УДК 519.95+517.5

# ПРОБЛЕМА СУПЕРПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. КОММУНИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД

*Ф.М. Аблаев, С.Г. Аблаева*

**Аннотация**

Проблема суперпозиции функций – это задача представления непрерывной функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ в виде композиции более простых функций. В терминах теории сложности это проблема представления функции $f$ в виде формулы в некотором базисе $\Omega$. Задача явного задания булевой функции, которая не представима в виде «простой» формулы, – одна из важных проблем теории сложности.

В статье построена явная (задаваемая в виде ряда) непрерывная негельдерова функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ из класса Дини, не представимая суперпозициями вида

$$F\left(h_1(x_1^1, \ldots, x_t^1), \ldots, h_s(x_1^s, \ldots, x_t^s)\right),$$

где функции $\{h_i : 1 \le i \le s\}$ – функции от $t$, $t < k$, переменных, имеющие тот же модуль непрерывности, что и функция $f$, а $F(z_1, \ldots, z_s)$ – произвольная липшицева функция.

**Ключевые слова:** проблема суперпозиции непрерывных функций, липшецева функция, функция Дини, дискретная аппроксимация непрерывных функций, коммуникационная сложность.

---

## 1. Предварительные сведения

Проблема представления непрерывной функции в виде суперпозиции непрерывных функций более простого вида хорошо известна в классической математике. Эта проблема восходит к задаче представления решения общего уравнения $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = 0$ как функции коэффициентов. Современные исследования в этой области были инициированы 13-й проблемой Гильберта [1, 2].

Для класса $\mathcal{F}_p^k$ $p$ раз непрерывно дифференцируемых функций от $k$ переменных А.Г. Витушкин [3] доказал следующий факт: В классе $\mathcal{F}_p^k$ существует функция, не представимая в виде суперпозиции функций из $\mathcal{F}_q^t$, если только $k/p > t/q$. Позже А.Н. Колмогоров [4] дал доказательство теоремы Витушкина, основанное на сравнении сложностных характеристик (энтропии) множеств функций из пространств $\mathcal{F}_p^k$ и $\mathcal{F}_q^t$. Отметим, что доказательства Витушкина и Колмогорова являются «доказательствами существования» и не предъявляют «явно» такие функции.

Идеи А.Н. Колмогорова [4] послужили основой для развития информационно-сложностной точки зрения на задачи теории аппроксимации. В.Н. Тихомиров во введении своей книги [5] отметил, что у теории приближений есть свой круг задач и методов, она занимает важное место в анализе, но помимо этого есть одна важная особенность: она умеет хорошо «спрашивать» у своих «соседей». Теория сложности является интенсивно развивающимся и внимательным «соседом» теории приближений.

С.С. Марченков [6] предложил сложностной подход для построения вычислимой непрерывной функции из класса $\mathcal{F}_p^k$, не представимой в виде суперпозиции функций худшего качества. Им был предложен конструктивный метод построения «сложной» непрерывной функции. Но проблема построения «сложных» явных непрерывных функций в настоящее время остается открытой. Он предложил метод задания непрерывной функции на основе сложно реализуемых (в схемном смысле) булевых функций. С.С. Марченков показал, что сложно реализуемые булевые функции определяют непрерывную функцию из класса $\mathcal{F}_p^k$, которая не представима в виде суперпозиции функций из $\mathcal{F}_q^t$, если только $k/p > t/q$. Задача построения сложно реализуемой функции решается перебором. Но, проблема построения индивидуальных сложно реализуемых булевых функций в настоящее время остается открытой. Е.А. Асарин [7] предложил другой вариант вычислимого (в основе своей тоже переборного) задания сложно аппроксимируемой непрерывной функции. С.Б. Гашков [8] ввел в рассмотрение характеристику функциональных пространств, основанную на сложности приближенной реализации функций пространства. На основе анализа этой характеристики функциональных пространств получены уточнения теоремы Витушкина [8].

Мы предлагаем коммуникационный метод построения индивидуальной непрерывной функции. Этот метод основан на определении непрерывной функции при помощи максимально коммуникационно сложной булевой функции, (максимально коммуникационно сложную булеву функцию можно определить явным образом) и аппроксимации непрерывной функции дискретной функцией, вычисляемой коммуникационным протоколом.

Коммуникационная модель вычисления булевых функций (коммуникационные протоколы) и понятие коммуникационной сложности булевых функций введены в работе [9] и являются интенсивно изучаемым направлением в теории сложности вычислений.

В качестве следствия 1 из общего утверждения (теоремы 1) построена явная (задаваемая в виде ряда) непрерывная негельдерова функция $f(x_1, \dots, x_k)$ из класса Дини, не представимая суперпозициями вида

$$F\left(h_1(x_1^1, \dots, x_t^1), \dots, h_s(x_1^s, \dots, x_t^s)\right),$$

где $\{h_i | 1 \le i \le s\}$ – множество функций от $t$, $t < k$, переменных, имеющих тот же модуль непрерывности, что и функция $f$, а $F$ – произвольная функция из $\mathcal{H}_1$.

Проблема построения явной сложно приближаемой непрерывной функции была поставлена А.Н. Колмогоровым в его докладе [10]. Подробно эта проблема обсуждается в работе [7]. В рамках рассматриваемой коммуникационной модели вычислений с фиксированным разбиением входов вопрос построения явной (задаваемой в виде ряда) непрерывной функции, для которой при всех $\varepsilon$ коммуникационная сложность $\varepsilon$-приближений высока (то есть имеет максимальную коммуникационную сложность), решается положительно.

Коммуникационный метод доказательства теоремы 1 основан на доказательстве того, что функция $f_{\omega,g}$ является максимально коммуникационно сложно аппроксимируемой в рамках выбранной модели вычислений.

Коммуникационный метод позволяет указывать явные функции конечной гладкости, которые для произвольного $\varepsilon$ сложно $\varepsilon$-аппроксимируются в рассматриваемой нами коммуникационной модели. Необходимо отметить, что сложно аппроксимируемая явная гладкая функция получается с использованием конструкции Колмогорова – Тихомирова [11, с. 35]. Роль коммуникационного подхода заключается в явном задании знаков $\gamma_s \in \{-1, +1\}$ конструируемой функции при помощи коммуникационно сложной булевой функции.

## 2. Функция $f_{\omega,g}$

Непрерывная действительная функция $f_{\omega,g}$ $k$ действительных переменных определяется при помощи булевой функции $g$ (точнее последовательности $g = \{g_n\}$ единообразно определяемых булевых функций $g_n$) и простой стандартной непрерывной функции. Область определения $[0,1]^k$ функции $f_{\omega,g}$ разбивается на счетное число кубиков. В каждый кубик помещается простая непрерывная функция, принимающая максимальное (минимальное) значение в центре кубика и нулевое значение на границах кубика. Значение булевой функции в каждом кубике определяет знак (задает мультипликативный коэффициент $+1$ или $-1$) определяемой функции.

Начнем с определения разбиения куба $[0,1]^k$.

Всюду в этой главе будем полагать $n = 2^j - 1$, $j \geq 1$. Обозначим $I_n$ отрезок $I_n = [1/n+1, 2/n+1]$. Положим $I_n^k = \underbrace{I_n \times \cdots \times I_n}_{k}$ и $I^k = \bigcup_{n\geq 1} I_n^k$.

Всюду в этой главе $\Sigma$ будет обозначать двоичный алфавит $\Sigma = \{0,1\}$.

Пусть $a : \Sigma^* \to [0,1]$ – это отображение следующего вида: для последовательности $v = \sigma_1 \ldots \sigma_n$

$$a(v) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{-i} + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Обозначим $A_n = \{a(v) : v \in \Sigma^n\}$. Для числа $a(v) \in A_n$ обозначим через $I_n(a(v))$ отрезок длины $\delta(n) = 1/((n+1)2^n)$ с центром в точке $a(v)$:

$$I_n(a(v)) = \left[a(v) - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},\ a(v) + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right].$$

Из определений множества точек $A_n$ и отрезка $I_n(a(v))$ следует, что

A. для $a(v)$, $a(v') \in A_n$ таких, что $a(v) \neq a(v')$ отрезки $I_n(a(v))$ и $I_n(a(v'))$ могут пересекаться разве что по границе,

B. $\displaystyle\bigcup_{a(v)\in A_n} I_n(a(v)) = I_n$.

Определим следующую базовую функцию $\Psi_{n,a(v)}(x)$ на отрезке $I_n(a(v))$, $a(v) \in A_n$ условием

$$\Psi_{n,a(v)}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\delta(n)}(x - a(v)), & \text{если } a(v) - \frac{\delta(n)}{2} \leq x \leq a(v), \\ 1 - \frac{2}{\delta(n)}(x - a(v)), & \text{если } a(v) \leq x \leq a(v) + \dfrac{\delta(n)}{2}, \\ 0, & \text{если } x \notin \left[a(v) - \dfrac{\delta(n)}{2}, a(v) + \dfrac{\delta(n)}{2}\right]. \end{cases} \quad (1)$$

Для последовательности $v = (v_1, \ldots, v_k)$ такой, что $v_i \in \Sigma^n$, $1 \leq i \leq k$, обозначим $I_n^k(b(v)) = I_n(a(v_1)) \times \cdots \times I_n(a(v_k))$. $I_n^k(b(v))$ – это $k$-мерный вещественный куб с длиной стороны $\delta(n)$, с центром в точке $b(v) = (a(v_1), \ldots, a(v_k))$. Внутри каждого куба $I_n^k(b(v))$, $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \Sigma^{kn}$, $b(v) = (a(v_1), \ldots, a(v_k))$ мы определим функцию $\Psi_{n,b(v)}(x)$:

$$\Psi_{n,b(v)}(x) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{n,a(v_i)}(x_i),$$

где функции $\Psi_{n,a(v_1)}(x_1),\ldots,\Psi_{n,a(v_k)}(x_k)$ определены на соответствующих отрезках

$$I_n(a(v_1)),\ldots,I_n(a(v_k)).$$

Функция $\Psi_{n,b(v)}(x)$ принимает максимальное значение 1 в центре куба $I_n^k(b(v))$ и принимает значение нуль на границах куба $I_n^k(b(v))$. Последовательность $g = \{g_n(v)\}$ булевых функций

$$g_n : \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{k} \to \{0,1\}$$

определим следующим образом.

Обозначим через $\mathrm{pat}(n,k)$ следующее разбиение последовательности $v=(v_1, \ldots, v_k)$, где $v_i \in \Sigma^n$, $1 \le i \le k$ . Каждое слово $v_i$ последовательности $v$ делится на две части – начало $u_i$ и окончание $w_i$ длины $l(n,k)=n-d(n,k)$ и $d(n,k) = \lceil(\log kn)/k\rceil$ соответственно. Мы будем писать $v=(u,w)$ и называть последовательность $u=(u_1,\ldots,u_k)$ началом, а последовательность $w=(w_1,\ldots,w_k)$ окончанием последовательности $v$.

Наряду с обозначением $g_n(v)$ будем использовать обозначение $g_n(u,w)$ для определяемой ниже булевой функции $g_n$. Функция $g_n(u,w)=1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord}(w_1\ldots w_k)$-й бит в слове $u_1\ldots u_k$ – единица ($\mathrm{ord}(\bar\sigma)$ означает целое число, двоичное представление которого есть двоичная последовательность $\bar\sigma$; нумерация букв слова $u$ начинается с 0, а слова $w$ – с единицы).

Функция $g_n(u,w)$ формально задается следующей формулой (мы используем стандартные обозначения из теории булевых функций [12]):

$$g_n(u,w) = \bigvee_{\substack{\sigma\\ 0\le \mathrm{ord}(\sigma)\le |u|-1}} \bigwedge_{i=1}^{kd(n,k)} y_i^{\sigma_i} \wedge x_{\mathrm{ord}(\sigma)},$$

где $y_j$ $(x_j)$ – $j$-й символ последовательности $w$ $(u)$ в общей нумерации ее элементов.

Пусть непрерывная на $[0,1]$ функция $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности. Обозначим $f_{\omega,g}$ функцию, задаваемую рядом

$$f_{\omega,g}(x) = \sum_{\substack{n=2^j-1,\\ j\ge k}} \sum_{v\in\Sigma^n} (2g_n(v)-1)\omega(\delta(n))\Psi_{n,b(v)}(x). \tag{2}$$

Функцию $f_{\omega,g}$ доопределим по непрерывности в точке нуль куба $[0,1]^k$. Это возможно, так как $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Заметим, что функция $f_{\omega,g}(x)$ от $k$ переменных в силу определения 2 может принимать ненулевые значения только в замкнутом подмножестве $I^k$ куба $[0,1]^k$.

## 3. Теорема о суперпозиции функций

Будем рассматривать функции, заданные в замкнутом множестве $I^k$. Непрерывные функции, определенные в замкнутом множестве, являются равномерно непрерывными. Следуя терминологии теории функций, введем понятие модуля непрерывности функции.

Для равномерно непрерывной функции $f(x)$ от $k\ge 2$ переменных модуль непрерывности $\omega(\delta)$ определяется как наименьшая верхняя грань $|f(x)-f(x')|$ по всем $x$, $x'\in I^k$ таким, что $|x-x'| = \max\limits_{1\le i\le k}|x_i-x_i'| \le \delta$ (см. книгу [13, пар. 3.2]).

Не каждая непрерывная функция является модулем непрерывности. Следующее простое условие является достаточным для того, чтобы функция $\omega(\delta)$ являлась модулем непрерывности. Функция $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности, если $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает с ростом $\delta$ (см. [13, п. 3.2.3]).

Обозначим $\mathcal{H}_\omega^k$ класс всех равномерно непрерывных функций от $k$ переменных, модуль непрерывности которых не превышает по порядку заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Положим $\mathcal{H}_\omega = \cup_{k\geq 1}\mathcal{H}_\omega^k$.

Для чисел $\gamma \in (0,1]$ классы функций

$$\mathcal{H}_\gamma = \{f : \omega(\delta) \preceq \delta^\gamma\} \quad (\gamma \in (0,1])$$

известны как классы Гельдера. Более общий класс

$$\mathcal{D} = \left\{ f : \lim_{\delta\to 0} \omega(\delta)\log\frac{1}{\delta} = 0 \right\}$$

содержит в себе классы Гельдера и называется классом Дини.

Пусть $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{B}^s$ – некоторые классы непрерывных функций от $t$ и $s$ переменных соответственно. Обозначим $\mathit{Sp}^k[\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^s]$ – класс непрерывных функций от $k$ переменных, представимых суперпозициями вида

$$F\left(h_1(x_1^1, \dots, x_t^1), \dots, h_s(x_1^s, \dots, x_t^s)\right),$$

где $F(y_1, \dots, y_s)$ – это функция из $\mathbf{B}^s$, а $\{h_i(x_1, \dots, x_t) : \ 1 \leq i \leq s \ \} \subseteq \mathbf{A}^t$.

Непосредственно из определения следует, что для модулей непрерывности $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ функция $\omega(\delta) = \omega_2(\omega_1(\delta))$ является модулем непрерывности и $\mathit{Sp}^k[\mathcal{H}_{\omega_1}^t, \mathcal{H}_{\omega_2}^s] \subseteq \mathcal{H}_\omega^k$.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{H}}_\omega^k$ множество функций из класса $\mathcal{H}_\omega^k$ со свойством: для всех функций $f \in \widehat{\mathcal{H}}_\omega^k$ для всех $\delta$ вида $\delta = \delta(n)$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta(n))$ функции $f$ равен $\omega(\delta(n))$ с точностью до мультипликативной константы.

**Теорема 1 (Теорема о суперпозиции).** *Пусть $\omega_1(\delta)$ – такая строго возрастающая с ростом $\delta$ функция, что $\omega_1(\delta)/\delta$, не возрастает с ростом $\delta$ и*

$$\log\frac{1}{\omega_1(\delta)} = o\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{1-t/k}\right). \tag{3}$$

*Тогда для $s \geq 1$, $M > 0, \gamma \in (0,1]$, $\omega_2(\delta) = M\delta^\gamma$, $\omega(\delta) = \omega_2(\omega_1(\delta))$ функция $f_{\omega,g}(x)$ принадлежит классу $\mathcal{H}_\omega^k \backslash \mathit{Sp}^k[\widehat{\mathcal{H}}_{\omega_1}^t, \mathcal{H}_{\omega_2}^s]$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в следующем параграфе.

Заметим, что функции, модуль непрерывности которых удовлетворяет условию (3) теоремы 1, не входят в класс Гельдера $\mathcal{H}_* = \bigcup\limits_{\gamma\in(0,1]} \mathcal{H}_\gamma$. Но, например, класс $\mathcal{H}_{\omega_p}$ для $p > 1$, где

$$\omega_p(\delta) = \begin{cases} (\ln 1/\delta)^{-p}, & \text{если } \ 0 < x \leq a, \\ (\ln 1/a)^{-p}, & \text{если } \ x > a, \end{cases}$$

$a = 1/(e^{p+1})$ таков, что модуль непрерывности $\omega_p(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 для модуля непрерывности $\omega_1(\delta)$. Класс $\mathcal{H}_{\omega_p}$ входит в класс Дини $\mathcal{D}$.

**Следствие 1.** *Функция $f_{\omega_p,g}(x)$ от $k \geq 4$ переменных входит в класс $\widehat{\mathcal{H}}^k_{\omega_p}$ и не представима в виде суперпозиции функций от $t$ переменных из класса $\widehat{\mathcal{H}}^t_{\omega_p}$ на первом уровне суперпозиции и функций из класса $\mathcal{H}_1$ на последующих уровнях, если $t < k$.*

**Доказательство.** Функция $\omega_p(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\log \frac{1}{\omega_p(\delta)} = o\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^c\right)$$

теоремы 1 для произвольной константы $c > 0$, в частности для $c = 1 - t/k$, $t < k$. □

## 4. Доказательство теоремы о суперпозиции

В этом параграфе излагается доказательство теоремы 1. Начнем с доказательства того, что $f_{\omega,g} \in \mathcal{H}^k_\omega$.

Функция $\Psi_{n,a(v)}(x)$ (см. определение 1) обладает следующими полезными для нас свойствами.

*Свойство* 1. Для функции $\Psi_{n,a(v)}(x)$ справедливо следующее:

1. Функция $\Psi_{n,a(v)}(x)$ принимает максимальное значение 1 в центре отрезка $I_n(a(v))$ и принимает значение 0 на границах отрезка $I_n(a(v))$.

2. Модуль непрерывности $\omega_\Psi(\delta)$ функции $\Psi_{n,a(v)}(x)$ определяется соотношением

$$\omega_\Psi(\delta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\delta(n)}\delta, & \text{если } 0 < \delta \leq \dfrac{\delta(n)}{2}, \\ 1, & \text{если } \dfrac{\delta(n)}{2} \leq \delta \leq \delta(n). \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство того, что $f_{\omega,g} \in \widehat{\mathcal{H}}^k_\omega$ следует из следующего утверждения.

*Свойство* 2. Для функции $f_{\omega,g}$ справедливо следующее:

1. $f_{\omega,g}$ непрерывна на множестве $I^k$ куба $[0,1]^k$.

2. В каждом кубе $I^k_n(b(v)) \in I^k$ функция $f_{\omega,g}$ принимает максимальное (минимальное) значение $\omega(\delta(n))$ $(-\omega(\delta(n)))$ в центре и принимает нулевое значение на границах куба $I^k_n(b(v))$.

3. Если при этом непрерывная функция $\omega(\delta)$ такова, что $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает с ростом $\delta$, то модуль непрерывности $\omega_f$ функции $f_{\omega,g}$ удовлетворяет соотношениям:

   *а*) для $\delta = \delta(n)$ $\omega(\delta(n)) \leq \omega_f(\delta(n)) \leq 2k\omega(\delta(n))$.

   *б*) для произвольных $\delta$ $\omega_f(\delta) \leq 2k\omega(\delta)$.

**Доказательство.** Для простоты функцию $f_{\omega,g}$ будем обозначать символом $f$. Первое и второе утверждения свойства очевидны и следуют непосредственно из определения функции $f$.

Для функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для $z_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ положим $f_{z_i}(x_i) = f(x)$. Полный модуль непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции $f(x)$ связан с ее частными модулями непрерывности

$$\omega_i(\delta) = \sup_{z_i \in I^{k-1}} \sup_{|x_i - x'_i| \leq \delta} |f_{z_i}(x_i) - f_{z_i}(x'_i)| \tag{5}$$

неравенствами (см. [13, п. 3.4.31])

$$\max_{1\le i\le k}\{\omega_i(\delta)\} \le \omega_f(\delta) \le \sum_{i=1}^{k}\omega_i(\delta). \tag{6}$$

В силу определения функции $f$ соотношение (5) можно записать в виде:

$$\omega_i(\delta) = \sup_{\substack{m=2^j-1,\\ j\ge 1}} \sup_{z_i\in I_m^{k-1}} \sup_{|x_i-x_i'|\le\delta} |f_{z_i}(x_i)-f_{z_i}(x_i')| =$$

$$= \sup_{\substack{m=2^j-1,\\ j\ge 1}} \sup_{w^{(i)}} \sup_{z_i\in I_m^{k-1}(b(w^{(i)}))} \sup_{|x_i-x_i'|\le\delta} |f_{z_i}(x_i)-f_{z_i}(x_i')|, \tag{7}$$

где $w^{(i)} = (v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k) \in \Sigma^m\times\cdots\times\Sigma^m$.

Выберем произвольное $z_i \in I_m^{k-1}(b(w^{(i)}))$, $w^{(i)} = (v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k) \in \Sigma^m\times\cdots\times\Sigma^m$.

Из определения функции $f$ следует, что ее подфункция $f_{z_i}$ определена на отрезке $I_m$ и не определена вне этого отрезка. Для точек $x_i, x_i' \in I_m$ пусть $v_i, v_i' \in \Sigma^m$ – такие слова, что

$$x_i \in I_m(a(v_i)), \quad x_i' \in I_m(a(v_i')).$$

В силу определения функции $f$ имеем:

$$|f_{z_i}(x_i)-f_{z_i}(x_i')| = \omega(\delta(n)) \prod_{j=1, j\ne i}^{k} \Psi_{m,a(v_j)}(x_j)|(2g_m(v)-1)\Psi_{m,a(v_i)}(x_i)-$$

$$-(2g_m(v')-1)\Psi_{m,a(v_i')}(x_i')|. \tag{8}$$

Здесь $v=(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_k)$, а $v'=(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i',v_{i+1},\ldots,v_k)$.

Для $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ имеются две последовательности $v=(v_1,\ldots,\ v_{i-1},\ v_i,\ v_{i+1},\ldots,v_k)$ и $v'=(v_1,\ldots,v_{i-1},\ v_i',\ v_{i+1},\ldots,v_k)$ со свойством $g_m(v)\ne g_m(v')$. В силу (7), (8) и свойства 1 следует, что на отрезке $I_m$ для функции $f$ ее частный модуль непрерывности $\omega_i(\delta)$ определяется соотношением

$$\omega_i(\delta) = \begin{cases} \omega(\delta(m))\dfrac{2}{\delta(m)}\delta, & \text{если } \delta\le\delta(m),\\ 2\omega(\delta(m)), & \text{если } \delta\ge\delta(m). \end{cases} \tag{9}$$

Выберем произвольное $n=2^j-1,\ j>1$. Определим значение $\omega_i(\delta(n))$ на различных отрезках $I_m$. Рассмотрим три случая.

1. $n=m$. Из (9) следует, что частный модуль непрерывности $\omega_i(\delta(n))$ функции $f$ на отрезке $I_m$ определяется соотношением:

$$\omega_i(\delta(n)) = 2\omega(\delta(n)).$$

2. $n>m$. В этом случае $\delta(n)<\delta(m)$. В силу (9) имеем:

$$\omega_i(\delta(n)) = \omega(\delta(m))\frac{2}{\delta(m)}\delta(n).$$

3. $n < m$. В этом случае $\delta(n) > \delta(m)$. В силу (9) имеем:

$$\omega_i(\delta(n)) = 2\omega(\delta(m)).$$

Функция $\omega(\delta)$ не возрастает при убывании $\delta$, а $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает с ростом $\delta$. Поэтому из рассмотренных трех случаев следует, что частный модуль непрерывности $\omega_i(\delta(n))$ функции $f$ в области определения функции $f$ определяется равенством:

$$\omega_i(\delta(n)) = 2\omega(\delta(n)). \tag{10}$$

установленное равенство вместе с неравенством (6) доказывает утверждение 3*а*.

Рассмотрим теперь случай $\delta \neq \delta(n)$.

Так как $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает с ростом $\delta$, а функция $\omega(\delta)$ не возрастает при убывании $\delta$, в силу соотношения (9) для функции $f$ ее частный модуль непрерывности $\omega_i(\delta)$ на каждом отрезке $I_m$ оценивается сверху

$$\omega_i(\delta) \leq 2\omega(\delta) \tag{11}$$

Из неравенств (10), (11), применяя соотношение (6), получаем утверждение 3*б* свойства. □

Доказательство непредставимости функции $f_{\omega,g}$ в виде суперпозиции

$$F\left(h_1(x_1^1,\dots,x_t^1),\dots,h_s(x_1^s,\dots,x_t^s)\right),$$

(вторая часть утверждения теоремы 1) основывается на оценках коммуникационной сложности дискретных функций, аппроксимирующих интересующую нас непрерывную функцию. Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть $\mathcal{Z}$ обозначает множество всех вещественных чисел. Пусть

$$df : \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{k} \to \mathcal{Z}$$

есть дискретная функция. Произвольное взаимно однозначное отображение конечного множества $G$ вещественных чисел на множество $\Sigma^{e(n)}$ двоичных последовательностей длины $e(n)$ будем называть кодированием множества $G$.

**Определение 1.** Будем называть дискретную функцию $df$ $(n, e(n))$-функцией, если для произвольной последовательности $v \in \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{k}$ значение $df(v)$ может быть закодировано двоичной последовательностью длины не более, чем $e(n)$.

Пусть $f$ – это произвольная непрерывная функция, определенная в кубе $[0,1]^k$. Положим $\alpha(n) = \min\left\{f(x)\ |x \in \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]^k\right\}$; $\beta(n) = \max\left\{f(x)\ |x \in \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]^k\right\}$. На отрезке $[\alpha(n),\beta(n)]$ – области значений $f(x)$ – рассмотрим множество точек (решетку) $\mathcal{D}_{\varepsilon(n)}$ с шагом $\varepsilon(n)$:

$$\mathcal{D}_{\varepsilon(n)} = \left\{\alpha_i \mid \alpha_i = \alpha(n) + \varepsilon(n)i,\ i \in \left\{0,1,\dots,\lfloor\frac{\beta(n)-\alpha(n)}{\varepsilon(n)}\rfloor\right\}\right\} \cup \{\beta(n)\}.$$

**Определение 2.** Пусть $f(x_1, \dots, x_k)$ – непрерывная в кубе $[0,1]^k$ функция. Будем называть дискретную функцию $df(v_1, \dots, v_k)$ $\varepsilon(n)$-аппроксиматором для функции $f(x_1, \dots, x_k)$, если для произвольной последовательности $v = (v_1, \dots, v_k) \in \Sigma^n \times \dots \times \Sigma^n$ выполняется

$$|f(b(v)) - df(v)| \le \varepsilon(n).$$

Непосредственно из определения $\varepsilon(n)$-аппроксиматора следует свойство.

*Свойство* 3. Пусть $df$ – это $\varepsilon(n)$-аппроксиматор функции $f$. Тогда $df$ является $(n, e(n))$-функцией, где $e(n) = O(\log 1/\varepsilon(n))$.

Перейдем к описанию коммуникационной вычислительной модели, используемой в данном доказательстве. Начнем с описания коммуникационной модели для вычисления булевой функции $g_n$, определяющей коэффициенты нашей функции $f_{\omega,g}$.

Два вычислителя $P_u$ и $P_w$ получают свои входные последовательности согласно выбранному разбиению $\mathrm{pat}(n,k)$ (см. определение разбиения $\mathrm{pat}(n,k)$ в пар. 2) входной последовательности $v$ булевой функции $g_n$. Начало $u$ входной последовательности $v$ подается на вход $P_u$, а окончание $w$ входной последовательности $v$ – на вход $P_w$.

Вычисление булевой функции $g_n$ производится согласно протоколу $\psi(\mathrm{pat}(n,k))$ следующим образом. Вычислитель $P_u$ посылает сообщение $m$ (двоичное слово) вычислителю $P_w$. Вычислитель $P_w$ вычисляет и выдает значение $g_n(u,w)$. Коммуникационная сложность $C_\psi$ коммуникационного протокола $\psi(\mathrm{pat}(n,k))$ – это длина $|m|$ сообщения $m$.

Коммуникационная сложность $C_{g_n}(\mathrm{pat}(n,k))$ булевой функции $g_n$ – это $\min\{C_\psi |\ \psi(\mathrm{pat}(n,k))$ *вычисляет* $g_n\}$.

**Лемма 1.** *Для булевой функции* $g_n \in g$ *выполняется*

$$C_{g_n}(\mathrm{pat}(n,k)) \ge k(n-1) - \log kn.$$

**Доказательство.** Булевой функции $g_n(u,w)$ соответствует коммуникационная матрица $CM_{g_n}$ размерности $2^{kl(n,k)} \times 2^{kd(n,k)}$, $(u,w)$-й элемент которой равен $g_n(u,w)$.

Используя тот факт, что $C_{g_n}(\mathrm{pat}(n,k)) = \lceil \log \mathrm{nrow}(CM_{g_n}) \rceil$, где $\mathrm{nrow}(CM_{g_n})$ – это число попарно различных строк матрицы $CM_{g_n}$ (см. [9]), и тот факт, что для булевой функции $g_n$ верно, что $\mathrm{nrow}(CM_{g_n}) = 2^{kl(n,k)} \ge 2^{k(n-1)}/(kn)$, мы получаем утверждение леммы. □

Для вычисления дискретной функции $df(v)$ будем использовать следующую коммуникационную модель. Пусть, как и ранее, $\mathrm{pat}(n,k)$ – это разбиение входной последовательности $v$, определенной в пар. 2 ($v = (u,w)$). Пусть вычислители $P_u$ и $P_w$ получают свои входы $u$ и $w$ согласно разбиению $\mathrm{pat}(n,k)$.

Вычисление дискретной функции $df(v)$ производится согласно протоколу $\phi(\mathrm{pat}(n,k))$ следующим образом. Вычислитель $P_u$ посылает сообщение $m$ (двоичное слово) вычислителю $P_w$. Вычислитель $P_w$ вычисляет и выдает значение $df(v)$. Коммуникационная сложность $C_\phi$ коммуникационного протокола $\phi(\mathrm{pat}(n,k))$ – это длина $|m|$ сообщения $m$.

Коммуникационную сложность $C_{df}(\mathrm{pat}(n,k))$ дискретной функции $df(v)$ определим следующим образом:

$$C_{df}(\mathrm{pat}(n,k)) = \min\{C_\phi : \phi(\mathrm{pat}(n,k)) \text{ вычисляет } df(v)\}.$$

**Определение 3.** Коммуникационную сложность $C_f(\mathrm{pat}(n,k),\varepsilon(n))$ $\varepsilon(n)$-аппроксимации функции $f$ определим следующим образом:

$C_f(\mathrm{pat}(n,k),\varepsilon(n)) = \min\{C_{df}(\mathrm{pat}(n,k)) : df(v) - \varepsilon(n)$-аппроксиматор функции $f\}$.

**Лемма 2.** *Для $\varepsilon(n) < \omega(\delta(n))$, для произвольного $\varepsilon(n)$-аппроксиматора $df$ функции $f_{\omega,g}$ выполняется*

$$C_{g_n}(\mathrm{pat}(n,k)) \le C_f(\mathrm{pat}(n,k),\varepsilon(n)).$$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы неверно, то есть выполняется неравенство

$$C_{g_n}(\mathrm{pat}(n,k)) > C_f(\mathrm{pat}(n,k),\varepsilon(n)). \tag{12}$$

Пусть дискретная функция $df$ такова, что $C_{df}(\mathrm{pat}(n,k)) = C_f(\mathrm{pat}(n,k),\ \varepsilon(n))$. Из неравенства (12) следует, что для коммуникационных матриц $CM_{g_n}$ и $CM_{df}$ размерности $2^{kl(n,k)} \times 2^{kd(n,k)}$, $(u,w)$-й элемент которых равен $g_n(u,w)$ и $df(u,w)$ соответственно, выполняется

$$\mathrm{nrow}(CM_{g_n}) > \mathrm{nrow}(CM_{df}).$$

Из последнего неравенства следует, что существуют две последовательности $u$ и $u'$ такие, что две строки $row_{g_n}(u)$ и $row_{g_n}(u')$ матрицы $CM_{g_n}$ различны, но две строки $row_{df}(u)$ и $row_{df}(u')$ матрицы $CM_{df}$ одинаковы. Это означает, что существует последовательность $w$, для которой выполняются

$$\begin{aligned} g_n(u,w) &\ne g_n(u',w), && (13)\\ df(u,w) &= df(u',w). && (14)\end{aligned}$$

Пусть для определенности $g_n(u,w)=1$, а $g_n(u',w)=0$. Обозначим $v=(u,w)$, $v' = (u',w)$. Тогда в силу определения функции $f_{\omega,g}$ имеем:

$$\begin{aligned} f_{\omega,g}(b(v)) &= \omega(\delta(n)), && (15)\\ f_{\omega,g}(b(v')) &= -\omega(\delta(n)). && (16)\end{aligned}$$

В силу определения $\varepsilon(n)$-аппроксиматора для функции $f_{\omega,g}$ и свойства (2) выполняется

$$\begin{aligned} |f_{\omega,g}(b(v)) - df(v)| &\le \varepsilon(n) < \omega(\delta(n)), && (17)\\ |f_{\omega,g}(b(v')) - df(v')| &\le \varepsilon(n) < \omega(\delta(n)). && (18)\end{aligned}$$

Из предположения, что $df(v) = df(v')$ и соотношений (15), (16), (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned} 2\omega(\delta(n)) &= |f_{\omega,g}(b(v)) - f_{\omega,g}(b(v'))| \le \\ &\le |f_{\omega,g}(b(v)) - df(v)| + |f_{\omega,g}(b(v')) - df(v')| < 2\omega(\delta(n)).\end{aligned}$$

Противоречие доказывает, что $df(v) \ne df(v')$. $\square$

Пусть $dh_i : \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{t} \to \mathcal{Z}$, $\iint$ и $DF : \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{k} \to \mathcal{Z}$ – это такие дискретные функции, что:

$$DF(v_1,\ldots,v_k) = F(dh_1(v_1^1,\ldots,v_t^1),\ldots,dh_s(v_1^s,\ldots,v_t^s)),$$

где функция $F(y_1,\ldots,y_s)$ – произвольная непрерывная функция.

**Лемма 3.** *Для дискретной функции* $DF(v_1,\dots,v_k)$ *выполняется*

$$C_{DF}(\mathrm{pat}(n,k)) \le \sum_{i=1}^{s} C_{dh_i}(\mathrm{pat}(n,k)).$$

**Доказательство.** Пусть $P_u^i$, $P_w^i$ и $\phi_i(\mathrm{pat}(n,k))$ $(i \in 1 \le i \le s\ )$ – соответственно вычислители и коммуникационный протокол, вычисляющие дискретную функцию $dh_i$.

Коммуникационный протокол $\phi^*(\mathrm{pat}(n,k))$, вычисляющий функцию $DF$, состоит из вычислителей $P_u^*$ и $P_w^*$. Вычислитель $P_u^*$ $(P_w^*)$ состоит из вычислителей $P_u^i$ $(P_w^i)$, $i \in 1 \le i \le s$ . Для каждой пары $u, w$ входов протокол $\phi^*(\mathrm{pat}(n,k))$ моделирует (независимо друг от друга) работу протоколов $\phi_1(\mathrm{pat}(n,k))$, $\phi_2(\mathrm{pat}(n,k)),\dots$, $\phi_s(\mathrm{pat}(n,k))$, вычисляющих дискретные функции $dh_1$, $dh_2$, $\dots$, $dh_s$ соответственно. Сообщение $m$ вычислителя $P_u^*$ к вычислителю $P_w^*$ состоит из сообщений $m_1, m_2, \dots, m_s$ вычислителей $P_u^1, P_u^2, \dots, P_s^i$ соответственно. При этом общее сообщение составляется таким образом, чтобы вычислитель $P_w^*$ мог однозначно декодировать составляющие $m_1, m_2, \dots, m_s$. Например, для каждого $n$ все сообщения $m_i$ $(1 \le i \le s\ )$ можно дополнять до общей длины нулями справа.

Вычислитель $P_w^*$, получив сообщение от вычислителя $P_u^*$ и свою часть входной последовательности $w$, вычисляет выходные значения $y_1, \dots, y_s$ протоколов $\phi_1(\mathrm{pat}(n,k))$, $\phi_2(\mathrm{pat}(n,k))$, $\dots$ $\phi_s(\mathrm{pat}(n,k))$. После этого вычислитель $P_w^*$ вычисляет и выдает значение $F(y)$, $y = (y_1, \dots, y_s)$. □

**Лемма 4.** *Пусть для функций* $\omega_1, \omega_2$, *удовлетворяющих условиям теоремы 1, для* $\omega(\delta) = \omega_2(\omega_1(\delta))$ *непрерывная функция* $f_{\omega,g}(x_1,\dots,x_k)$ *представима в виде суперпозиции*

$$F\left(h_1(x_1^1,\dots,x_t^1),\dots,h_s(x_1^s,\dots,x_t^s)\right),$$

*где функция* $F \in \mathcal{H}_{\omega_2}^s$, *а* $\{h_i(x_1,\dots,x_t) : 1 \le i \le s\ \} \subset \widehat{\mathcal{H}}_{\omega_1}^t$. *Пусть для* $\varepsilon(n) = \omega_1(\delta(n)) / \log \dfrac{1}{\omega_1(\delta(n))}$ *дискретные функции* $dh_1,\dots,dh_s$ *являются* $\varepsilon(n)$*-аппроксиматорами непрерывных функций* $h_1,\dots,h_s$ *соответственно.*

*Тогда существует* $\varepsilon'(n) < \omega(\delta(n))$ *такое, что*

$$C_f(\mathrm{pat}(n,k), \varepsilon'(n)) = o(n).$$

**Доказательство.** В доказательстве функцию $f_{\omega,g}$ будем обозначать символом $f$. Покажем, что существует такое $\varepsilon'(n) < \omega(\delta(n))$, что дискретная функция

$$DF(v_1,\dots,v_k) = F(dh_1(v_1^1,\dots,v_t^1),\dots,dh_s(v_1^s,\dots,v_t^s))$$

является $\varepsilon'(n)$-аппроксиматором функции $f$ и

$$C_{DF}(\mathrm{pat}(n,k)) = o(n). \tag{19}$$

Пусть $v = (v_1,\dots,v_k) \in \Sigma^n \times \dots \times \Sigma^n$ – произвольная последовательность. Покажем, что существует $\varepsilon'(n) < \omega(\delta)$ со свойством:

$$|f(b(v)) - DF(v_1,\dots,v_k)| \le \varepsilon'(n). \tag{20}$$

Обозначим $x = (x_1,\dots,x_k) = b(v) = (a(v_1),\dots,a(v_k))$ . Так как для $i \in \{1,2,\dots,s\}$ функция $dh_i$ является $\varepsilon(n)$-аппроксиматором непрерывной функции $h_i$, то

$$|h_i(x_1^i,\dots,x_t^i) - dh_i(v_1^i,\dots,v_t^i)| \le \varepsilon(n).$$

Так как функция $\omega(\delta)$ убывает при убывании $\delta$, получаем

$$|F\left(h_1(x_1^1,\ldots,x_t^1),\ldots,h_s(x_1^s,\ldots,x_t^s)\right) - \\ - F(dh_1(v_1^1,\ldots,v_t^1),\ldots,dh_s(v_1^s,\ldots,v_t^s))| \le \\ \le \omega_F(\varepsilon(n)) \le \frac{M_1}{\left(\log\frac{1}{\omega_1(\delta(n))}\right)^\gamma}\left(\omega_1\left(\delta(n)\right)\right)^\gamma = \varepsilon'(n).$$

Начиная с некоторого $n_0$ для $n > n_0$, выполняется

$$\varepsilon'(n) < \omega(\delta(n)).$$

Последнее неравенство доказывает соотношение (20).

Рассмотрим произвольную дискретную функцию $dh$ из $\{dh_1, \ldots, dh_s\}$. Для доказательства неравенства (19) достаточно показать, что

$$C_{dh}(\mathrm{pat}(n,k)) = o(n). \tag{21}$$

Тогда неравенство (21) вместе с леммой 3 дают доказательство утверждения леммы.

Рассмотрим коммуникационную матрицу $CM_{dh}(n)$ функции $dh$. Матрица $CM_{dh}(n)$ – это $2^{tl(n,k)} \times 2^{td(n,k)}$ матрица, $(u,w)$ элементами которой являются значения $dh(u,w)$. Пара $(u,w)$ определяется разбиением $\mathrm{pat}(n,k)$ входной последовательности $(v_1,\ldots,v_k)$.

$$C_{dh}(\mathrm{pat}(n,k),\varepsilon(n)) = \lceil\log \mathrm{nrow}(CM_{dh}(n))\rceil, \tag{22}$$

Для $(n,e(n))$-функции $dh$ число $\mathrm{nrow}(CM_{dh}(n))$ попарно различных строк матрицы $CM_{dh}(n)$ оценивается сверху следующим образом:

$$\mathrm{nrow}(CM_{dh}(n)) \le \min\left\{2^{tl(n,k)}, 2^{e(n)2^{td(n,k)}}\right\}. \tag{23}$$

Так как функция $dh$ является $\varepsilon(n)$-аппроксиматором соответствующей ей функции $h$, то в силу выбора $\varepsilon(n)$, условия (3) теоремы (1), свойства 3 и того, что $\delta(n) = 1/((n+1)2^n)$, имеем:

$$e(n) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon(n)}\right) = O\left(\log\frac{1}{\omega_1(\delta(n))}\right) = \\ = o\left(\left(\log\frac{1}{\delta(n)}\right)^{1-t/k}\right) = o\left(n^{1-t/k}\right). \tag{24}$$

Из определения разбиения $\mathrm{pat}(n,k)$ имеем: $l(n,k) = n - \lceil\dfrac{\log nk}{k}\rceil$, $d(n,k) = \lceil\dfrac{\log nk}{k}\rceil$. Применяя соотношения (23), (24) для равенства (22), получаем доказательство неравенства (21). □

Из утверждений лемм 4, 2 и 1 следует утверждение теоремы 1.

## 5. Комментарий к коммуникационному методу доказательства

В.И. Арнольд [14] и А.Н. Колмогоров [15] доказали следующий факт (мы приводим результат из [15]). Произвольная непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{C}$ может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций от одной переменной и арифметической операции сумма:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{2k+1} f_i \left( \sum_{j=1}^{k} h_{ij}(x_j) \right). \tag{25}$$

Как показано в работе [16], функции $h_{ij}$ из формулы (25) являются гельдерывыми. Коммуникационный метод доказательства теоремы 1 дает информационное объяснение тому факту, что на первом уровне суперпозиции можно брать функции из класса Гельдера и нельзя брать функции из класса Дини и менее гладкие функции. Функции из класса Гельдера аппроксимируются соответствующими $(n, n)$-функциями. При преобразовании входных последовательностей такие функции не теряют информации. Функции $h_i$, удовлетворяющие условию (3) теоремы 1, аппроксимируются $(n, e(n))$-функциями, где $e(n) \prec n$. Такие дискретные преобразователи могут терять сложную входную информацию и никакие преобразователи на последующих уровнях не могут восстановить ее.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-07-00449).

**Summary**

*F.M. Ablayev, S.G. Ablayeva.* Superposition Problem of Continuous Functions. A Communication Approach.

In function theory the superposition problem is the problem of representing a continuous function $f(x_1, \ldots, x_k)$ in $k$ variables as a composition of “simpler” functions. This problem stems from Hilbert’s thirteenth problem. In computer science, good formalization for the notion of function composition is a formula.

The article considers real-valued continuous functions in $k$ variables in the cube $[0,1]^k$ from the class $\mathcal{H}^k_{\omega_p}$ with a special modulus of continuity $\omega_p$ defined in the article. $\mathcal{H}^k_{\omega_p}$ is a superset of Lipschitz’ class of functions. An explicit function $f \in \mathcal{H}^k_{\omega_p}$ is presented, which is hard in the sense that it cannot be represented in the following way as a formula: zero level (input) gates associated with variables $\{x_1, \ldots, x_k\}$ (different input gates can be associated with the same variable $x_i \in \{x_1, \ldots, x_k\}$), on the first level of the formula, arbitrary $t$ variable functions from $\mathcal{H}^t_{\omega_p}$ for $t < k$ are allowed, while the second (output) level may compute any Lipschitz’ function.

We apply communication complexity for constructing such a hard explicit function. Remarkably, one can show the existence of such a function using the “non constructive” proof method known in the function theory as Kolmogorov’s entropy method.

**Key words:** superposition problem of continuous functions, Lipschitz function, Dini function, discrete approximation of continuous functions, communication complexity.

### Литература

1. *Hilbert D.* Mathematische Probleme // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. – 1900. – P. 253–297; Gesammelete Abhandlungen. 1935. – Bd. 3. – P. 290–329.
2. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
3. *Витушкин А.Г.* К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 95, Вып. 4. – С. 243–250.

4. *Колмогоров А.Н.* Оценки минимального числа элементов $\varepsilon$-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // УМН. – 1955. – Т. 10, Вып. 1. – С. 192–194.

5. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

6. *Марченков С.С.* Об одном методе анализа суперпозиции непрерывных функций // Проблемы кибернетики. – 1980. – Вып. 37. – С. 5–17.

7. *Асарин Е.А.* О сложности равномерных приближений непрерывных функций // УМН. – 1984. – Т. 39, Вып. 3. – С. 157–170.

8. *Гашков С.Б.* Сложность приближенного вычисления действительных чисел, непрерывных функций и линейных функционалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – М.: Моск. гос. ун-т, 1992.

9. *Yao A.* Some Complexity Questions Related to Distributive Computing // Proc. of the 11th ACM Symposium on the Theory of Computing. – 1979. – P. 209–213.

10. *Колмогоров А.Н.* Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. of Internat. Congress of Mathrmaticians 1962. – Stockholm, 1963. – P. 352–356.

11. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* $\varepsilon$-энтропия и $\varepsilon$-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. – 1959. – Т. 14, № 2. – С. 3–86.

12. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М: Наука, 1986. – 384 с.

13. *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Наука, 1960. – 624 с.

14. *Арнольд В.И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, Вып. 4. – С. 679–681.

15. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, Вып. 5. – С. 953–956.

16. *Lorentz G.* Metric Entropy, Widths and Superpositions Functions // Amer. Math. Monthly. – 1962. – V. 69, No 6. – P. 469–485.

Поступила в редакцию
15.01.08

**Аблаев Фарид Мансурович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической кибернетики Казанского государственного университета.

E-mail: *Farid.Ablayev@ksu.ru*

**Аблаева Светлана Гумеровна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.