2}(C), \quad (S)\sim(E), \quad (\Xi)\sim(U);$$

- по мощности внутренних сил относительно исходного состоянии

$$(S)\sim\frac{1}{2}(\dot{C}), \quad (S)\sim(\dot{E}), \quad (\tau)\sim(d), \quad (\Xi)\sim(\dot{U});$$

- и относительно текущего состояния

$$(\Sigma)\sim(d), \quad (T)\sim(l).$$

Заключение

В работе приведены основные положения кинематики конечных деформаций, рассмотрены различные варианты вариационных уравнений. Приведенные выражения, соотношения и уравнения справедливы не только для описания деформации нелинейно упругих материалов, а имеют более широкую область применения. Практически любая деформируемая среда может быть описана с их помощью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00546а).

Summary

A.I. Golovanov, Y.G. Konoplev, L.U. Sultanov. Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. I. Kinematics and Variational Equations.

The present article starts a series of papers devoted to building a numerical algorithm of researching large deformations of hyperelastic solids. The theoretical background for large deformation is considered. Several general variational equations for solving nonlinear problem of solid mechanics are presented.

Key words: large deformations, hyperelastic, tensor of deformations, stress tensor, variational equations.

Литература

1. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
2. *Черных К.Ф.*Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
3. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
5. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
6. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
7. *Грин А., Адкинс Д.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
8. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 165 с.

Поступила в редакцию
25.01.08

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexandr.Golovanov@ksu.ru*

Коноплев Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского государственного университета.

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*