КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра вычислительной физики и моделирования физических процессов

А.В. МОКШИН, А.Ф. ХАЙРУТДИНОВА, Р.М. ХУСНУТДИНОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

УДК 536
ББК 22.31

Принято на заседании кафедры вычислительной физики и моделирования физических процессов
Протокол № 5 от 1 июля 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры образовательных технологий в физике КФУ
Л.А. Нефедьев;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем КФУ
Ф.М. Гафаров

Мокшин А.В., Хайрутдинова А.Ф., Хуснутдинов Р.М.,
Статистическая физика и термодинамика / А.В. Мокшин, А.Ф. Хайрутдинова, Р.М. Хуснутдинов. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 26 с.

Настоящее учебно-методическое пособие составлено для более углубленного изучения студентами трех основных законов термодинамики, основных понятий термодинамики и статистической физики, метода статистических ансамблей Гиббса и основных его конкретных приложений.

ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Статистическая физика и термодинамика» - один из наиболее важных в курсе теоретической физики. Он посвящен изучению и усвоению студентами закономерностей физических явлений и процессов, происходящих в макроскопических системах. В этих системах число частиц велико, и в силу вступают так называемые статистические или вероятностные закономерности, которые управляют поведением огромного числа постоянно взаимодействующих и сталкивающихся друг с другом молекул.

Основную суть раздела составляет глубокая идея Дж. Гиббса о «статистических ансамблях», позволяющая свести вычисление реальных средних значений физических величин к вычислению средних по статистическим ансамблям. Метод ансамблей Гиббса демонстрирует глубочайшую эвристическую ценность устремлений человеческого ума, постигшего и отыскавшего законы в хаотических коллизиях в жизни мельчайших объектов сложных макроскопических систем. Он предоставил мощный математический аппарат теории вероятностей в руки физиков-теоретиков и открыл практически безграничные возможности для изучения свойств любых реальных физических объектов.

Как показывает опыт, в учебных практических занятиях студенты хорошо усваивают связь законов сохранения со свойствами и структурой статистических ансамблей Гиббса и фундаментальную роль закона сохранения энергии в формировании структуры термодинамических законов. Меньшую уверенность они обретают в вычислении статистических свойств многочастичных систем, таких как статистические интегралы и термодинамические параметры и функции. Поэтому на практических занятиях с нашей точки зрения, этим вопросам следует уделять наибольшее внимание.

Понятия и законы статистической физики и термодинамики играют огромную роль в формировании у студентов научного мировоззрения. В частности, материал раздела способствует пониманию и формированию статистических, вероятностных представлений, связанных со случайными, хаотическими процессами в макроскопических системах.

ТЕРМОДИНАМИКА

1. Найти работу в изотермическом (T=*const*), изобарическом (p=*const*)и изохорическом (V=*const*) процессах для идеального газа.
2. Решить задачу *№1* для Ван-дер-Ваальсового газа.
3. С помощью уравнения I-го закона термодинамики аналитически доказать, что дифференциалы работы $dA = pdV$ и количества тепла $dQ = cdT$ не являются полными дифференциалами.
4. Найти термические коэффициенты α, β_T, γ для идеального классического газа.
5. Решить задачу *№4* для Ван-дер-Ваальсового газа.
6. Решить задачу *№4* для газа с I-м уравнением состояния Дитеричи.
7. Решить задачу *№4* для газа со 2-м уравнением состояния Дитеричи.
8. Решить задачу *№1* для газа с уравнением состояния Клаузиуса.
9. Решить задачу *№1* для газа с уравнением состояния Воля.
10. Доказать термодинамическое тождество $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$.
11. С помощью тождества в задаче *№10* найти связь между термическими коэффициентами $\alpha = p\beta_T\gamma$.
12. Пользуясь уравнением, связывающим термическое и калориметрическое уравнения состояния, найти внутреннюю энергию Ван-дер-Ваальсового газа.
13. Найти решение задачи *№12* для газа с I-м уравнением состояния Дитеричи.
14. Решить задачу *№12* для газа со 2-м уравнением состояния Дитеричи.
15. Решить задачу *№12* для газа с уравнением состояния Клаузиуса.
16. Решить задачу *№12* для газа с уравнением состояния Воля.
17. Пользуясь элементарными представлениями молекулярно-кинетической теории газов, получить уравнение состояния идеального газа.

18. Вычислить работу испарения трех молей воды при переходе в пар при температуре $100°C$ и нормальном атмосферном давлении. Определить сообщаемое при этом тепло.

Примечание: пар считать – а) идеальным газом; б) ван-дер-ваальсовым газом.

19. Найти вириальные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* для Ван-дер-Ваальсового газа $pV = \nu RT\left(1 + \frac{A}{V} + \frac{B}{V^2} + \frac{C}{V^3} + \frac{D}{V^4} + \cdots\right)$ считая Ван-дер-Ваальсовые поправки в уравнении состояния малыми.

20. Найти критические параметры для Ван-дер-Ваальсового газа.

21. Решить задачу *№20* для газа с I-м уравнением состояния Дитеричи.

22. Решить задачу *№20* для газа со 2-ым уравнением состояния Дитеричи.

23. Найти критический параметр $S = {\nu RT_k}/{p_k V_k}$ для: а) Ван-дер-Ваальсового газа; б) для газа с I-м уравнением состояния Дитеричи.

24. Найти разность теплоемкостей $C_p - C_V$ для: а) Ван-дер-Ваальсового газа; б) для газа с I-м уравнением Дитеричи; в) для газа с уравнением состояния Клаузиуса; г) для газа с уравнением состояния Воля.

25. Найти уравнение политропического процесса для Ван-дер-Ваальсового газа.

26. Найти уравнения политроны для газов с уравнениями состояния: а) Дитеричи – I; б) Дитеричи – 2; в) Клаузиуса; г) Воля.

27. Выразить разность теплоемкостей $C_p - C_V$ через термические коэффициенты α, β_T и γ.

28. Воздух объемом *12* $м^3$ $\left(\gamma = {C_p}/{C_V} = 1.4\right)$ при начальном давлении p_2=*3 атм* и конечном давлении p_2 =*1 атм*, начальной температуре $t_1 = 45°C$ расширяется в политропическом процессе до четырехкратного начального объема. Найти показатель политропы *n*, работу расширения газа, количества тепла и изменение внутренней энергии в этом процессе.

Примечание: воздух считать – а) идеальным газом; б) Ван-дер-Ваальсовым газом.

29. Вычислить энтропию газа с термическим уравнением состояния: а) Ван-дер-Ваальсова; б) I – Дитеричи; в) 2 – Дитеричи; г) Клаузиуса; д) Воля.

30. Пользуясь первым законом термодинамики, найти условие, при котором изотерма совпадает с адиабатой.

31. Газ NO с начальным объемом V_1 диффундирует в газе SO_2 объема V_2. Газы находятся при одинаковом давлении $p = const$ и температуре $t = 0°C$. Найти изменение энтропии газов, считая газы: а) идеальными; б) Ван-дер-Ваальсовыми.

32. Показать, что энтропия возрастает в следующих процессах: а) при выравнивании температур двух одинаковых масс жидкости; б) при выравнивании давлений в адиабатическом процессе двух одинаковых масс (идеального, Ван-дер-Ваальсового) газа.

33. С помощью второго закона термодинамики показать, что при линейной зависимости давления от температуры теплоемкость системы не зависит от объема.

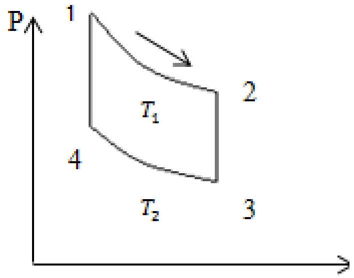
34. Известно, что у воды в интервале $0 < t < 4°C$ коэффициент объемного расширения $\alpha < 0$. Показать, что в этом температурном интервале при адиабатическом сжатии вода охлаждается, а не нагревается, как все жидкости.

35. Показать, что для Ван-дер-Ваальсового газа изотермическая сжимаемость $\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ и коэффициент объемного расширения $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ в критической точке обращаются в бесконечность.

36. Вычислить КПД цикла Стирлинга, состоящего из 2-х изотерм и 2-х изохор, для идеального газа. Сравнить полученный результат с КПД цикла Карно.

37. Решить задачу *№36* для газов с уравнениями состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) 2-го уравнения состояния Дитеричи; в) Воля.

38.Найти КПД цикла, изображенного на рисунке:

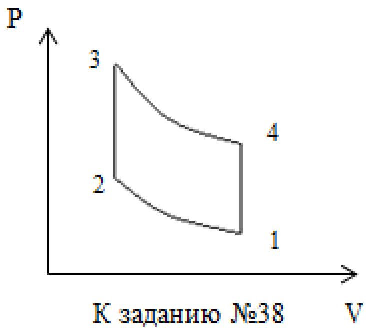


К заданию №36

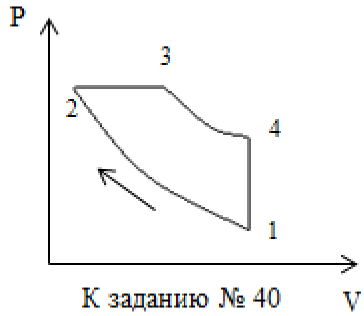
участок *1-2* – адиабатическое сжатие; *2-3* – изохорическое охлаждение; *3-4* – адиабатическое расширение; *4-1* – изохорическое нагревание. Газ считать идеальным.

39.Найти решение задачи *№38* для газа с уравнениями состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) I-е уравнение состояния Дитеричи; в) 2-е уравнение состояния Дитеричи; г) Воля.

40.Найти КПД цикла, состоящего из участков адиабатического сжатия (участок *1-2*), изобарического расширения (*2-3*), адиабатического расширения (*3-4*), изохорического охлаждения (*4-1*). Газ считать идеальным.



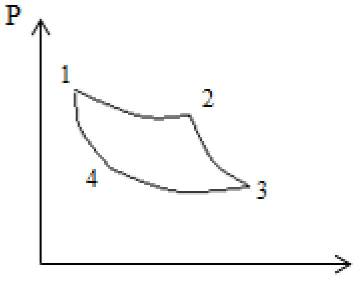
К заданию №38



К заданию № 40

41.Решить задачу *№ 40* для газа с уравнениями состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) I-м уравнением состояния Дитеричи; в) 2-м уравнением состояния Дитеричи; г) Воля.

42. Найти КПД цикла, состоящего из двух адиабат (сжатие и расширение) и двух изотерм (сжатие и расширение), для идеального газа.



К заданию № 42

43. Найти решение задачи *№ 42* для газа с уравнением состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) 2-м уравнением Дитеричи; в) Воля.

44. Найти термодинамическое тождество $\left(\partial T / \partial V\right)_S = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$.

45. Доказать термодинамическое тождество $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = 1$.

<u>*Примечание:*</u> воспользоваться уравнением связи теплоемкостей C_P и C_V .

46. Доказать следующее свойство теплоемкости C_V: $C_V = -T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$.

47. Доказать следующее свойство теплоемкости $C_P = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$.

48. Доказать следующее уравнение связи теплоемкостей C_P и C_V:

$$C_P / C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S .$$

49. Найти выражение, связывающее теплоемкость C_V с термическими коэффициентами $C_V = VT\frac{\alpha^2 \beta_S}{\beta_T\,(\beta_T - \beta_S)}$.

50. Найти выражение, связывающее теплоемкость C_P с термическими коэффициентами $C_P = \frac{TV\alpha^2}{\beta_T - \beta_S}$.

51.Найти уравнение, связывающее теплоемкостей C_p и C_V с термическими коэффициентами $C_p - C_V = {TV\alpha^2}/{\beta_T}$.

52.Доказать следующее уравнение $C_p - C_V = T\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \partial V}\right) / \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial V^2}\right)_T$, где $\mathcal{F}$ - свободная энергия.

53.Найти термодинамические потенциалы $\mathcal{F}, G$ и $\mathcal{H}$ для идеального газа.

54.Найти термодинамические потенциалы $\mathcal{F}, G$ и $\mathcal{H}$ для газа с уравнением состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) 2-м уравнением состояния Дитеричи; в) Воля.

55.Найти термодинамические потенциалы $\mathcal{F}, G$ и $\mathcal{H}$ для термодинамической равновесной плазмы.

56.Найти химический потенциал μ для идеального газа.

57.Для плазмы вычислить следующие термодинамические характеристики:

а) найти работу в изотермическом процессе;

б) термические коэффициенты α, β_T и γ ;

в) теплоемкости C_p и C_V;

г) химический потенциал μ.

58.Найти химический потенциал μ для газа с уравнением состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) 2-м уравнением Дитеричи; в) Воля.

59.Определить термодинамические потенциалы при независимых термодинамических переменных: а) p и $\mathcal{H}$; б) T и $\mathcal{F}$; в) pиG. Установите все термодинамические соотношения, вытекающие из свойства полноты дифференциала термодинамического потенциала.

60.Найти связь разности теплоемкостей C_p и C_V с энтропией

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T.$$

61.Для равновесного излучения абсолютно черного тела найти следующие термодинамические свойства: а) теплоемкости C_p и C_V ; б) термические коэффициенты α, β и γ; в) найти термодинамические потенциалы $\mathcal{F}, G$ и $\mathcal{H}$; г) химический потенциал μ.

62. Определить термодинамический потенциал Ω при независимых термодинамических переменных T, V и μ. Укажите его свойства.

63. Показать, что в состоянии равновесия энтропия адиабатически изолированного идеального газа, находящегося под постоянным давлением, является максимальной.

<u>*Примечание:*</u> в качестве независимых переменных следует взять температуру *(T)* и давление *(P)*.

64. Вычислить коэффициент Джоуля-Томсона для обратимого эффекта для газа с уравнением состояния: а) I-Дитеричи; б) 2-Дитеричи; в) Воля.

65. Решить задачу *№ 64* для необратимого эффекта Джоуля-Томсона.

66. Вывести формулу барометрического распределения по высоте: $P(h) = p_0 \exp\left({-mgh}/{kT}\right)$ для идеального газа. Исходить из условия постоянства температуры и химического потенциала.

67. Решить задачу *№ 66* для газа с уравнением состояния: а) Ван-дер-Ваальса; б) I-Дитеричи; в) 2-Дитеричи; г) Воля.

68. Пользуясь выражением для работы $dA = -\vec{E}d\vec{P}$, найти термическое и калорическое уравнения состояния идеального диэлектрика $\left({\partial U}/{\partial \vec{P}} = 0\right)$, где $\vec{P}$ – вектор поляризации.

69. Пользуясь выражением для работы $dA = -\vec{H}d\vec{M}$, найти термическое и калорическое уравнения состояния идеального парамагнетика.

<u>*Примечание:*</u> для идеального парамагнетика ${dU}/{d\vec{M}} = 0$.

70. Найти разность теплоемкостей $C_{\vec{H}} - C_{\vec{M}}$ для идеального парамагнетика.

71. Найти разность теплоемкостей $C_{\vec{E}} - C_{\vec{P}}$ для идеального диэлектрика.

72. Найти уравнение адиабаты для идеального: а) диэлектрика; б) парамагнетика.

73. Найти зависимость точки кипения воды от давления, считая, водяной пар: а) идеальным газом; б) газом Ван-дер-Ваальса.
74. Пользуясь решением задачи *№ 73* найти зависимость точки кипения воды от высоты над уровнем мирового океана, считая пар: а) идеальным газом; б) Ван-дер-Ваальсовым газом.
75. В обратимом изотермическом процессе объем газа удвоился. Какому уменьшению энергии газа это соответствует, если газ считать: а) идеальным; б) Ван-дер-Ваальсовым.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

1. Укажите фазовые переменные для следующих систем:

   а) свободная частица;

   б) линейный гармонический осциллятор;

   в) двумерный гармонический осциллятор;

   г) трехмерный гармонический осциллятор.

2. Определите фазовую траекторию частицы, движущейся с трением, пропорциональным скорости:

   а) в одномерном случае;

   б) для двумерного движения;

   в) для трехмерного случая.

3. Покажите, что фазовая траектория линейного гармонического осциллятора в фазовом пространстве является эллипсом.

   Примечание: найдите фазовую траекторию, исходя из: а) закона сохранения энергии; б) уравнений движений классической механики.

4. Найти фазовую траекторию:

   а) двумерного гармонического осциллятора;

   б) трехмерного гармонического осциллятора.

5. С помощью уравнений движения найти фазовую траекторию гармонического осциллятора при: а) одномерном; б) двумерном; в) трехмерном движении с трением, пропорциональном скорости.

6. Найти фазовую траекторию одномерного движения при падении с высоты h материальной точки m в поле сил тяжести Земли

   а) при движении без трения;

   б) с трением, пропорциональным скорости;

   в) при движении под углом α с начальной скоростью ϑ_0.

7. Найти фазовый объем:

   а) линейного гармонического осциллятора;

   б) двумерного гармонического осциллятора;

   в) трехмерного гармонического осциллятора.

8. Найти фазовый объем линейного гармонического осциллятора, обладающего дипольным электрическим моментом $p = -ex$, во внешнем однородном электрическом поле ε_0.
9. С помощью статистического интеграла Z для идеального газа в каноническом ансамбле Гиббса найти его термическое и калорическое уравнение состояния.
10. С помощью статистического интеграла идеального газа найти термодинамические потенциалы $\mathcal{F}, G$ и N и химический потенциал μ идеального газа.
11. Рассматривается система *N* – невзаимодействующих двухатомных молекул, заключенных в объеме *V* при температуре *T*. Гамильтониан отдельной молекулы имеет вид: $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2}\right) + K|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2, K > 0$

Для этой системы найти:

а) статистический интеграл;

б) свободную энергию;

в) энтропию;

г) теплоемкости C_p и C_V;

д) термическое и калорическое уравнение состояния;

12. Для двухатомного газа, описанного в задаче *№ 11*, вычислить:

а) внутреннюю энергию, энтальпию и потенциал Гиббса;

б) химический потенциал.

13. Для двухатомного газа в задаче *№ 11* вычислить:

а) среднеквадратичное расстояние между атомами внутри одной молекулы $\langle|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2\rangle$;

б) величины $\langle|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\rangle$ и $\langle|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3\rangle$.

14. Вычислить статистический интеграл системы *N* – гармонических осцилляторов:

а) в двумерном случае;

б) для трехмерного движения;

в) в одномерном случае.

15. Система N одномерных гармонических осцилляторов находится во внешнем одномерном электрическом поле ε_0. Каждый осциллятор заряжен и обладает дополнительной энергией $+ex\varepsilon_0$. Для этой системы найти:

а) статистический интеграл и внутреннюю энергию;

б) свободную энергию и энтропию;

в) потенциал Гиббса и энтальпию;

г) теплоемкости C_p и C_V;

д) химический потенциал.

16. Для системы, описанной в задаче *№ 15* найти:

а) среднее значение координаты осциллятора $< x >$;

б) средне-квадратичную флуктуацию $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ координаты осциллятора;

в) среднее значение потенциальной энергии осциллятора $\langle U(x) \rangle$;

г) средне-квадратичную флуктуацию кинетической энергии осциллятора $\langle (E_{\text{кин}} - \langle E_{\text{кин}} \rangle)^2 \rangle$.

17. Гамильтониан отдельной двухатомной молекулы имеет вид: $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2}\right) + E|r_{12} - r_0|$, где $r > 0$, $E > 0$, r_{12} - относительное расстояние между атомами в молекуле, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульс первого и второго атомов, соответственно. Для системы N – таких двухатомных молекул вычислить:

а) статистический интеграл;

б) свободную энергию;

в) энтропию;

г) внутреннюю энергию;

д) теплоемкости C_p и C_V;

е) термическое уравнение состояния.

18. Для систем из задачи *№ 17* найти:

а) потенциал Гиббса;

б) химический потенциал;

в) термические коэффициенты.

19. Найти большой статистический интеграл:

а) идеального газа;

б) системы линейных гармонических осцилляторов;

в) системы двумерных гармонических осцилляторов;

г) системы трехмерных гармонических осцилляторов;

20. Для реального классического газа (см. лекцию по статистическому обоснованию уравнения Ван-дер-Ваальса) найти:

а) свободную и внутреннюю энергию;

б) энтропию;

в) теплоемкости C_p и C_V;

г) термические коэффициенты α, β_T и γ.

21. Для системы из задачи № 20 вычислить:

а) потенциал Гиббса и энтальпию;

б) химический потенциал.

22. Для квантового канонического ансамбля Гиббса показать, что энтропию σ можно записать в следующем виде:

$$\sigma = -\sum_S p_S ln p_S \,,$$

где

$$p_S = Z^{-1} e^{-E_S/\tau}, \quad Z = \sum_S e^{-E_S/\tau}, \quad \sigma = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau}\right)_V, \ \mathcal{F} = -\tau ln z \,.$$

23. Классический идеальный газ помещен в однородное гравитационное поле и находится в тепловом равновесии. Для него найти:

а) классический и статистический интеграл Ƶ;

б) среднюю энергию на один атом;

в) теплоемкости C_p и C_V на один атом;

24. Найти среднеквадратичную $\left(\vartheta_{\text{ср.кв}} = \sqrt{3kT/m}\right)$ и наиболее вероятную $\left(\vartheta_{\text{н.в}} = \sqrt{2kT/m}\right)$ скорости движения частицы в максвелловском газе.

25. Показать, что среднеквадратичная флуктуация энергии в максвелловском газе равна $\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{3}{2} k^2 T^2$.

26. Показать, что если для релятивистской свободной частицы (необходимо учесть, что ее энергия равна $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$) выполняются соотношения для средних $\left\langle \frac{c^2 p_x^2}{E} \right\rangle = \left\langle \frac{c^2 p_y^2}{E} \right\rangle = \left\langle \frac{c^2 p_z^2}{E} \right\rangle = kT$.

27. Найти статистический интеграл релятивистского идеального газа $\left(E(p) = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}\right)$. Рассмотреть два предельных случая:

а) нерелятивистский случай $(m_0 c^2 \gg kT)$

б) ультрарелятивистский случай $(m_0 c^2 \ll kT)$.

28. Для задачи *№ 27.2* найти среднее значение энергии и давление.

29. Для задачи *№ 25* найти:

а) теплоемкость C_p и C_V;

б) термические коэффициенты α, β_T и γ;

в) химический потенциал Гиббса.

30. Найти большой статистический интеграл для релятивистского идеального газа (*см. №№ 27, 29*).

31. Для системы в задаче *№ 30* вычислить:

а) большой термодинамический потенциал;

б) свободную энергию;

в) давление;

г) энтропию;

д) среднее (термодинамическое) число частиц;

е) теплоемкости C_p и C_V;

ж) термические коэффициенты α, β_T и γ;

з) химический потенциал μ.

32. Известно соотношение $\vec{p} = \alpha\vec{E}$ между внешним электрическим полем $\vec{E}$ и дипольном моментом $\vec{p}$, где α – молекулярная поляризуемость. Найти среднюю электрическую поляризацию среды.

33. Определить распределение плотности частиц идеального газа в цилиндре радиуса *R*, вращающемся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Из известных соотношений определить давление газа на станки цилиндра.

34. В квантовой теории Эйнштейна теплоемкости твердого тела – I внутренняя энергия кристалла равна $U = N\hbar\omega\left\{e^{-\hbar\omega/kT} - 1\right\}$. Найти:

а) теплоемкости C_p и C_V;

б) энтропию;

в) свободную энергию твердого тела.

35. В рамках квантовой теории теплоемкости тела Дебая показать, что при высоких температурах формула Дебая приводит к классическому закону Дюлонга-Пти.

36. Квантовая статистическая сумма двухатомного газа равна $Z = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left(-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{J}\right)$, где l- вращательное квантовое число, $J = ma^2$– момент инерции молекулы, $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса атомов, образующих молекулу. Для <u>предельного случая низких температур</u> $\left(kT \ll \hbar^2/J\right)$ вычислить *Z*, ограничиваясь первыми двумя вкладами с l=0,1. Для этого случая найти также:

а) свободную энергию;

б) энтропию;

в) теплоемкость C_r;

г) химический потенциал (по формуле $\mu_r = T\ln\frac{N}{Z}$).

37. Для вырожденного электронного газа металла по формуле $\Omega = -\frac{2}{3}U$, где U – внутренняя энергия (значения см. в лекции) найти большой термодинамический потенциал Ω. По известному Ω вычислить для $T \neq 0°K$:

   а) энтропию;

   б) давление электронного газа.

38. Исходя из приближения, согласно которому основной вклад в давление звезды – белого карлика вносит полностью вырожденный электронный газ (нерелятивистский случай) найти связь между равновесным радиусом R и массой звезды M в виде соотношения: $RM^{1/3} = const$.

39. Показать, что квантовая статистическая сумма колебательных степеней свободы двухатомного газа равна $Z_\vartheta = exp\left(\hbar\omega/_{2kT}\right)\left\{exp\left(\hbar\omega/_{kT}\right) - 1\right\}^{-1}$. Пользуясь этим выражением, найти:

   а) свободную энергию $\mathcal{F}$;

   б) внутреннюю энергию;

   в) энтропию;

   г) теплоемкость колебательных степеней свободы.

40. Большой термодинамический потенциал Ω для идеального газа равна $\Omega = -\frac{2}{3}U$ (для нерелятивистского случая) и $\Omega = -\frac{1}{3}U$ (для ультрарелятивистских частиц, например, для фотонов). Пользуясь этим указанием, для равновесного излучения абсолютно черного тела (см. закон излучения Планка) вычислить:

   а) большой термодинамический потенциал Ω;

   б) давление p;

   в) энтропию σ.

41. Вывести закон излучения Планка для двумерного пространства. Используя полученный при этом результат, вывести закон Стефана-Больцмана для двумерного пространства.

42. Волнообразные (коллективные) возбуждения для спиновых степеней свободы в твердом теле (спиновые волны, ферромагноны в ферромагнетике) характеризуются квадратичным (по волновому вектору k) законом дисперсии $\omega(k) = Ak^2$, где A – некоторая константа. Действуя как в теории Дебая, найти:

   а) внутреннюю энергию идеального газа магнонов;

   б) показать, что при низких температурах $(kT \ll \hbar\omega_{max})$ эти возбуждения вносят вклад в теплоемкость, пропорциональный $T^{3/2}$.

43. Двухуровневая квантовая подсистема с уровнями E_1 и E_2 находится в равновесном тепловом резервуаре. Считая, что она описывается каноническим ансамблем Гиббса, найти:

   а) вероятности первого и второго состояний;

   б) квантовую статистическую сумму;

   в) свободную и внутреннюю энергию;

   г) энтропию;

   д) теплоемкость этой системы.

44. Парамагнитный ион в кристалле с электронным спином $S = \frac{1}{2}$ имеет во внешнем однородном магнитном поле H_0 два уровня энергии $E_{1,2} = g\beta H_0 S_z$, где $S_z = \pm {}^1/_2$, g – фактор, магнетон Бора. Магнитный момент вдоль поля равен $\mu_z = -g\beta S_z$. Найти:

   а) вероятности квантовых состояний;

   б) среднее значение энергии;

   в) среднее значение магнитного момента;

   г) теплоемкость.

45. Решить задачу *№ 44* для спина $S = 1$ (трехуровневая система).

46. Линейный классический ангармонический осциллятор имеет потенциальную энергию $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4$, где α, β – константы. Считая константы ангармоничности α, β малыми, найти $(-\infty < x < +\infty)$:

а) нормированную функцию распределения смещений;

б) среднее равновесное значение координаты осциллятора $< x >$;

в) внутреннюю энергию системы N – осцилляторов;

г) свободную энергию N – осцилляторов;

д) энтропию;

е) теплоемкость системы.

47. Статистическая квантовая система имеет N различных состояний, в которых может находиться с одинаковой вероятностью. Найти вероятность нахождения в одном из состояний.

48. Система находится в любой точке трехмерного пространства (x, y, z) с плотностью вероятности $\omega(x, y, z)$ в ограниченном объеме с координатами $0 \ll x \ll a, 0 \ll y \ll b, 0 \ll z \ll c$. Найти нормированное распределение $\omega(x, y, z)$, если:

а) $\omega(x, y, z) = const$;

б) $\omega(x, y, z) = x * const$;

в) $\omega(x, y, z) = xy^2 const$;

г) $\omega(x, y, z) = \ xy^2 z^3 const$.

49. Рассматривается квантовая система, обладающая уровнями с квантовым числом $n = 0,1,2 \dots \infty$. Вероятность n-го состояния пропорциональная $\frac{1}{n!} exp(-na)$, где a - константа. Найти нормированное распределение.

50. Распределение Максвелла по скорости переписать по форме нормированного распределения по энергии частицы для следующих случаев:

а) для одномерного движения;

б) для двумерного движения;

в) для трехмерного движения.

51. Вычислить $\langle \vartheta_x^5 \rangle$ и $\langle \vartheta_x^4 \rangle$ для одномерного Максвелловского газа.

52. Длина волны де-Бройля связана со скоростью частицы соотношением $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\vartheta}$. Максвелловское распределение частиц по скоростям записать в виде распределения по длинам волн де-Бройля:

а) в одномерном;

б) двумерном;

в) трехмерном случае.

53. Пользуясь решением задачи *№ 52*, найти:

а) наиболее вероятную длину волны де-Бройля в максвелловском газе;

б) среднее значение длины волны де-Бройля;

в) среднеквадратичную флуктуацию дебройлевской длины волны.

54. Молекула с массой *m* находится в земной атмосфере. Вычислить среднюю высоту $\langle Z \rangle$, среднеквадратичную флуктуацию $\langle (\Delta Z)^2 \rangle$ для молекул в поле сил тяжести.

55. Молекулярный газ находится во внешнем потенциальном поле с энергией $U(\varphi) = -a cos\varphi$, где a - константа, φ - угол между осью молекулы и направлением внешнего поля (меняется от 0 до 2π). Найти распределение молекул по скоростям среднее значение $\langle cos\varphi \rangle$, потенциальную энергию и теплоемкость газа молекул.

56. Молекула газа, находящаяся во вращающейся с угловой скоростью ω центрифуге, обладает кинетической энергией $m\omega^2 r^2/2$. Найти:

а) нормированное распределение по расстоянию *r* от оси вращения;

б) среднеквадратичное расстояние $\langle r^2 \rangle$;

в) наиболее вероятное расстояние *r*.

Указания: а) Размер цилиндра центрифуги равен *R*. Вычисления вести в цилиндрической системе координат (r, z, φ), где $0 \leq r < \infty$,$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, z – любое.

57.В сосуде объемом *V* находится газ из частиц, энергия которых связана с импульсом соотношением $\varepsilon(p) = ap$. Найти:

а) статистический интеграл;

б) свободную и внутреннюю энергию;

в) энтропию;

г) теплоемкость C_p и C_V;

д) уравнение состояния;

е) химический потенциал μ газа.

58.Найти функцию распределения вырожденного ферми-газа во внешнем поле сил с потенциальной энергией *U*.

59.Вычислить среднеквадратичную флуктуацию трехмерного гармонического кристалла согласно модели Дебая при высоких и низких температурах.

60.Одномерный максвелловский газ заряженных частиц находится во внешнем однородном электрическом поле E_0. Для *N* – частиц найти:

а) нормированную функцию распределения;

б) вычислить среднюю скорость $\langle\vartheta_x\rangle$, $\langle\vartheta_x^2\rangle$, плотность электрического тока и среднее значение энергии на степень свободы;

в) величину γ, характеризующую асимметрию распределения

$$\gamma = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta_x (\Delta\vartheta_x)^3 f(\vartheta_x), \sigma = \langle\Delta\vartheta_x^2\rangle, \Delta\vartheta_x = \vartheta_x - \langle\vartheta_x\rangle .$$

Сравнить полученный результат со случаем ангармонического кристалла;

г) величину ε, определяющую крутизну распределения

$$\varepsilon = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta_x f(\vartheta_x)(\Delta\vartheta_x)^4 - 3.$$

61. При какой плотности электронов в газе с температурой $T = 10^6\ ^\circ K$ будут подчиняться классической статистике Больцмана? Какие выводы отсюда можно сделать для физики плазмы?
62. Определить, какая статистика (Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна) должна применяться к следующим частицам: α – частица, β–частица, γ – квант, изотоп He^3, молекула H_2, ион $^6Li^+$ и ион $^7Li^+$.
63. Вычислить среднеквадратичную флуктуацию $\langle \Delta M^2 \rangle = \langle (M - M_{\text{ср}}^2) \rangle$ полного магнитного момента системы из N–магнитных моментов в следующих приближениях:

   а) классическая система;

   б) квантовая система спинов $S = 1/2$.
64. Показать, что кубическая флуктуация энергии в каноническом ансамбле Гиббса определяется выражением
$$\langle \Delta E^3 \rangle = \langle (E - \langle E \rangle)^3 \rangle = k^2 \left\{ T^4 \left(\frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V + 2T^3 C_V \right\}.$$

   <u>Указание</u>: применить метод вычисления, изложенный в лекции по нахождению среднеквадратичной флуктуации энергии для этого ансамбля.
65. Колебательные движения в твердом теле описываются следующим дисперсионным законом $\omega(k) = ak^n$. Они дают вклад в удельную теплоемкость, так как при высокой температуре играют роль тепловых возбуждений. Показать, что при низких температурах удельная теплоемкость пропорциональна.

   <u>Указание</u>: следовать выводу формулы для теплового излучения или для удельной теплоемкости в дебаевской модели твердого тела.

66. Вычислить теплоемкость одномерного и двумерного кристаллов, используя способ, развитый в трехмерной модели квантовой теории Дебая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иродов, И. Е. Физика макросистем. Основные законы: учебное пособие / И. Е. Иродов. - 4-е изд. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 207 с.
2. Основы статистической физики: Учебное пособие / А.Г. Браун, И.Г. Левитина. - 3-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 120 с.
3. Каплан, И. Г. Межмолекулярные взаимодействия. Физическая картина, методы расчета и модельные потенциалы / И. Г. Каплан ; пер. с англ. - Эл.изд. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 394 с.
4. Максвелл, Дж. К. Труды по кинетической теории / Дж. К. Максвелл ; пер. с англ. - Эл.изд. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 406 с.
5. Кондратьев, А. С. Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории / А. С. Кондратьев, П. А. Райгородский. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 256 с.
6. Иродов, И. Е. Физика макросистем. Основные законы: учебное пособие / И. Е. Иродов. - 5-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 207 с.
7. Кузнецов, С. И. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие/ С. И. Кузнецов; Томский политехнический университет. - 2-е изд., перераб. и доп. - Томск: Изд-во ТПУ, 2007. - 126 с.
8. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физик: Учеб.пособие для вузов в 5 т. / Д. В. Сивухин. - 5-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 544 с.