Казанский федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра алгебры и математической логики

Ю.А. Альпин

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Учебное пособие

Казань — 2015

УДК 519

Рекомендовано на заседании кафедры алгебры и математической логики
Протокол №8 от 24 апреля 2015 г.
Рецензент: кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики С.Н. Ильин

Альпин Ю.А.

Неотрицательные матрицы / Ю.А. Альпин — Казань: Казан. ун-т, 2015. — 58 с.

Учебное пособие предназначено для студентов Института математики и механики КФУ. Изложены основы теории неотрицательных матриц, включая описание примитивных матриц и их экспонентов, построение нормальной формы импримитивной и разложимой матрицы, комплекс теорем Перрона–Фробениуса о спектре и собственных векторах неотрицательных матриц, асимптотику степеней примитивной матрицы. Представлены элементы идемпотентной линейной алгебры. Приведено большое число теоретических и вычислительных задач.

Оглавление

Введение

Изучение матриц с неотрицательными элементами со времени появления в начале 20-го века основополагающих работ Перрона и Фробениуса привело к возникновению стройной и красивой теории. Развитие теории неотрицательных матриц обеспечивается как внутренними мотивами, так и приложениями в теории случайных процессов и математической экономике. О неотрицательных матрицах написано значительное количество книг (например, [1], [2]). На русском языке с теорией неотрицательных матриц можно познакомиться, соединив соответствующие главы из книг [3], [4], прибавив к ним книгу [5], а также книгу [6], которую в большой мере можно считать книгой о неотрицательных матрицах. Современные университетские учебники по алгебре и геометрии всё чаще включают главы о неотрицательных матрицах ([7], [8]).

Особенностью изложения теории неотрицательных матриц в данном пособии, в отличие от упомянутых выше источников, является систематическое использование в определениях и доказательствах языка графов. Граф неотрицательной матрицы отражает её комбинаторную структуру, то есть взаимное расположение в ней положительных и нулевых элементов. Именно комбинаторная структура неотрицательной матрицы отвечает за важнейшие особенности её спектра и собственных векторов.

Пособие содержит многочисленные задачи разной степени трудности, дополняющие изложение теории. Некоторые несложные утверждения приведены без доказательства в расчёте на то, что читатель докажет их самостоятельно. В таких случаях формулировка результата заканчивается значком $\square$.

Глава 1
Комбинаторика неотрицательных матриц

§ 1. Графы и портреты матриц

Ориентированные графы. Ориентированным графом (орграфом) называется пара $(V, \mathcal{E})$, где V — непустое множество *вершин*, $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ — множество *дуг*. Таким образом, дуга — это упорядоченная пара вершин. Обычно будем считать, что вершины пронумерованы натуральными числами, то есть множеством вершин служит множество $N = \{1, \ldots, n\}$. В дальнейшем, говоря о графах, мы всегда будем иметь ввиду ориентированные графы. Дуги можно записывать различно: ij или $i \to j$. Вершина i называется *началом*, а вершина j — *концом* дуги ij. Говорят, что дуга ij *выходит* из i и *входит* в j (или — *ведёт* из вершины i в вершину j). Дуга ii называется *петлёй*. На рисунке графа дуги графа изображаются стрелками. Запись $i \to j$ иногда заменяет выражение "существует дуга, ведущая из i в j".

Путём длины k в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 \ldots i_{k+1}, \tag{1}$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ — дуга, $m = 1, \ldots, k$. Здесь i_1 — *начало*, i_{k+1} — *конец* пути. Выражение "(i, j)-путь" означает путь с началом в вершине i и концом в вершине j. Путь, у которого конец совпадает с началом, называется *замкнутым* путём или *контуром*. *Длина* пути равна количеству его дуг. Очевидно, длина незамкнутого пути равна числу вершин минус единица, длина контура равна числу вершин.

Введём операцию произведения путей. Произведение путей $p = i_1 \ldots i_k$ и $q = j_1 \ldots j_m$ определено, если последняя вершина p совпадает с первой вершина q. В этом случае

$$pq = i_1 \ldots i_k j_2 \ldots j_m = i_1 \ldots i_{k-1} j_1 \ldots j_m.$$

Произведение путей ассоциативно в том смысле, что если произведение $(pq)r$ определено, то произведение $p(qr)$ тоже определено и $(pq)r = p(qr)$. Из ассоциативности следует, что скобки в произведении любого числа путей можно опустить. Заметим, что для пути pqr путь pr существует в точности тогда, когда q — контур.

Незамкнутый путь называется *простым*, если все его вершины различны, Контур называется *простым*, если все его вершины различны, кроме первой и последней.

Лемма 1. *В графе с n вершинами*

1) *длина простого (i, j)-пути при $i \neq j$ не больше, чем $n - 1$;*
2) *длина простого контура не больше, чем n;*
3) *если существует (i, j)-путь, то существует и простой (i, j)-путь.*

Доказательство. Длина (i, j)-пути при $i \neq j$ равна числу вершин пути минус единица, а длина контура равна числу вершин в контуре. Отсюда и из определения простого пути следуют пункты 1) и 2). Чтобы доказать 3), рассмотрим произвольно взятый (i, j)-путь. Если он не простой, то его можно разложить в произведение вида $r_1 q r_2$, где q — контур (множитель r_1 или r_2 могут и отсутствовать). Удалив контур q, получим более короткий (i, j)-путь $r_1 r_2$. Если и он не простой, то продолжим удаление контуров. Ясно, что на некотором шаге получится простой (i, j)-путь. $\square$

Говорят, что из вершины i *достижима* вершина j, если существует (i, j)-путь. Граф называется *сильно связным* или *неразложимым*, если из любой вершины достижимы все вершины, то есть любые две вершины взаимодостижимы. Граф без дуг называется *пустым*. Заметим, что пустой одновершинный граф считается разложимым.

Пусть даны два графа. Говорят, что первый из них — подграф второго, если каждая вершина и каждая дуга первого графа принадлежат второму графу. Любое множество $S \subseteq N$ вершин графа *порождает* подграф, вершинами которого являются элементы S, а дугами — все дуги исходного графа, соединяющие вершины из S. Ради простоты письма множество вершин и порождённый им подграф будем обозначать одной буквой. Термин "подграф" мы по умолчанию относим именно к подграфам, порождённым подмножествами вершин.

Множество S вершин (и порождённый им подграф) называется *замкнутым*, если не существует дуг, ведущих из вершин S в вершины, не лежащие в S.

Лемма 2. *Граф с $n \geq 2$ вершинами разложим тогда и только тогда, когда он содержит собственный замкнутый подграф.*

Доказательство. Если подграф $S \subset N$ замкнут, то, очевидно, из вершин этого подграфа недостижимы вершины из $N \setminus S$. И наоборот, если граф разложим, то для некоторой вершины i достижимы не все вершины, а лишь некоторое собственное подмножество вершин $S(i) \subset N$. Легко убедиться, что множество $S(i)$ замкнуто. $\square$

Наряду с понятием подграфа существенно понятие *факторграфа* по разбиению множества вершин. Вершины факторграфа – это классы разбиения, из класса S в класс T ведет дуга, если в исходном графе существует дуга с началом в S и концом в T. Следующие утверждения почти очевидны.

Пусть $S \subset N$ — некоторое подмножество вершин графа. Рассмотрим разбиение множества N на классы, одним из которых является множество S, а остальные классы суть одноэлементные множества $\{i\}$, $i \notin S$. О факторграфе по этому разбиению будем говорить, что он *соответствует* подграфу, порождённому множеством S.

Графы матриц. Графом матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется орграф с множеством вершин $N = \{1, \ldots, n\}$, в котором

$$i \to j \iff a_{ij} \neq 0.$$

Если каждой дуге ij графа матрицы приписать число a_{ij}, то получится наглядное изображение матрицы в виде *нагруженного* графа. И наоборот, всякий нагруженный граф очевидным образом определяет матрицу.

Пусть $S \subset N$. Символом $A[S]$ обозначают главную подматрицу матрицы A, расположенную в строках и столбцах с номерами из S. С другой стороны, подмножество S определяет подграф графа матрицы A. Между главными подматрицами A и подграфами графа A имеется очевидное взаимно однозначное соответствие.

Матрица A называется *неразложимой*, если её граф неразложим (сильно связен). В противном случае говорят, что матрица A разложима.

Весом пути $i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}$ в графе матрицы A называется произведение весов дуг пути, то есть число $a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}}$. Ясно, что

$$a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j} \neq 0 \iff \text{в графе } A \text{ есть путь } i l_1 l_2 \ldots l_{k-1} j. \qquad (2)$$

Согласно правилу умножения матриц (i, j)-элемент матрицы A^k определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1, \ldots, l_{k-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \ldots a_{l_{k-1} j}, \qquad (3)$$

где суммирование ведётся по всевозможным последовательностям индексов $l_1, \ldots, l_{k-1}$.

Используя понятия графа матрицы и веса пути, можно сказать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \text{ сумма весов всех } (i, j)\text{-путей длины } k. \qquad (4)$$

Матрица A называется *неотрицательной* (пишется $A \geq 0$), если её элементы — вещественные неотрицательные числа. Матрица с положительными элементами называется *положительной* (пишется $A > 0$). Сумма и произведение неотрицательных (положительных) матриц являются, понятно, неотрицательными (положительными) матрицами.

Графы матриц особенно эффективны при изучении неотрицательных матриц. Если $A = (a_{ij})$ — неотрицательная матрица, то

$$i \to j \iff a_{ij} > 0,$$

$$a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j} > 0 \iff \text{в графе } A \text{ есть путь } i l_1 l_2 \ldots l_{k-1} j.$$

Отсюда и из формулы (3) следует лемма, являющаяся основой применения графов в теории неотрицательных матриц:

Лемма 3. *Пусть $A = (a_{ij})$ — неотрицательная матрица. Тогда*

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \iff \textit{в графе } A \textit{ существует } (i, j)\textit{-путь длины } k.$$

Если существует (i, j)-путь при $i \neq j$, то по лемме 1 существует (i, j)-путь длины $k \leq n - 1$. Проверить неразложимость неотрицательной матрицы можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Матрица $A \geq 0$ порядка $n \geq 2$ неразложима тогда и только тогда, когда*

$$(E + A)^{n-1} > 0. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 1 и 3 следует, что из вершины i достижима вершина $j \neq i$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} > 0$ для некоторого $k \leq n - 1$. То есть тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(n-1)} > 0. \tag{6}$$

Для неразложимости A необходимо и достаточно, чтобы условие (6) выполнялось для любых неравных i и j. Нетрудно проверить, что это требование эквивалентно неравенству (5). □

Матрица $A \geq 0$ называется *примитивной*, если существует показатель k, при котором $A^k > 0$. Граф называется *примитивным*, если из любой вершины в любую другую можно перейти путём некоторой длины k. В силу леммы 3 матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф. В частности, $A^k > 0 \iff$ в графе A любая вершина k-достижима из любой другой вершины.

Нетрудно видеть, что в сильно связном графе любая вершина принадлежит некоторому простому контуру. Вершина называется *ациклической*, если она не принадлежит никакому контуру (в частности, вокруг неё нет петли). Ациклическую вершину можно эквивалентно определить как вершину, не взаимодостижимую ни с какой вершиной. Ясно, что все вершины являются ациклическими лишь тогда, когда в графе нет контуров. Вершина, из которой не выходят дуги, называется *тупиковой*.

Напомним, что матрица A называется нильпотентной, если $A^k = 0$ для некоторого показателя k.

Предложение 1. *Матрица $A \geq 0$ нильпотентна $\Leftrightarrow$ в графе A нет контуров.*

Доказательство. Если в графе матрицы есть контур, то, очевидно есть и путь любой длины. Согласно лемме 3 тогда $A^k \neq 0$ для всех k. Значит, в графе нильпотентной матрицы нет контуров.

Теперь предположим, что в графе A нет контуров. Тогда нет и путей длины n, поскольку любой путь длины n содержит контур. Снова обращаясь к лемме 3, получаем $A^n = 0$. $\square$

Задача 1. Сильно связный граф, в каждую вершину которого входит ровно одна дуга, является простым контуром.

Задача 2. Сильно связный граф, из каждой вершины которого выходит ровно одна дуга, является простым контуром.

Задача 3. Пусть A — неотрицательная матрица. Докажите, что $a_{ii}^{(k)} > 0 \iff$ вершина i принадлежит контуру длины k. При этом, если A — (0,1)-матрица, то число $a_{ii}^{(k)}$ равно количеству контуров длины k, проходящих через вершину i.

Задача 4. Если матрица неразложима, то у неё нет нулевых строк и столбцов.

Задача 5. Неотрицательная нильпотентная матрица непременно содержит нулевую строку и нулевой столбец.

Задача 6. Если неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n содержит меньше n ненулевых элементов, то A разложима. Почему?

Задача 7. Пусть неразложимая матрица $A \geq 0$ порядка n содержит ровно n ненулевых элементов. Какой у неё граф?

Задача 8. Если матрица A неразложима, или примитивна, или нильпотентна, то тем же свойством обладает матрица A^T.

Задача 9. Пусть степень минимального многочлена матрицы A равна m. Тогда в лемме 1 и теореме 1 можно заменить n на m.

Задача 10. Матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq 0$ неразложима $\Leftrightarrow$ $bc > 0$.

Задача 11. Неразложимая матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq 0$ примитивна $\Leftrightarrow$ $a + d > 0$.

Задача 12. В сильно связном графе с $n \geq 2$ вершинами всякая вершина (и любая дуга) принадлежит простому контуру длины ≥ 2.

Задача 13. Матрица $A \geq 0$ порядка $n \geq 2$ неразложима $\Leftrightarrow$ матрица $E + A$ примитивна.

Задача 14. Для любого $n \geq 2$ существует нильпотентная матрица A порядка n, такая, что $A^{n-1} \neq 0$.

Задача 15. Факторграф сильно связного графа всегда сильно связен. $\square$

Подобие матриц и изоморфизм графов. Говорят, что матрица A *перестановочно подобна* матрице B, если A получается из B перестановкой строк, соединённой с такой же перестановкой столбцов. Результат преобразования записывается в виде $A = UBU^T$, где матрица U содержит в каждой строке и каждом столбце ровно одну единицу, а остальные элементы равны нулю. Матрица этого типа называется матрицей перестановки или *переставляющей* матрицей.

Легко проверить, что переставляющие матрицы одного порядка образуют группу относительно умножения. При этом для матрицы перестановки U обратной матрицей является транспонированная матрица U^T.

Существует взаимно однозначное соответствие между переставляющими $n \times n$-матрицами и перестановками (биекциями) на множестве $N = \{1, \ldots, n\}$. А именно, переставляющей матрице $U = (u_{ij})$ соответствует перестановка $\sigma : N \to N$, такая, что

$$\sigma(i) = j \iff u_{ij} = 1. \tag{7}$$

Два графа с множеством вершин N называются *изоморфными*, если существует такая перестановка σ на N, что

$$i \to j \text{ в первом графе} \iff \sigma(i) \to \sigma(j) \text{ во втором графе}. \tag{8}$$

Отображение σ в этом случае называется изоморфизмом графов. С содержательной точки зрения изоморфные графы отличаются лишь нумерацией вершин. Условие изоморфизма (8) можно понимать так: если в первом графе заменить номер i вершины на номер $\sigma(i)$, то получим второй граф.

Пусть U — матрица перестановки σ. Прямыми вычислениями проверяется, что

$$A = UBU^T \iff a_{ij} = b_{\sigma(i)\sigma(j)}\ \forall\, i, j. \tag{9}$$

Равенства в правой части (9) означают, что:

1) σ — изоморфизм графа A на граф B ($a_{ij} \neq 0 \iff b_{\sigma(i)\sigma(j)} \neq 0$, откуда следует условие (8))

2) изоморфизм σ сохраняет веса дуг, то есть вес дуги $i \to j$ в графе A равен весу дуги $\sigma(i) \to \sigma(j)$ в графе B.

И наоборот, свойства 1) и 2) биекции σ кратко записываются в виде равенств $a_{ij} = b_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для любых i, j. Таким образом, из (9) следует

Теорема 2. *Матрицы A и B перестановочно подобны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм графа A на граф B, сохраняющий веса дуг.*

Замечание 1. Как было сказано выше, матрицы можно рассматривать как нагруженные графы. Изоморфизм нагруженных графов естественно определить как перестановку $\sigma : N \to N$, сохраняющую веса дуг. Такие перестановки как раз и описываются равенствами (9). Если принять это определение, то теорему 2 можно сформулировать так: *матрицы A и B перестановочно подобны $\iff$ соответствующие им нагруженные графы изоморфны.*

Задача 16. Переставляющие матрицы— это в точности неотрицательные ортогональные матрицы. То есть,

$$U \geq 0 \text{ и } UU^T = E \iff U\text{— переставляющая матрица.}$$

Задача 17. Отношение перестановочного подобия рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Следовательно, оно разбивает множество всех матриц порядка n на классы перестановочного подобия. Каждый класс содержит конечное множество матриц. Сколько матриц в классах матриц 0, E, E_{ij}, $A = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$?

Портреты матриц. *Портретом* неотрицательной матрицы $A =$

(a_{ij}) называется матрица $B = (b_{ij})$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{ij} > 0, \\ 0, \quad \text{если } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Матрицей смежности графа с вершинами $1, 2, \ldots, n$ называется матрица $B = (b_{ij})$ порядка n, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \to j, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, всякому графу сопоставлена (0,1)-матрица. И наоборот, любая квадратная (0,1)-матрица очевидным образом определяет граф. Ясно, что портрет матрицы A есть матрица смежности графа матрицы A.

Граф и портрет неотрицательной матрицы, будучи более простыми объектами, отражают её важные свойства и дают удобный язык и вычислительное средство для теории неотрицательных матриц.

Символы 0 и 1 в портрете матрицы мы будем считать не натуральными числами, а элементами *булевой алгебры*, в которой сложение и умножение задаются следующими таблицами:

$$\begin{array}{c|c|c} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\ , \qquad \begin{array}{c|c|c} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\ .$$

Нетрудно проверить, что операции в этой алгебре обладают привычными свойствами ассоциативности, коммутативности, а также дистрибутивности умножения относительно сложения (но вычитание не определено).

Будем называть (0,1)-матрицу *булевой*, если с её элементами мы намерены обращаться по правилам булевой алгебры. Для упрощения записи вместо $a \oplus b$ и $a \odot b$ будем писать $a + b$ и ab, так как из контекста будет видно, когда действие происходит в булевой алгебре.

Матрицы над булевой алгеброй складывают и умножают по обычным правилам, при этом сохраняются известные свойства операций с матрицами (с теми же доказательствами).

Обозначим портрет матрицы A символом $\mathrm{Sg}(A)$. Следующее простое утверждение является основой применения булевых матриц в теории неотрицательных матриц.

Лемма 4. *Если A, B — неотрицательные матрицы, то*

1) $\mathrm{Sg}(A + B) = \mathrm{Sg}(A) + \mathrm{Sg}(B)$,

2) $\mathrm{Sg}(AB) = \mathrm{Sg}(A)\mathrm{Sg}(B)$.

Таким образом, если мы желаем знать, как расположены ненулевые элементы в сумме (произведении) неотрицательных матриц, то для этого достаточно вычислить сумму (произведение) их портретов.

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная неотрицательная матрица и булева матрица $B = (b_{ij})$ — её портрет. Из второго утверждения леммы 4 следует, что

$$\mathrm{Sg}(A^k) = B^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Или, на языке элементов,

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \Longleftrightarrow b_{ij}^{(k)} = 1. \tag{10}$$

Задача 18. Докажите, что графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности перестановочно подобны.

Задача 19. Пусть B — булева матрица смежности графа с n вершинами. Докажите, что

1) $(E + B)^m = E + B + \ \ldots\ + B^m, \quad m = 1, 2, \ \ldots;$

2) вершина j достижима из вершины $i \Leftrightarrow\ (B + B^2 + \ldots + B^n)_{ij} = 1$;

3) граф сильно связен $\Leftrightarrow$ все элементы $(E + B)^{n-1}$ равны 1.

Здесь E — булева матрица, диагональные элементы которой равны 1, а прочие равны 0.

§ 2. Примитивные матрицы и графы

Напомним, что матрица $A \geq 0$ называется примитивной, если $A^k > 0$ при некотором показателе k. Граф называется примитивным, если существует такое число k, что из любой вершины в любую другую можно перейти путём длины k. Ясно, что матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф. Назовём матрицу $A \geq 0$ *полупримитивной*, если при некотором показателе k матрица A^k содержит положительный столбец. Это значит, что в графе A есть вершина, достижимая из любой вершины за одно и то же число шагов. Назовём такую вершину *фокусом*, а граф, содержащий фокусы — *полупримитивным*. В полупримитивном графе нет висячих вершин. Следовательно, из каждой вершины выходит путь какой угодно длины. Это значит, что любая степень полупримитивной матрицы не содержит нулевых строк.

Лемма 1. *Если j-й столбец положителен в матрице A^k, то он положителен в A^l при всех $l > k$. Другими словами, если фокус*

j достижим из всех вершин путями длины k, то он достижим и путями длины $l > k$.

Действительно, j-й столбец матрицы A^l равен произведению положительного j-го столбца A^k на матрицу A^{l-k} без нулевых строк. Очевидно, что это произведение является положительным столбцом. $\square$

Следствие 1. *Если $A^k > 0$, то $A^l > 0$ при всех $l > k$.*

Лемма 2. *Из фокуса достижимы лишь фокусы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фокус i достижим из всех вершин за k шагов. Если $i \to j$, то вершина j достижима из всех вершин за $k+1$ шагов и тоже является фокусом. $\square$

Из леммы 1 вытекает, что при любом достаточно большом показателе k столбцы матрицы A^k, отвечающие фокусам, положительны. В частности, *матрица A примитивна, если все вершины её графа — фокусы.* В общем случае согласно лемме 2 имеет место

Предложение 1. *Фокусы полупримитивного графа порождают замкнутый примитивный подграф.*

Отсюда моментально следует

Теорема 1. *Если матрица A полупримитивна и неразложима, то она примитивна.* $\square$

Будем говорить, что вершины i_1 и i_2 *совместимы*, если из этих вершин синхронно, то есть путями одинаковой длины, достижима некоторая общая вершина.

Предложение 2. *Для полупримитивности графа необходимо и достаточно, чтобы любые две его вершины были совместимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть из вершин 1 и 2 синхронно k_1-достижима вершина j, из вершины 3 за k_1 шагов достижима вершина l, из вершин j и l синхронно k_2-достижима вершина m. Тогда, очевидно, из вершин $1, 2, 3$ вершина m достижима за $(k_1 + k_2)$ шагов. Продолжая аналогично, получим, что из вершин $1, 2, \ldots, n$ есть пути длины $k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$ в некоторую вершину p, являющуюся фокусом. $\square$

Из следствия 1 и предложения 2 автоматически получается

Теорема 2. *Матрица $A \geq 0$ примитивна тогда и только тогда, когда она неразложима и любые две вершины в графе A совместимы.*

Задача 1. Пусть в графе матрицы $A \geq 0$ вокруг фокуса j есть петля. Тогда j-й столбец матрицы A^{n-1} положителен. Другими словами, из любой вершины в фокус j можно попасть за $n-1$ шагов.

Задача 2. Покажите на примере, что матрица AB может быть не примитивной при том, что $A \geq 0$ и $B \geq 0$ — примитивные матрицы.

Задача 3. Пусть A и B — неотрицательные матрицы без нулевых строк и столбцов. Если AB — примитивная матрица, то и BA — примитивная матрица.

Задача 4. Пусть A и B — неотрицательные матрицы. Докажите, что

1) если A неразложима, то и $A + B$ неразложима;
2) если A примитивна, то и $A + B$ примитивна.

Задача 5. Пусть матрица $A \geq 0$ такова, что $AA^T > 0$. Докажите, что A полупримитивна.

Задача 6. Пусть матрица A неразложима и имеет положительный элемент на диагонали. Докажите, что A примитивна, причём $A^{2n-2} > 0$. Другими словами, в графе A из любой вершины в любую другую можно попасть за $2n-2$ шагов. Проверьте, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию задачи и докажите, что матрица A^{2n-3} ещё содержит нули. Этот пример показывает, что показатель $2n-2$ в утверждении задачи нельзя уменьшить.

Задача 7. Если вершина i является фокусом в графах матриц A и A^T, то матрица A примитивна.

Задача 8. Докажите, что матрица $A \geq 0$ неразложима тогда и только тогда, когда матрица $E + A$ примитивна.

Задача 9. Назовём *контурным индексом* графа наибольший общий делитель длин контуров графа. Контурным индексом матрицы A будем называть контурный индекс её графа. Докажите, что контурный индекс полупримитивной матрицы равен единице.

Задача 10. Пусть матрица A порядка n имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, причём B и C — положительные матрицы, нулевые блоки не обязательно квадратные. Докажите, что матрица A неразложима. Пусть левый верхний блок имеет l строк и m столбцов. При каких l и m матрица A примитивна? Если примитивна, то как зависит от l и m минимальный показатель k, при котором $A^k > 0$?

§ 3. Форма Фробениуса импримитивной матрицы

В этом параграфе мы установим комбинаторную структуру неразложимой, но не примитивной, матрицы. Такие матрицы называются *импримитивными*.

Разбиение множества вершин графа называется *циклическим*, если факторграф по этому разбиению есть простой контур. Существует нумерация классов циклического разбиения:

$$C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_d, \tag{1}$$

при которой все дуги с началом в классе C_1 ведут в класс C_2, дуги с началом в C_2 ведут в C_3 и так далее; наконец, дуги из C_d ведут в C_1. Назовём описанную нумерацию классов *правильной*. Будем говорить, что класс C_{t+1} *следует* за классом C_t при $t \leq d-1$, класс C_1 следует за C_d.

Пусть для графа матрицы циклическое разбиение существует и правильная нумерация (1) классов получена. Далее перенумеруем вершины графа: вначале вершины класса C_1, потом C_2 и т.д. Произведём перестановку строк и столбцов матрицы соответственно новой нумерации вершин и разобъём полученную матрицу на блоки, соответствующие классам. В результате получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрицу типа (2) будем называть *блочно-циклической*. У такой матрицы нулевые диагональные блоки — квадратные, единственный ненулевой блок блочной строки является правым соседом диагонального блока, в нижней блочной строке единственный ненулевой блок занимает левый нижний угол. Количество блочных строк (и столбцов) называется блочным порядком матрицы. Как видим, циклическое разбиение множества вершин приводит к блочно-циклической форме матрицы.

И наоборот, всякой блочно-циклической матрице формы (2) естественным образом соответствует циклическое разбиение множества вершин её графа. А именно, если $n_1, n_2, \ldots, n_d$ — порядки диагональных блоков, то 1-й класс разбиения состоит из первых n_1 вершин, 2-й класс — из следующих n_2 вершин, и так далее. Граф допускает, вообще говоря, различные циклические разбиения, соответственно, матрица может быть приведена к различным блочно-циклическим формам.

Если граф допускает циклическое разбиение на d классов, то переход из вершины в вершину того же класса возможен, очевидно, лишь за число шагов, кратное d. Определим понятие темпорального подграфа. Множеством вершин темпорального подграфа является класс циклического разбиения, дуга ij в темпоральном подграфе существует, если в графе существует (i,j)-путь длины d.

При возведении блочно-циклической матрицы (2) в степень d получается блочно диагональная матрица

$$A^d = \begin{pmatrix} A_{11}^{(d)} & & & \\ & A_{22}^{(d)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{dd}^{(d)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Назовём диагональные блоки матрицы (3) *темпоральными* подматрицами матрицы (2) (отвечающими данному циклическому разбиению).

Предложение 1. *Если темпоральные подматрицы матрицы типа* (2) *примитивны, то она неразложима.*

Доказательство. Пусть число l так велико, что в матрице A^{ld} диагональные блоки положительны. Тогда матрица A^{ld+1} имеет блочную структуру вида

$$A^{ld+1} = \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \times & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ \times & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причём блоки, отмеченные крестиками, положительны. Это значит, что из любой вершины любого класса циклического разбиения Ω, за $ld+1$ шагов можно перейти в любую вершину следующего класса. Отсюда, конечно, следует, что A неразложима. $\square$

Неотрицательная блочно-циклическая матрица (2) называется *формой Фробениуса* если её темпоральные подматрицы примитивны.

Основная цель этого параграфа – доказать, что всякая неразложимая неотрицательная матрица либо примитивна, либо приводится к форме Фробениуса.

Удобнее рассуждать в графовых терминах. Вернёмся к отношению совместимости вершин и докажем, что для сильно связного графа это отношение является эквивалентностью, причём разбиение на классы совместимости циклично.

Вначале нам потребуется

Лемма 1. *Если из вершины i сильно связного графа синхронно достижимы вершины j и k, то из вершин j и k синхронно достижима вершина i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вершины j и k достижимы из вершины i путями длины l. Поскольку граф сильно связен, то существует путь из j в i некоторой длины p, а также путь из k в i некоторой длины q. Тогда существует контур длины $l+p$

$$i \to \cdots \to j \to \cdots \to i,$$

а также контур длины $l+q$

$$i \to \cdots \to k \to \cdots \to i.$$

Проходя по первому контуру $l+q$ раз, а по второму контуру $l+p$ раз, получим два контура одинаковой длины $(l+p)(l+q)$ с началом i. Удалив из этих контуров начальные отрезки длины l, получим искомые пути из j и k в i одинаковой длины $(l+p)(l+q)-l$. $\square$

Лемма 2. *Бинарное отношение совместимости на множестве вершин сильно связного графа является отношением эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В сильно связном графе нет тупиковых вершин, это обеспечивает рефлексивность. Симметричность видна непосредственно из определения совместимости. Докажем транзитивность. Пусть из вершин i_1 и i_2 k_1-достижима вершина j_1, а из вершин i_2 и i_3 k_2-достижима вершина j_2. Можно считать, что $k_1 = k_2 = k$. Действительно, если, например, $k_1 < k_2$, то пути из i_1 и i_2 в j_1 можно продолжить общим путём длины $k_2 - k_1$. По лемме 1 существуют пути некоторой длины m из j_1 и j_2 в i_2. Следовательно, существуют пути длины $k+m$ из вершин i_1 и i_3 в общую вершину i_2, что и доказывает транзитивность. $\square$

Лемма 3. *Разбиение множества вершин сильно связного графа на классы совместимости является циклическим.*

Доказательство. Пусть дан какой-нибудь класс T. Вершины, дуги из которых ведут в T, совместимы, следовательно, лежат в некотором одном классе S. Следовательно, факторграф нашего графа характеризуется тем, что в каждую его вершину входит ровно одна дуга. Кроме того, он связен, как факторграф связного графа (задача 15, с.11). Используя задачу 1 (с.10), заключаем, что рассматриваемый факторграф является простым контуром. Это доказывает лемму. □

Определим *индекс совместимости* сильно связного графа как количество классов совместимости. Другими словами, индекс совместимости равен максимальному числу попарно несовместимых вершин. *Индекс совместимости неразложимой матрицы* по определению равен индексу совместимости графа этой матрицы.

Теорема 1. *Пусть $A \geq 0$ — неразложимая матрица с индексом совместимости d. Если $d = 1$, то матрица A примитивна. Если $d > 1$, то матрица A некоторой перестановкой рядов приводится к форме Фробениуса.*

Доказательство. Если $d = 1$, то любые две вершины совместимы и матрица A примитивна по теореме 2 (с.15). Пусть $d > 1$. Согласно леммам 2 и 3 имеется циклическое разбиение множества вершин графа матрицы A на классы совместимости. Пусть правильная нумерация $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_d$ классов уже призведена и соответствующая блочно циклическая матрица (2) построена. Докажем, что темпоральные подматрицы матрицы (2) примитивны. Достаточно доказать это для подматрицы $H = A_{11}^{(d)}$. Путь в графе матрицы A приводит из класса C_1 снова в C_1 в точности тогда, когда его длина кратна d. Поскольку граф сильно связен, то для любых $i, j \in C_1$ существует показатель ld, для которого $a_{ij}^{(ld)} = h_{ij}^{(l)} > 0$. Следовательно, матрица $H = (h_{ij})$ неразложима. Далее, по определению отношения совместимости для любых $i, j \in C_1$ найдутся пути одинаковой длины k в общую вершину. Эти пути можно продолжить общим путём какой угодно длины, поэтому при достаточном большом l из любых $i, j \in C_1$ синхронно ld-достижима некоторая общая вершина $p \in C_1$. На языке матрицы H это значит: $h_{ip}^{(l)} > 0$ и $h_{jp}^{(l)} > 0$, то есть любые две вершины i, j в графе матрицы H совместимы. Следовательно, по теореме 2 (с.15) матрица $H = A_{11}^{(d)}$ примитивна. □

Назовём *контурным индексом* сильно связного графа число, равное наибольшему общему делителю длин контуров графа. Под контурным индексом неразложимой матрицы будем понимать контурный индекс её графа.

Теорема 2. *Индекс совместимости неразложимой матрицы равен её контурному индексу.*

Доказательство. Длина любого контура делится на индекс совместимости d. При $d = 1$ это очевидно, а при $d > 1$ вытекает из циклического свойства разбиения на классы совместимости. При $d = 1$ матрица A примитивна, а при $d > 1$ примитивна матрица $A_{11}^{(d)}$ (см. доказательство теоремы 1). В любом случае при достаточно большом r имеем $a_{11}^{(dr)} > 0$ и $a_{11}^{(d(r+1))} > 0$. Это значит, что через вершину 1 проходят контуры длины dr и $d(r+1)$. Наибольший общий делитель этих чисел и, следовательно, множества длин всех контуров графа, равен d. $\square$

Замечание 1. Вместо выражения "контурный индекс" применительно к неразложимой матрице и сильно связному графу часто употребляется термин "индекс импримитивности". Этот термин объясняется теоремой 1, согласно которой неразложимая матрица либо примитивна, либо приводится к виду (2), причем индекс импримитивности d можно считать мерой отклонения от примитивности (мерой импримитивности).

Из теорем 2 (с.15) и 2 вытекает

Следствие 1. *Неразложимая матрица $A \geq 0$ примитивна в точности тогда, когда контурный индекс A равен единице.*

Как строить форму Фробениуса. Пусть дана неразложимая матрица A и её граф. Нетрудно видеть, что длина всякого непростого контура равна сумме длин некоторых простых контуров. Поэтому контурный индекс сильно связного графа равен наибольшему общему делителю длин только простых контуров графа. Если их количество невелико, то контурный индекс легко вычисляется непосредственно по графу.

Предположим, что контурный индекс d известен. Если $d = 1$, то, как доказано, матрица примитивна и уже имеет форму Фробениуса. Если $d > 1$, то выберем любую вершину, например, вершину 1, и зачислим её в класс C_1. Вершины, в которые ведут дуги из вершины 1, зачислим в класс C_2. В класс C_3 попадут вершины, в которые ведут дуги из вершин, включенных в класс C_2. И так далее. Вершины, в которые ведут дуги из вершин, зачисленных в класс C_d, включим в C_1 и продолжим процесс. Процесс заканчивается, когда на некотором шаге в очередной класс нельзя зачислить новых вершин. Это значит, что все вершины распределились по классам совместимости. (Подумайте, почему это действительно так.)

Затем перенумеруем вершины соответственно их разбиению на классы. Пусть $Q = (q_{ij})$ — переставляющая матрица, соответствующая перенумерации σ, то есть $q_{ij} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sigma(i) = j$. Тогда QAQ^{-1} — форма Фробениуса матрицы A.

Задача 1. Любые две вершины сильно связного графа несовместимы в точности тогда, когда граф представляет собой простой контур.

Задача 2. Предположим, что граф матрицы A представляет собой простой контур $1 \to 2 \to \ldots \to n \to 1$, дополненный дугой $p \to 1$. Чему равен контурный индекс A? Опишите классы совместимости и форму Фробениуса матрицы A если:

1) $n = 6$, и всех p, $1 \leq p \leq 5$;

2) $n = 12$ и всех p, $1 \leq p \leq 11$.

Задача 3. Пусть матрица $A \geq 0$ порядка n содержит ровно $n+1$ ненулевых элементов. В каком случае она примитивна?

Задача 4. Докажите, что контурный индекс симметричной матрицы равен 1 или 2.

Задача 5. Если импримитивная матрица порядка n с индексом импримитивности d невырожденна, то в форме Фробениуса этой матрицы все блоки — квадратные и одного порядка (то есть d делит n).

Задача 6. Если в сильно связном графе есть "треугольник"

$$i \to k,\ k \to j,\ i \to j,$$

то граф примитивен. Более общее утверждение: если существуют два (i, j)-пути длины m и n, то контурный индекс графа делит разность $m - n$.

Задача 7. Докажите, что контурный индекс неразложимой матрицы A всегда не больше, чем её ранг.

Задача 8. Пусть матрица A разбита на квадратные блоки: $A = \begin{pmatrix} 0 & P \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что:

1) A неразложима в точности тогда, когда P неразложима;

2) контурный индекс A равен удвоенному контурному индексу P.

Задача 9. Докажите, что все темпоральные подматрицы имеют один и тот же ненулевой спектр.

Задача 10. Предположим, что некоторый подграф графа и соответствующий ему факторграф являются сильно связными графами. Докажите, что в этом случае граф сильно связен.

Задача 11. Предположим, что некоторый подграф графа примитивен, а соответствующий ему факторграф сильно связен. Докажите, что в этом случае граф примитивен. Приведите матричную формулировку этого утверждения.

§ 4. Экспонент примитивной матрицы

Если матрица $A \geq 0$ полупримитивна, то по предложению 1 (с.15) фокусы графа A порождают примитивный подграф. Следовательно, граф содержит контуры, все вершины которых — фокусы. Пусть s — длина самого короткого из таких контуров.

Теорема 1. *Если матрица A порядка n полупримитивна, то матрица $A^{(n-2)s+1}$ содержит положительный столбец. Другими словами, в полупримитивном графе некоторый фокус достижим из любой вершины за $(n-2)s+1$ шагов.*

Доказательство. Обозначим через $V_k(j)$ множество вершин, из которых можно попасть в вершину j путём длины k. Рассмотрим кратчайший контур θ фокусов и заметим, что для некоторой вершины j этого контура $|V_1(j)| \geq 2$. В противном случае оказалось бы, что все фокусы лежат на простом контуре θ, что противоречит примитивности подграфа фокусов. Имеют место вложения

$$V_{1+ks}(j) \subseteq V_{1+(k+1)s}(j), \; k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Действительно, если существует (i,j)-путь длины $1+ks$, то, добавив к нему обход контура θ, получим (i,j)-путь длины $1+(k+1)s$. При некотором k наступит равенство

$$V_{1+ks}(j) = V_{1+(k+1)s}(j). \tag{2}$$

Тогда $V_{1+ks}(j) = N$, то есть вершина j достижима из всех вершин путями длины $1+ks$. Предположим противное: множество вершин, не принадлежащих $V_{1+ks}(j)$, непусто. Равенство (2) тогда означает, что это множество вершин (собственное подмножество N) замкнуто в графе матрицы A^s. Но это противоречит тому, что j — фокус. Для окончания доказательства осталось заметить, что строгих неравенств в цепочке

$$2 \leq |V_1(j)| \leq |V_{1+s}(j)| \leq |V_{1+2s}(j)| \dots$$

может быть не больше, чем $n-2$, то есть при $k=n-2$ равенство (2) должно выполняться. $\square$

Показатель степени в выражении $(n-2)s+1$ является возрастающей функцией от s. Причём максимальное значение параметра s для полупримитивной матрицы равно $n-1$ (почему не n?). Учитывая это, получаем следующую оценку, зависящую только от порядка матрицы.

Следствие 1. *Если матрица A порядка n полупримитивна, то матрица A^{n^2-3n+3} содержит положительный столбец.*

Докажем, что оценка следствия 1 (как функция от порядка матрицы) — точная, её нельзя уменьшить. Рассмотрим так называемую матрицу Виландта

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Граф матрицы W сильно связный и имеет два простых контура, длины n и $n-1$. Значит, контурный индекс графа равен 1 и матрица W примитивна по следствию 1 на с.21. Докажем, что матрица W^{n^2-3n+2} содержит нуль в каждом столбце. Для этого достаточно доказать, что в графе W не существует пути длины

$$n^2-3n+2 = (n-1)^2-(n-1)$$

из n в вершину 1, из вершины i в вершину $i+1$ $(i=1,\dots,n-1)$, а также из n в 1. Действительно, любой из таких путей имеет длину $nx+1+(n-1)y$, где x, y — неотрицательные целые числа. Допустим, что $nx+1+(n-1)y = (n-1)^2-(n-1)$. Последнее равенство равносильно равенству $n(x+1)+(n-1)y = (n-1)^2$. Тогда $x+1$ делится на $n-1$, следовательно, $nq+y=n-1$, но это невозможно.

Если матрица $A \geq 0$ примитивна, то наименьший показатель k, при котором $A^k > 0$, называется *экспонентом* A. Из теоремы 1 легко выводится следующая оценка для экспонента:

Теорема 2. *Если матрица $A \geq 0$ порядка n примитивна, то*

$$A^{(n-2)s+n} > 0, \tag{4}$$

где s — длина самого короткого контура в графе матрицы A. □

Доказательство. Согласно теореме 1 существуют пути длины $(n-2)s+1$ из всех вершин в некоторую вершину j. Из этой вершины есть путь в любую другую вершину длины не большей, чем $n-1$. Следовательно, каждая вершина графа достижима из всех вершин путями одной и той же длины, не большей, чем $(n-2)s+1+n-1=(n-2)s+n$. □

Следствие 2. *Для любой примитивной матрицы A порядка n*

$$A^{n^2-2n+2}>0.$$

Докажем, что и эта оценка точная: матрица W^{n^2-2n+1} содержит нуль в позиции (1,1), то есть в графе W не существует пути длины n^2-2n+1 из 1 в 1. Действительно, любой (1,1)-путь имеет длину $nx+(n-1)y$, где $x>0$, $y\geq 0$ — целые числа. Допустим, что $nx+(n-1)y=n^2-2n+1$. Тогда $x=(n-1)q$, $q\geq 1$, и $nq+y=n-1$, но это невозможно.

Замечательно то, что матрица W — по существу единственная примитивная матрица порядка n с экспонентом n^2-2n+2. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Пусть A — примитивная матрица порядка n, экспонент которой равен n^2-2n+2. Тогда графы матриц A и W изоморфны.*

Доказательство. Есть три сильно связных неизоморфных графа с n вершинами и $s=n-1$:

- граф G матрицы W,
- граф G', получающийся из G добавлением дуги $1\to 3$,
- граф G'', получающийся из G' удалением дуги $1\to 2$.

Граф G'' исключим из рассмотрения как непримитивный: его контурный индекс равен $n-1$. Остаются графы G и G'. Граф G содержит два простых контура:

$C_1:\ 1\to 2\to\cdots\to n\to 1$, и $C_2:\ n\to 2\to\cdots\to n$.

Граф G', кроме C_1 и C_2, имеет ещё контур

$C_3:\ 1\to 3\to\cdots\to n\to 1$.

Докажем, что в графе G' для любых вершин i, j существует (i,j)-путь длины n^2-2n+1. Этим, очевидно, теорема будет доказана. При $i=j$ такой путь существует, поскольку каждая вершина i принадлежит контуру длины $n-1$. В противном случае пусть m — длина кратчайшего (i,j)—пути p. Тогда в качестве искомого (i,j)-пути можно взять путь, проходящий $n-m-1$ раз по контуру C_1, затем по пути p, затем $m-1$ раз по любому из контуров C_2 или C_3, на котором лежит вершина j. $\square$

Задача 1. Любой фокус полупримитивного, но не примитивного, графа с n вершинами достижим из любой вершины i путём длины

$$n^2-4n+6. \tag{5}$$

Другими словами, если A — полупримитивная, но не примитивная матрица, то столбцы матрицы A^{n^2-4n+6}, отвечающие фокусам, положительны.

Решение. Пусть имеется $l \le n-1$ фокусов. Они порождают примитивный подграф данного графа. Существует путь длины $n-l$ из i в какой-нибудь фокус f, а из него — путь длины l^2-2l+2 в фокус j. Соединяя эти пути, получим (i,j)-путь длины $n+l^2-3l+2$. Учитывая лемму 1 (с.14), заменим параметр l на его максимально возможное значение $l=n-1$ и получим оценку (5). $\square$

Задача 2. Докажите, что экспонент симметричной неотрицательной примитивной матрицы порядка n не больше, чем $3n-4$.

Задача 3. Докажите, что для матрицы Виландта W имеет место равенство $W^n = E + W$.

Задача 4. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} W & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где W имеет порядок n. Докажите, что A — примитивная матрица и вычислите её экспонент.

Задача 5. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E \\ W & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что A — неразложимая матрица в форме Фробениуса. При каком наименьшем показателе k ненулевые блоки в матрице P^k положительны?

§ 5. Нормальная форма разложимой матрицы

Согласно лемме 2 (с.7) матрица $A = (a_{ij})$ порядка $n \geq 2$ разложима, если для некоторого множества вершин $S \subset N$ графа матрицы

$$i \in S,\ j \notin S \implies a_{ij} = 0. \tag{1}$$

Более известным определением разложимой матрицы является следующее: матрица A порядка $n \geq 2$ разложима, если существует такая матрица перестановки U, что

$$UAU^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где A_1, A_2 — квадратные матрицы. Что касается матриц порядка один, то нулевая матрица по определению относится к разложимым, а ненулевая — к неразложимым матрицам.

Это определение разложимости эквивалентно предыдущему. Действительно, если матрица приводится к виду (2), то её граф разложим, поскольку он изоморфен разложимому графу матрицы (2). Последний разложим, так как из вершин $1, \ldots, k$ нельзя перейти в вершины $k+1, \ldots, n$ (k — порядок A_1). Наоборот, пусть граф разложим и $i_1, \ldots, i_k$ $(k < n)$ — вершины, образующие замкнутое множество. Тогда, переставив с помощью подходящей матрицы U строки $i_1, \ldots, i_k$, а также столбцы с этими номерами, на первые позиции, получим матрицу формы (2).

Теорема 1. *Если матрица A разложима, то она перестановочно подобна блочно треугольной матрице*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21} & A_2 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_s \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где каждый диагональный блок — неразложимая матрица или нулевая матрица первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ утверждение следует прямо из определения приводимости. Предположим, что оно верно для матриц порядка не выше n $(n \geq 2)$. Рассмотрим разложимую матрицу A порядка $n+1$ и перестановочную матрицу U, такую, что матрица $U^{-1}AU$ имеет форму (2). Для матриц A_1 и A_2 утверждение теоремы верно по предположению индукции. Если A_1 разложима, то положим, что U_1 — переставляющая матрица, преобразующая A_1 к виду, описанному в теореме. Если A_1 неразложима, то U_1 — единичная матрица. Аналогично определяется матрица U_2. Теперь нетрудно проверить, что переставляющая матрица $U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ приводит матрицу A к желаемому виду. $\square$

Матрица (3) называется *нормальной формой* разложимой неотрицательной матрицы.

Из теоремы 1 вытекает следующая классификация вершин разложимого графа.

Теорема 2. *Множество вершин разложимого графа можно разбить на классы со следующими свойствами:*

1) каждый класс либо состоит из взаимодостижимых вершин, либо содержит единственную, и притом ациклическую, вершину;

2) существует нумерация классов

$$V_1, V_2, \dots, V_s \tag{4}$$

такая, что если начало дуги лежит в V_p, то её конец — в некотором классе V_q, где $p > q$. Другими словами, если класс не замкнут, то из него возможно выйти лишь в класс с меньшим номером.

Если перенумеровать вершины графа матрицы A так, чтобы первые номера получили вершины из V_1, затем нумеровались вершины из V_2 и так далее, то после соответствующей перестановки рядов матрица A получит форму (3).

Конденсацией графа называется факторграф по описанному выше разбиению.

Задача 1. Матрица $A \geq 0$ нильпотентна $\iff$ в форме (3) матрицы A все диагональные блоки — нулевые матрицы порядка 1. Сравните этот критерий нильпотентности с предложением 1 (с.10).

Задача 2. Для матрицы $A \geq 0$ форма (3) является треугольной матрицей $\iff$ в графе A нет простых контуров кроме, может быть, петель. *Указание.* Полезно вначале решить задачу 12 (с.11).

Задача 3. Если в графе A нет простых контуров кроме, может быть, петель, то диагональные элементы матрицы A составляют её спектр.

Задача 4. Докажите, что для симметричной матрицы в форме (3) все недиагональные блоки — нулевые. Другими словами, симметричная матрица является прямой суммой неразложимых (симметричных) матриц.

Задача 5. Конденсация не содержит контуров, кроме, может быть, петель.

Глава 2

Теория Перрона – Фробениуса

§ 1. Теорема Перрона – Фробениуса

Теорией Перрона – Фробениуса называют совокупность теорем о собственных значениях и собственных векторах неотрицательных матриц. Главный результат теории (первоначально доказанный Перроном для положительных матриц) состоит в том, что для неразложимой матрицы $A \geq 0$ её спектральный радиус $\rho(A)$ является положительным собственным значением, которому соответствует положительный собственный вектор. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $A \geq 0$ — неразложимая матрица порядка n и $\rho(A) = 1$. Предположим, что для столбца $y \gneqq 0$ выполняется неравенство $Ay \geq y$. Тогда*

$$1)\ Ay = y,\ \ 2)\ y > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что равенство 1) не выполняется, значит $Ay - y \gneqq 0$. Поскольку $(A+E)^{n-1} > 0$ (теорема 1, с.9), то

$$(A+E)^{n-1}(Ay - y) > 0 \ \Rightarrow\ A(A+E)^{n-1}y > (A+E)^{n-1}y.$$

Столбец $z = (A+E)^{n-1}y$ положителен. Итак, имеем $Az > z,\ z > 0$. Если число $\alpha > 0$ достаточно мало, то и для матрицы $B = (1-\alpha)A$ верно неравенство $Bz > z$. Отсюда следует, что $B^k z > z$ для любого k. Но этого не может быть, поскольку $\rho(B) < 1 \ \Rightarrow\ B^k \to 0$ при $k \to \infty$ (теорема 1, с.55). Доказали, что $Ay = y$. Отсюда следует, что

$$(A+E)^{n-1}y = 2^{n-1}y.$$

В этом равенстве слева — положительный вектор, значит и y — положительный вектор. $\square$

Теорема 1. *Спектральный радиус $\rho(A)$ неразложимой матрицы $A \geq 0$ является её положительным собственным значением, которому соответствует положительный собственный вектор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax = \lambda x$, $|\lambda| = \rho(A)$. Неразложимая матрица не нильпотентна, поэтому $\rho(A) > 0$. Без уменьшения общности можно считать $\rho(A) = 1$. Обозначим через $|x|$ столбец, составленный из модулей элементов x. Имеют место соотношения

$$|\lambda x| = |x| = |Ax| \leq A|x|.$$

По лемме 1 отсюда следует, что $A|x| = |x|,\ |x| > 0$. $\square$

Итак, по теореме 1 любая неотрицательная неразложимая матрица A имеет положительное собственное значение ρ, такое, что $\rho \geq |\lambda|$ для любого другого собственного значения λ. Число $\rho(A)$ называют *перроновым корнем* матрицы A.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 видно, что собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, $|\lambda| = \rho(A)$, не может иметь нулевых компонент.

Теорема 2. *Если $A \geq 0$ — неразложимая матрица, то размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\rho(A)$, равна единице. Другими словами, любые собственные векторы x и y, отвечающих $\rho(A)$, линейно зависимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По-прежнему будем считать, что $\rho(A) = 1$. Пусть $Ax = x$ и $Ay = y$ для векторов $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$. Согласно замечанию 1, $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$. Линейная комбинация $z = x_1 y - y_1 x$ удовлетворяет равенству $Az = z$, но не может быть собственным вектором поскольку содержит нулевую компоненту (первую). Следовательно, $x_1 y - y_1 x = 0$. $\square$

Теорема 3. *Спектральный радиус $\rho(A)$ неразложимой матрицы $A \geq 0$ является простым корнем характеристического многочлена матрицы A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $\rho(A) = 1$ и пусть для вектора $x > 0$ выполняется $Ax = x$. Тогда $A^k x = x$ при любом показателе k. Отсюда нетрудно вывести, что для всех k

$$||A^k|| \leq \max_{1 \leq i,j \leq n} (x_i / x_j). \tag{1}$$

Теперь предположим, что кратность $\rho(A)$ как корня характеристического многочлена A больше единицы. Приведём матрицу A к треугольному виду так, чтобы собственные значения, равные 1, занимали на главной диагонали первые позиции:

$$D^{-1}AD = B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Заметим, что $b_{12} \neq 0$, иначе вышло бы, что первые два столбца матрицы D — линейно независимые собственные векторы, отвечающие $\rho(A)$. Но это противоречит теореме 2. Легко вычислить, что $b_{12}^{(k)} = kb_{12}$. В силу этого $||B^k|| \to \infty$ при $k \to \infty$. Но тогда и $||A^k|| \to \infty$, что противоречит (1). $\square$

Собственное значение матрицы называется *доминирующим*, если оно является простым корнем характеристического многочлена, превосходящим по модулю остальные корни.

Теорема 4. *Если матрица $A \geq 0$ примитивна, то $\rho(A)$ — доминирующий корень характеристического многочлена A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax = \lambda x$, $|\lambda| = \rho(A)$. Докажем, что тогда $\lambda = \rho(A)$. Этим, очевидно, теорема будет доказана. Будем считать, что $\rho(A) = 1$. Пусть $A^m > 0$. Тогда $A^m x = \lambda^m x$. Из доказательства теоремы 1 видно, что $|x| > 0$ и $|A^m x| = A^m |x|$. В частности, равны первые элементы этих столбцов:

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{(m)} x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{(m)} |x_j|. \tag{3}$$

Модуль суммы ненулевых комплексных чисел равен сумме их модулей лишь если эти числа, как векторы на комплексной плоскости, лежат на одном луче. Применяя это соображение к равенству (3) заключаем, что числа $x_j/|x_j|$ $(j = 1, \dots, n)$ равны одному числу, которое мы обозначим через ε. Следовательно, $x = \varepsilon|x|$. Из доказательства теоремы 3 видно, что собственный вектор $x = \varepsilon|x|$ соответствует собственному значению $\rho(A)$. Значит, $\lambda = \rho(A)$. $\square$

Строка y^T называется *левым* собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, если $y^T A = \lambda y^T$. Собственные векторы-столбцы, чтобы отличить их от левых, называют *правыми.*

Приведём "левый" вариант теоремы 1:

Следствие 1. *Для любой неразложимой матрицы $A \geq 0$ существует строка $y^T > 0$, такая, что*

$$y^T A = \rho(A) y^T. \tag{4}$$

Любые два левых собственных вектора, соответствующих $\rho(A)$, *отличаются лишь скалярным множителем.*

Действительно, если A неразложима, то неразложима и матрица A^T. Характеристические многочлены матриц A и A^T совпадают, значит, $\rho(A) = \rho(A^T)$. Для A^T по теореме 1 существует вектор-столбец $y > 0$, такой, что $A^T y = \rho(A) y$. Транспонируя обе части этого равенства, получим (4). Свойство единственности, очевидно, сохраняется и для левых векторов. □

Теорема 5. *Если для матрицы* $A \geq 0$ *существует положительный собственный вектор, то он принадлежит собственному значению* $\rho(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax = \lambda x$, $x > 0$. Умножим это равенство на левый собственный вектор $y^T > 0$, отвечающий $\rho(A)$. Получим

$$y^T A x = \rho(A) y^T x = \lambda y^T x \;\Rightarrow\; \rho(A) = \lambda. \;\square$$

§ 2. Асимптотика степеней примитивной матрицы

Рассмотрим последовательность степеней матрицы $A \geq 0$

$$A, A^2, \ldots, A^k, \ldots \tag{1}$$

Как ведут себя элементы матрицы A^k при $k \to \infty$? Поведение A^k при $k \to \infty$ зависит от спектрального радиуса ρ. Например, согласно теореме 1 (с.55)

$$A^k \to 0 \iff \rho(A) < 1.$$

При $\rho > 1$ элементы A^k (по крайней мере, в некоторых позициях) при $k \to \infty$ могут стать сколь угодно большими. В общем случае полезно привести матрицу к нормальной форме (3) (с.27). Ясно, что асимптотика последовательности A^k в большой степени определяется поведением диагональных блоков A_t^k, но общая картина представляется довольно сложной.

Пусть $A \geq 0$ — неразложимая матрица. Назовём строку $\pi > 0$, $\pi A = \rho(A)\pi$, *левым перроновым вектором*, если сумма элементов π равна 1. Столбец $\eta > 0$, $A\eta = \rho(A)\eta$, назовём *правым перроновым вектором*, если $\pi\eta = 1$. Ясно, что левый и правый перроновы векторы определены однозначно.

Теорема 1. *Пусть* $A \geq 0$ *— примитивная матрица и* $\rho(A) = 1$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \eta\pi. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вещественные столбцы y со свойством $\pi y = 0$ образуют в пространстве $\mathbb{C}^n$ подпространство размерности $n-1$, инвариантное относительно матрицы A. Пусть $t_2, \dots, t_n$ — базис этого подпространства. Тогда матрица $T = (\eta, t_2, \dots, t_n)$ невырождена, причём первая строка матрицы T^{-1} равна π. Нетрудно вычислить, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Поэтому

$$A^k = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1^k \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Из теоремы 4 (с.32) следует, что $\rho(A_1) < 1$, а по теореме 1 (с.55) $\lim\limits_{k\to\infty} A_1^k = 0$. Отсюда легко следует (2). $\square$

Замечание 1. Теорема 1 обратима: если последовательность (1) неотрицательных матриц сходится к некоторой положительной матрице $\mathcal{A}$, то легко видеть, что матрица A примитивна и $\rho(A) = 1$.

В математической экономике матрицу $A \geq 0$ называют *устойчивой*, если она неразложима и предел $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho^{-1}A)^k$ существует. Согласно теореме 1, если матрица A примитивна, то сходимость имеет место. Если же матрица A импримитивна, то она имеет нетривиальную форму Фробениуса и предела, очевидно, не существует.

Итак, устойчивость неразложимой матрицы $A \geq 0$ равносильна её примитивности.

Задача 1. Если характеристический многочлен неразложимой матрицы $A \geq 0$ порядка n равен $\lambda^{n-1}(\lambda - 1)$, то A — примитивная матрица и

$$\lim_{k\to\infty} A^k = A^{n-1}.$$

Задача 2. Докажите, что для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

порядка n существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ и вычислите его.

§ 3. Неравенства для перроновых корней

Вначале отметим очевидное

Предложение 1. *Если все строчные суммы матрицы* $A \geq 0$ *равны* s, *то* $\rho(A) = s$.

Теорема 1. *Пусть* $A = (a_{ij})$ — *неразложимая неотрицательная* $n \times n$*-матрица,* s — *минимальная,* S — *максимальная строчная сумма матрицы* A. *Если* $s < S$, *то*

$$s < \rho(A) < S. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y^T = (y_1, \ldots, y_n)$ — левый перронов вектор для A, s_i — сумма элементов i-й строки A. Символом $\mathbf{1}$ обозначим столбец из единиц. Тогда

$$y^T A\mathbf{1} = \rho(A) = \sum_{i=1}^{n} y_i s_i.$$

Отсюда и из определения левого перронова вектора легко следуют строгие неравенства (1). □

Докажем свойство монотонности перронова корня.

Теорема 2. *Пусть* A *и* B — *неотрицательные неразложимые матрицы. Если* $A \leq B$ *и* $A \neq B$, *то* $\rho(A) < \rho(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x, y^T — положительные векторы, такие, что $Bx = \rho(B)x$, $y^T A = \rho(A)y^T$. Тогда

$$0 < y^T(B-A)x = y^T Bx - y^T Ax = \rho(B)y^T x - \rho(A)y^T x \;\Rightarrow\; \rho(A) < \rho(B). \; \square$$

Бывает полезным

Предложение 2. *Если для матрицы* $A \geq 0$ *и вектора* $x > 0$ *выполняется неравенство* $Ax \leq x$, *то* $\rho(A) \leq 1$. *Если же* $Ax < x$, *то* $\rho(A) < 1$. □

Задача 1. Докажите, что утверждение, аналогичное теореме 1 имеет место для столбцовых сумм матрицы A.

Задача 2. Докажите, что теорема 2 останется верной, если неразложима лишь одна из матриц A, B.

Задача 3. Теорему 2 можно вывести из теоремы 1. Докажите это.

§ 4. Спектр импримитивной неотрицательной матрицы

Напомним, что под спектром комплексной, в частности, неотрицательной, матрицы понимают совокупность всех её собственных значений с учётом их кратностей. Граничным спектром будем называть совокупность собственных значений, имеющих максимальный модуль. Наконец, ненулевой спектр есть совокупность ненулевых собственных значений.

В силу теоремы 4 (с.32) спектральный радиус — единственная точка граничного спектра примитивной матрицы. Используем это свойство для описания граничного спектра импримитивной матрицы. Пусть матрица A имеет контурный индекс $d > 1$ и находится в форме Фробениуса:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если матрица A имеет блочную форму* (1), *то спектр A инвариантен относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{d}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n_1, ..., n_d$ — порядки диагональных блоков в (1). Составим диагональную матрицу

$$S = \mathrm{diag}(E_{n_1}, \varepsilon E_{n_2}, \dots, \varepsilon^{d-1} E_{n_d}),$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}$. Непосредственно проверяется, что

$$S^{-1}AS = \varepsilon A.$$

Утверждение леммы следует из подобия матриц A и εA. $\Box$

Теорема 1. *Граничный спектр неразложимой матрицы $A \geq 0$ с контурным индексом d и спектральным радиусом ρ состоит из чисел*

$$\rho,\ \rho\varepsilon,\ \dots,\ \rho\varepsilon^{d-1}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $d = 1$, то A — примитивная матрица (теорема 1, с.20) и наше утверждение вытекает из теоремы 4 (с.32). Теперь пусть $d > 1$. Достаточно ограничиться случаем $\rho(A) = 1$. Согласно лемме 1 спектр A вместе с единицей содержит $d-1$ точек, получающихся из неё поворотами на угол $\frac{2\pi}{d}$. То есть граничный спектр A содержит все корни из единицы степени d. Далее, в матрице

$A^d = \operatorname{diag}(G_1, \ldots, G_d)$ диагональные блоки примитивны. Это значит, что в спектр матрицы A^d единица входит с кратностью d, а остальные собственные значения по модулю меньше единицы. Следовательно, в граничном спектре A нет собственных значений, помимо чисел (2). □

Замечание 1. По теореме 1 кратность каждой точки граничного спектра неразложимой матрицы $A \geq 0$ равна единице, поэтому соответствующие им собственные подпространства одномерны. Согласно замечанию 1 (с.31) собственные векторы, отвечающие точкам граничного спектра, не содержат нулевых компонент. Модуль каждого из этих векторов принадлежат одномерному собственному подпространству, соответствующему $\rho(A)$.

Из теорем 4 (с.32) и 1 вытекает спектральный критерий примитивности:

Следствие 1. *Неразложимая матрица $A \geq 0$ примитивна тогда и только тогда, когда $\rho(A)$ — доминирующее собственное значение A.* □

Задача 1. Что можно сказать о спектре матрицы (1), если её ранг равен d?

Задача 2. Что можно сказать о спектре блочной матрицы (1), если все блоки имеют порядок 1?

Задача 3. Опишите неразложимые неотрицательные матрицы, спектр которых совпадает с множеством корней из единицы степени d.

Задача 4. Что можно сказать о спектре матрицы (1), если её ранг равен $2d-1$?

Задача 5. Матрица $A \geq 0$ неразложима $\Longleftrightarrow$ матрица $\frac{1}{2}(E+A)$ примитивна. Как связаны спектры этих матриц?

Задача 6. Если для матрицы $A \geq 0$ существует неотрицательный собственный вектор $x \geq 0$, содержащий нулевые элементы, то A разложима, то есть граф A не является сильно связным. Докажите, не пользуясь теоремой 1 (с.30).

Решение. Пусть $S = \{i | x_i = 0\} \subset N$. Тогда

$$i \in S \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j \notin S}^{n} a_{ij}x_j = 0 \implies a_{ij} = 0 \text{ для всех } j \notin S,$$

то есть в графе A нет дуг, ведущих из вершин множества S в вершины, не принадлежащие S.

§ 5. Случай разложимой матрицы

Для разложимой матрицы $A \geq 0$ имеет место ослабленный вариант теоремы 1 (с.30) :

Теорема 1. *Для разложимой матрицы $A \geq 0$ спектральный радиус $\rho(A)$ является собственным значением. Существует неотрицательный собственный вектор (как левый, так и правый), отвечающий собственному значению $\rho(A)$.*

Доказательство. Если $A = 0$, то доказывать нечего. Если $A \neq 0$, но матрица A нильпотентна, то в качестве собственного вектора, отвечающего $\rho(A) = 0$, можно взять ненулевой столбец матрицы $A^k \neq 0$, для которой $AA^k = 0$. Теперь пусть $\rho(A) > 0$. Без уменьшения общности будем считать, что $\rho(A) = 1$. Применим индукцию по порядку матрицы. При $n = 1$ утверждение теоремы тривиально. Предположив, что оно верно для матриц порядка $\leq n$, докажем его для матриц порядка $n+1$. Пусть матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$. Тогда $\rho(A) = \max(\rho(B), \rho(D))$. Будем искать неотрицательный собственный вектор для A в виде $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Для него должны выполняться равенства

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ Cy + Dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Возможны два случая.

1. $\rho(D) = 1 \geq \rho(B)$. Вектор $z \gneqq 0$, $Dz = \rho z$, существует по предположению индукции. Удлинив его подходящим количеством нулей, получим собственный вектор $x = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$ матрицы A.

2. $\rho(B) = 1 > \rho(D)$. Вектор $y \gneqq 0$, $By = y$ существует по предположению индукции. Уравнение $Cy + Dz = z$ имеет неотрицательное решение $z = (E - D)^{-1}Cy$ (см. лемму 3 на с.55). Тогда $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ — искомый собственный вектор для A.

Существование левого неотрицательного собственного вектора доказывается аналогично. □

Задача 1. Докажите существование левого неотрицательного собственного вектора для произвольной матрицы $A \geq 0$.

Задача 2. Для каких разложимых матриц $A \geq 0$ существует положительный собственный вектор?

§ 6. Критерий существования положительного собственного вектора

Существенной частью теории Перрона – Фробениуса является доказательство существования положительного собственного вектора для неразложимой неотрицательной матрицы. Теперь установим критерий существования положительного собственного вектора для разложимой матрицы.

Для матрицы с нулевой строкой не может быть положительного правого вектора. Поэтому будем считать в этом параграфе, что матрица A не содержит нулевых строк. Это свойство эквивалентно отсутствию в графе A тупиковых вершин. Орграфы без тупиковых вершин, то есть такие, что из каждой вершины выходит хотя бы одна дуга, называются *беступиковыми*. Графы этого типа имеют особенности, которые следует отметить.

Вершина i графа называется *возвратной*, если она достижима из любой вершины, достижимой из i.

Предложение 1. *В любом беступиковом графе есть возвратные вершины.*

Доказательство. Назовём простой путь *максимальным*, если любое продолжение этого пути не является простым. Нетрудно видеть, что конечная вершина простого максимального пути является возвратной вершиной. □

Предложение 2. *Множество возвратных вершин замкнуто.* □

Из предложений 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть i — невозвратная вершина. Для любого $k \geq n-1$ существует путь длины k из i в множество возвратных вершин.* □

Нетрудно проверить, что бинарное отношение достижимости, заданное на множестве возвратных вершин беступикового графа является отношением эквивалентности.

Каждый класс достижимости порождает неразложимый замкнутый подграф. Этот подграф (и порождающий его класс) будем называть финальной компонентой графа. Из вышеприведённых результатов видно, что структура беступикового графа такова: множество его возвратных вершин либо неразложимо, либо распадается на несколько не связанных между собой неразложимых подмножеств — финальных компонент. Из невозвратных вершин (если таковые имеются) есть пути в финальные компоненты.

Пусть граф матрицы A, содержит l финальных компонент и некоторое количество невозвратных вершин. Перенумеруем вершины так, чтобы первые номера получили вершины одной из финальных компонент, следующие номера — вершины другой финальной компоненты и так далее. Затем нумеруем невозвратные вершины. Переставляя строки и столбцы матрицы A соответственно новой нумерации, получим следующую нормальную форму разложимой матрицы без нулевых строк:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_l & \\ C_1 & \dots & C_l & D \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $A_1, \dots, A_l$ — неразложимые матрицы, они соответствуют финальным компонентам, блочная строка $C_1, \dots, C_l$ задаёт переходы из невозвратных вершин в финальные компоненты, матрица D описывает переходы в классе невозвратных вершин.

Теорема 1. *Матрица A, заданная равенством* (1), *имеет положительный собственный вектор тогда и только тогда, когда*

1) $\rho(A_1) = \ldots = \rho(A_l) = \rho(A)$,

2) $\rho(D) < \rho(A)$.

Без уменьшения общности будем считать, что $\rho(A) = 1$.

Вначале докажем теорему 1 для частного случая, когда в форме (1) нижняя блочная строка отсутствует.

Лемма 1. *Для неотрицательной матрицы*

$$A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_l), \tag{2}$$

где $A_1, \dots, A_l$ — неразложимые матрицы, положительный собственный вектор существует тогда и только тогда, когда

$$\rho(A) = \rho(A_1) = \ldots = \rho(A_l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax = x,\ x > 0$. Разобьём вектор x на части x^k так, что высота x^k равна порядку A_k. Тогда равенство $Ax = x$ разобьётся на равенства:

$$A_k x^k = x^k, \quad k = 1, \dots, l. \tag{3}$$

Следовательно, $\rho(A_k) = 1, \quad k = 1, \dots, l$. Наоборот, пусть спектральные радиусы матриц $A_1, ..., A_l$ равны 1. Тогда согласно теореме 1 (с.30) для некоторых положительных векторов x^k выполняются равенства (3). Из этих векторов и составляется искомый положительный собственный вектор для матрицы (2). $\square$

Докажем ещё один вспомогательный результат. Положим $B = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_l)$, $C = (C_1, \dots, C_l)$ и запишем форму (1) в виде

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{4}$$

По следствию 1 из любой невозвратной вершины существует путь длины $n-1$ в возвратную вершину. Отсюда следует

Лемма 2. *В матрице*

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} B^{n-1} & 0 \\ C_{n-1} & D^{n-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

подматрица C_{n-1} не имеет нулевых строк.

Доказательство теоремы 1 в общей ситуации. Необходимость. Пусть $Ax = x$, $x > 0$. Разобъём столбец x на части y и z так, чтобы равенство $Ax = x$ разбилось на равенства $By = y$ и $Cy + Dz = z$. Из первого равенства видим, что $y > 0$ — собственный вектор для B. По лемме 1 имеем

$$\rho(A_1) = \ldots = \rho(A_l) = 1.$$

Рассмотрим второе равенство, точнее, (легко заметить, тоже верное) равенство

$$C_{n-1}y + D^{n-1}z = z.$$

В матрице C_{n-1} по лемме 2 нет нулевых строк, следовательно

$$C_{n-1}y > 0 \;\Rightarrow\; D^{n-1}z < z \;\Rightarrow\; \rho(D^{n-1}) < 1 \;\Rightarrow\; \rho(D) < 1.$$

Здесь использовано предложение 2 (с.35).

Достаточность. По лемме 1 для матрицы $B = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_l)$ существует вектор $y > 0$, $By = y$. Положим $z = (E - D)^{-1}Cy$. Прямым вычислением проверяется, что вектор $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ — собственный для A. Докажем, что $z > 0$. Поскольку вектор x собственный и для A^{n-1}, то

$$C_{n-1}y + D^{n-1}z = z.$$

Согласно лемме 5 в матрице C_{n-1} все строки ненулевые, следовательно, $C_{n-1}y > 0$. Значит, $z > 0$, отсюда и $x > 0$. $\square$

Теперь рассудим, в каком случае существует не только правый, но и левый положительный собственный вектор.

Теорема 2. *Матрица A имеет положительный правый и положительный левый собственные векторы в том и только том случае, когда A имеет нормальную форму* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если условие теоремы выполнено, то правый и левый положительные векторы составляются из таковых векторов для диагональных блоков. Для доказательства обратного утверждения покажем, что в рассматриваемом случае нижняя блочная строка в форме (1) отсутствует. Предположим противное: пусть строка (p, q) есть левый положительный собственный вектор матрицы (1), причём длина подстроки q равна порядку D. Тогда $qD = q$, где $q > 0$, чего не может быть поскольку $\rho(D) < 1$. $\square$

Глава 3

Элементы идемпотентной линейной алгебры

Идемпотентной линейной алгебре и, вообще, идемпотентной математике, в последние десятилетия посвящено огромное число публикаций. Это объясняется, с одной стороны, её эстетической привлекательностью и прозрачностью базовых принципов, а с другой — большим количеством приложений. Здесь укажем лишь на книги [11], [12], в которых можно найти дальнейшие ссылки по этой теме. В этой главе рассматривается лишь проблема собственных векторов и собственных значений в идемпотентной линейной алгебре. Интересно отметить сходство излагаемых результатов с теорией Перрона–Фробениуса и, в то же время, существенные отличия от неё.

Два следующих параграфа не содержат идемпотентной математики и принадлежат традиционной теории неотрицательных матриц. Однако доказанные в них теоремы играют в заключительном параграфе решающую роль в решении основной задачи этой главы.

§ 1. Неотрицательные матрицы характеристики 1

Напомним, что вес пути $p = i_1 \dots i_k i_{k+1}$ в графе матрицы $A = (a_{ij}) \geq 0$ равен $w(p) = a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}}$. *Средним весом* пути $p = i_1 \dots i_k i_{k+1}$ назовём среднее геометрическое весов дуг:

$$\widetilde{w}(p) = (a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}})^{1/k}. \tag{1}$$

Контурной характеристикой $\sigma(A)$ матрицы A и её графа называется наибольший из средних весов простых контуров (прилагательное "контурной" иногда будем опускать. Контур, средний вес которого равен характеристике, называется *экстремальным.* Вершины и дуги, принадлежащие экстремальным контурам, называются *экстремальными.* Подграф, порождённый экстремальными дугами, называется *экстремальным.*

Поскольку $w(p) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{w}(p) \leq 1$, причём $w(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{w}(p) = 1$, то граф характеристики 1 — это граф, у которого максимальный вес контура равен единице. Поэтому, занимаясь случаем $\sigma(A) = 1$, будем говорить просто о весах путей.

Лемма 1. *Пусть $\sigma(A) = 1$. Если вершина j достижима из вершины i, то существует (i, j)-путь максимального веса и его можно найти среди простых (i, j)-путей.*

Доказательство. Если (i, j)-путь w не простой, то представим его в виде $w = pqr$, где q — простой контур. Удалив его из пути p, получим (i, j)-путь pr, вес которого не больше веса p. Продолжая подобные удаления, придём к простому (i, j)-пути, вес которого не больше веса p. Доказали, что вес непростого (i, j)-пути не больше веса некоторого простого (i, j)-пути. Отсюда и следует утверждение леммы. □

Следствие 1. *В графе характеристики 1 наибольший из весов всевозможных (не только простых) контуров равен единице.* □

Матрица называется *унистрочной*, если максимальный элемент каждой её строки равен 1. Вес любого пути в графе унистрочной матрицы не больше 1. Отправляясь из любой вершины, можно строить сколь угодно длинный путь веса 1. Если длина такого пути $\geq n$, то он содержит контур веса 1. Отсюда следует

Лемма 2. *Если A — унистрочная матрица, то $\sigma(A) = 1$.*

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij})$ *диагонально подобна* матрице $B = (b_{ij})$ порядка n, если существует обратимая диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, такая, что $D^{-1}AD = B$, то есть

$$d_i^{-1} a_{ij} d_j = b_{ij} \quad \text{для любых} \quad i, j. \tag{2}$$

Матрица типа $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$, называется *положительной диагональной матрицей.*

Отметим два простых свойства диагонального подобия

Предложение 1. *Бинарное отношение диагонального подобия является отношением эквивалентности.* □

Предложение 2. *Если матрицы A и B диагонально подобны то*

1) *графы A и B совпадают,*

2) *если в графе A есть контуры, то A-вес и B-вес любого контура $i_1 i_2 \ldots i_k i_1$ равны:*

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_k i_1} = b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \ldots b_{i_k i_1}. \ \square$$

Отношение диагонального подобия разбивает множество матриц на классы диагонально подобных матриц. Естественно попытаться найти в каждом классе наиболее простого представителя.

Теорема 1. *Для неразложимой матрицы $A \geq 0$ следующие свойства эквивалентны:*

1) $\sigma(A) = 1$;

2) *существуют такие положительные числа $d_1, \dots, d_n$, что*

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} d_j = d_i, \ i = 1, \dots, n; \tag{3}$$

3) *матрица $A \geq 0$ диагонально подобна унистрочной матрице.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2). Пусть j_0 — какая-нибудь из экстремальных вершин. Обозначим через d_i наибольший из весов (i, j_0)-путей. При любом $i = 1, \dots, n$ имеет место неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} d_j \leq d_i,$$

поскольку произведение $a_{ij} d_j$ при любом j является весом некоторого (i, j_0)-пути (или равно 0 при $a_{ij} = 0$). Докажем, что на самом деле это нестрогое неравенство является равенством. Существует путь $ilm \dots j_0$ веса d_i. Тогда путь $lm \dots j_0$ имеет максимальный вес d_l (в противном случае его можно было бы заменить (l, j_0)-путём большего веса). Это значит, что

$$a_{il} d_l = \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} d_j = d_i.$$

На первый взгляд, в приведённом рассуждении не учтено, что путь веса d_i может быть длины 1, то есть быть просто дугой ij_0. Но если так, то максимальный вес имеет и путь $ij_0 m \dots j_0$, где $j_0 m \dots j_0$ — контур максимально возможного веса 1. Значит, и в этом случае равенство (3) остаётся верным.

2 $\Rightarrow$ 3. Пусть $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ и рассмотрим матрицу $\overline{A} = D^{-1} A D$ с элементами $\bar{a}_{ij} = d_i^{-1} a_{ij} d_j$. Из равенств (3) следует, что

$$\max_{1 \leq j \leq n} \bar{a}_{ij} = \max_{1 \leq j \leq n} d_i^{-1} a_{ij} d_j = 1, \ i = 1, \dots, n.$$

Значит, $\overline{A}$ — унистрочная матрица.

3 $\Rightarrow$ 1 вытекает из леммы 2 и того, что диагонально подобные матрицы имеют один и тот же граф с одинаковыми весами контуров. $\square$

Следствие 2. *Контурная характеристика неразложимой матрицы равна 1 тогда и только тогда, когда она диагонально подобна унистрочной матрице.* $\square$

§ 2. Матрицы произвольной характеристики.

Согласно предложению 2 (с.44) у диагонально подобных матриц A и B один и тот же граф, причём A-вес и B-вес любого контура равны. Следовательно, $\sigma(A) = \sigma(B)$.

В следующей лемме описывается, как изменяются свойства матрицы A при умножении её на положительное число α.

Лемма 1. *Пусть r — положительное число, A — неотрицательная матрица. Тогда*

1) *графы матриц A и rA совпадают;*

2) *при переходе от A к rA средний вес пути $i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$ умножается на r:*

$$\widetilde{w}_{rA}(i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}) = r\widetilde{w}_A(i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1});$$

3) $\sigma(rA) = r\sigma(A)$;

4) *одни и те же контуры являются экстремальными для A и rA.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы очевидно. Доказательство второго утверждения немедленно следует из определения среднего веса пути. Третье и четвёртое утверждения вытекают из второго. $\square$

Обозначим через $\max(A)$ максимальный элемент матрицы $A \geq 0$. Матрицу A назовём *уравновешенной*, если число $\max(A)$ присутствует в каждой строке A.

Согласно лемме 1, если поделить матрицу A на её характеристику σ, то получим матрицу $\sigma^{-1}A$ характеристики 1 с тем же графом и теми же экстремальными контурами, что у матрицы A.

Теорема 1. *Любая неразложимая матрица $A \geq 0$ диагонально подобна уравновешенной матрице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть σ — характеристика A и для матрицы $\sigma^{-1}A$ характеристики 1 вычислены числа $d_1, \dots, d_n$ из теоремы 1 (с.45). Согласно п. 2) этой теоремы

$$\max_{1 \leq j \leq n} (\sigma^{-1} a_{ij}) d_j = d_i \;\Rightarrow\; \max_{1 \leq j \leq n} d_i^{-1} a_{ij} d_j = \sigma \quad (i = 1, \dots, n).$$

Это значит, что при $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ матрица $D^{-1}AD$ — уравновешенная. $\square$

Лемма 2. *Для любой неотрицательной матрицы A справедливо неравенство*

$$\sigma(A) \leq \max(A).$$

Если A — уравновешенная матрица, то

$$\sigma(A) = \max(A). \ \square$$

Из теоремы 1 следует, что функция $\max(A)$ в классе диагонально подобных матриц достигает минимума на уравновешенных матрицах и этот минимум равен контурной характеристике $\sigma(A)$. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Для неразложимой неотрицательной матрицы A*

$$\sigma(A) = \min_{G} \max(G^{-1}AG), \tag{1}$$

где G пробегает множество положительных диагональных матриц.

Доказательство. Для любой положительной диагональной матрицы G

$$\sigma(A) = \sigma(G^{-1}AG) \leq \max(G^{-1}AG).$$

Эти соотношения следуют из того, что преобразование диагонального подобия не изменяет характеристики матрицы, и из леммы 2. С другой стороны, согласно теореме 1 существует положительная диагональная матрица $D \geq 0$, такая, что $D^{-1}AD$ — уравновешенная матрица. Следовательно, снова по лемме 2,

$$\sigma(A) = \max(D^{-1}AD)$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Приведём ещё один вариант теоремы 1:

Теорема 3. *Неразложимая неотрицательная матрица A представима в виде*

$$A = \sigma D\overline{A}D^{-1}, \tag{2}$$

где D — положительная диагональная матрица, $\overline{A}$ — унистрочная матрица, σ — характеристика матрицы A.

§ 3. Элементы идемпотентной линейной алгебры

Непустое множество S, на котором введены бинарные операции *сложения* $\oplus$ и *умножения* $\otimes$, называется *полукольцом*, если

1) $\langle S, \oplus\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S, \otimes\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;

3) выполняются законы дистрибутивности: для любых $a, b, c \in S$

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \times c,\ \ (b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a;$$

4) $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ для любого $a \in S$.

Полукольцо называется *коммутативным*, если умножение в нём коммутативно. Коммутативное кольцо называется *полуполем*, если ненулевые элементы относительно умножения образуют группу. Ясно, что каждое кольцо есть полукольцо, каждое поле — полуполе.

Множество $S' \subseteq S$ называется *подполукольцом* полукольца S, если оно содержит нуль и единицу полукольца и замкнуто относительно относительно операций сложения и умножения (то есть, вместе с любыми элементами из S' содержит их сумму и произведение). Подполукольцо, разумеется, само является полукольцом.

Матрицы с элементами из полукольца (матрицы *над* полукольцом) складывают и перемножают по обычным правилам. При этом остаются справедливыми свойства, относящиеся к сложению и умножению матриц, а также к умножению матриц на элементы полукольца. Сохраняются и доказательства этих свойств.

Множество $M_n(S)$ всевозможных матриц порядка n над полукольцом S образует полукольцо, в котором нулевая матрица 0 и единичная матрица E определяются очевидным образом. Они служат, соответственно, нулём и единицей полукольца $M_n(S)$. Полукольцо $M_n(S)$ при $n \geq 2$ всегда некоммутативно.

Интересный класс полуколец составляют *идемпотентные* полукольца, в которых $a \oplus a = a$ для любого элемента a. Идемпотентным является, например, полукольцо $\mathbb{B}$ с элементами 0 и 1, операции в котором отличаются от обычных "школьных" лишь тем, что $1 \oplus 1 = 1$.

Множество S^n столбцов высоты n над S с операциями сложения и умножения (слева) на элементы из S образует аналог линейного пространства. Элементы S^n будем называть векторами. Матрица $A \in M_n(S)$ определяет оператор на S^n по правилу

$$x \mapsto A \otimes x$$

с очевидными свойствами линейности. Вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором, а элемент $\lambda \in S$ — соответствующим ему собственным значением оператора A, если

$$A \otimes x = \lambda \otimes x.$$

Основным для нашей темы примером полукольца является множество вещественных неотрицательных чисел с обычным умножением, но в роли сложения выступает идемпотентная операция взятия максимума. Нетрудно проверить, что эта алгебраическая система, обозначим её $\mathcal{R}$, действительно является полукольцом и даже полуполем. Символ "+" в этом параграфе закрепим за операцией взятия максимума: $a + b = \max(a, b)$. Этот же символ обозначает сложение матриц над $\mathcal{R}$. Знак умножения обычно будем опускать.

В задаче о собственных значениях и собственных векторах для матриц над $\mathcal{R}$ имеется любопытная аналогия с теорией Перрона–Фробениуса.

Теорема 1. *Для любой неразложимой матрицы $A \in M_n(\mathcal{R})$ число $\sigma(A)$ является собственным значением, которому соответствует положительный собственный вектор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 3 (с.47) матрицу A можно представить в виде

$$A = \sigma D\overline{A}D^{-1}, \tag{1}$$

где D — положительная диагональная матрица, $\overline{A}$ — унистрочная матрица, σ — характеристика матрицы A. Умножив равенство (1) на столбец $d = D\mathbf{1}$, получим $Ad = \sigma d$. □

Теорема 2. *Если $x = (x_j)$ — положительный собственный вектор для матрицы $A \in M_n(\mathcal{R})$, то $Ax = \sigma(A)x$. Другими словами, характеристика матрицы — единственное собственное значение, отвечающее положительному собственному вектору.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; (\lambda^{-1}A)x = x$. Положим $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, тогда из предыдущего равенства следует:

$$(\lambda^{-1}A)X\mathbf{1} = X\mathbf{1} \;\Rightarrow\; X^{-1}(\lambda^{-1}A)X\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Последнее равенство означает, что матрица $X^{-1}(\lambda^{-1}A)X$ — унистрочная и её характеристика равна 1. Значит, и $\sigma(\lambda^{-1}A) = 1$, а поскольку $\sigma(\lambda^{-1}A) = \lambda^{-1}\sigma(A)$, то $\sigma(A) = \lambda$. □

Теорема 3. *Пусть матрица $A \in M_n(\mathcal{R})$ неразложима и $\sigma(A) = 1$. Тогда столбец матрицы $(E + A)^{n-1}$, отвечающий экстремальной вершине j, неподвижен относительно A.*

Указание. При доказательстве нужно учесть, что длина незамкнутого простого пути не больше, чем $n - 1$, поэтому недиагональные элементы матриц

$$A + A^2 + \ldots + A^n = A(E + A)^{n-1} \quad \text{и} \quad (E + A)^{n-1}$$

совпадают. Диагональные же элементы в позиции (j, j) равны (т.е. оба равны 1) в точности тогда, когда вершина j экстремальна.

Задача 1. Докажите, что $\sigma(A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A + \ldots + A^n) = 1$. ($A$ неразложима.)

Задача 2. Найдите контурную характеристику и отвечающие ей собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & b & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 & c \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Как обобщить эту задачу и её решение?

Задача 3. Если A неразложима и $A^2 = A$, то $\sigma(A) = 1$.

Задача 4. Докажите, что единственным собственным значением нильпотентной матрицы является 0. Как вычислить (хотя бы один) собственный вектор?

Задача 5. У положительной матрицы (даже второго порядка) могут быть непропорциональные собственные векторы. Найдите пример такой матрицы.

Задача 6. Докажите, что для неразложимой матрицы $A \in M_n(\mathcal{R})$ существуют только положительные собственные векторы.

Задача 7. Пусть $\rho(A)$ — спектральный радиус, $\sigma(A)$ — контурная характеристика неразложимой матрицы $A \geq 0$. Докажите, что $\sigma(A) \leq \rho(A)$.

Глава 4
Дополнения

§ 1. Модуль комплексной матрицы. Лемма Виландта

Модулем комплексной матрицы A называют неотрицательную матрицу $|A|$, полученную заменой элементов A на их модули.

Теорема 1. *Пусть A — неразложимая комплексная матрица. Тогда $\rho(A) \leq \rho(|A|)$. Для того, чтобы имело место равенство $\rho(A) = \rho(|A|)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица A имела представление*

$$A = \varepsilon D|A|D^{-1},\ |\varepsilon| = 1,\ |D| = E, \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Az = \lambda z,$, следовательно,

$$|A||z| \geq |\lambda||z| \tag{2}$$

Для простоты письма будем считать, что $\rho(|A|) = 1$. По следствию 1 (с.32) существует левый неподвижный вектор $y^T > 0,\ y^T|A| = y^T$. Умножив неравенство (2) на этот вектор, после очевидных преобразований получим $1 \geq |\lambda|$.

Второе утверждение теоремы в части достаточности очевидно: если для A имеется представление (6), то спектр A отличается от спектра матрицы $|A|$ лишь множителем ε, не изменяющим спектральный радиус.

Теперь предположим, что $\rho(A) = \rho(|A|) = 1$, следовательно, спектр A содержит число $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$. Пусть $Az = \varepsilon z$. Отсюда

$$|z| \leq |A||z|. \tag{3}$$

Согласно лемме 1 (с.30) на самом деле имеем

$$|z| = |A||z|,\ |z| > 0. \tag{4}$$

Вектор z можно записать в виде $z = D|z|, |D| = E$. Тогда

$$\varepsilon z = \varepsilon D|z| = AD|z| \implies |z| = \varepsilon^{-1}D^{-1}AD|z| = |A||z|.$$

Последнее равенство возможно лишь если

$$\varepsilon^{-1}D^{-1}AD = |A|,$$

то есть, когда выполняются условия (6). Доказательство вытекает из следующего свойства комплексных чисел:

$$z_1 + \ldots + z_n = |z_1| + \ldots + |z_n| \;\Rightarrow\; z_1 = |z_1|, \ldots, z_n = |z_n|. \;\square$$

Соединяя теоремы 1 и 2 (с.35) получаем утверждение, известное как лемма Виландта:

Следствие 1. *Пусть для комплексной матрицы A и неразложимой матрицы $P \geq 0$ выполнено условие*

$$|A| \leq P. \tag{5}$$

Тогда $\rho(A) \leq \rho(P)$. Равенство $\rho(A) = \rho(P)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$A = \varepsilon DPD^{-1} \; |\varepsilon| = 1, \; |D| = E. \tag{6}$$

§ 2. Локализация спектра матрицы

Пусть теперь A — комплексная матрица. Положим, что $\sigma(A) = \sigma(|A|)$. Комплексную матрицу A будем называть унистрочной, если $|A|$ — унистрочная матрица. Экстремальными в графе A будем считать те вершины, которые экстремальны в графе $|A|$. Тогда из теоремы 1 на стр. 46 немедленно следует

Теорема 1. *Для комплексной матрицы A, в графе которой достижимы экстремальные вершины, существуют унистрочная матрица $\overline{A}$ и положительная диагональная матрица D, такие, что*

$$D^{-1}AD = \sigma(A)\overline{A}. \tag{1}$$

Действительно, достаточно построить матрицу D для $|A| \geq 0$ и применить её к A, чтобы получить равенство (1).

Приведём пример использования уравновешивания для локализации собственных значений матрицы. Пусть $A = (a_{ij})$ — комплексная матрица порядка n. Известная теорема Гершгорина гласит:

Теорема 2. *Любое собственное значение λ матрицы A удовлетворяет хотя бы одному из неравенств*

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Таким образом, все собственные значения матрицы A лежат в объединении кругов на комплексной плоскости, центры которых — диагональные элементы A, а радиусы — строчные суммы модулей недиагональных элементов. Пусть m_i — количество ненулевых недиагональных элементов i-й строки матрицы A. Обозначим через A_0 матрицу, полученную из A заменой диагональных элементов нулями. Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть в графе комплексной матрицы A достижимы экстремальные вершины. Тогда все собственные значения матрицы A лежат в объединении кругов*

$$|a_{ii} - \lambda| \le m_i \sigma(A_0),\ i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Радиусы кругов, описываемых неравенствами (3), могут быть намного меньше, чем кругов, отвечающих неравенствам (2).

Применим теорему 3 для локализации корней многочлена

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \tag{4}$$

Составим сопровождающую матрицу многочлена (4):

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Спектр этой матрицы совпадает с совокупностью корней многочлена.

Следствие 1. *Корни многочлена* (4) *лежат в объединении трёх кругов*

1) $|a_1 - \lambda| \le \max\limits_{2 \le i \le n} \sqrt[i]{|a_i|}$,

2) $|\lambda| \le 2 \max\limits_{2 \le i \le n-1} \sqrt[i]{|a_i|}$,

3) $|\lambda| \le \max\limits_{2 \le i \le n} \sqrt[i]{|a_i|}$.

§ 3. Норма матрицы

Функция $\|\cdot\|$ с вещественными значениями, определённая на (не обязательно квадратных) комплексных матрицах, называется *матричной нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|A\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$;
2) $|c| = |c|\|A\|$ для любого комплексного числа c;
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

В последних аксиомах предполагается, что A и B — комплексные матрицы, которые можно сложить (перемножить).

Из свойства 4) для квадратных матриц легко выводится неравенство

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,\ k = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть A квадратная комплексная матрица и λ — её собственное значение. При любой матричной норме $|\lambda| \leq \|A\|$.*

Действительно, для некоторого столбца $x \neq 0$ имеем $Ax = \lambda x$. Используя аксиомы 1), 2) и 4), получаем

$$|\lambda|\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \;\Rightarrow\; |\lambda| \leq \|A\|.$$

Мы пользуемся обычно *строчной нормой*, которая на $(m \times n)$-матрице $A = (a_{ij})$ равна

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{2}$$

Доказательство того, что функция (2) удовлетворяет аксиомам 1) – 4), представляет собой несложное упражнение.

Следующее утверждение является частным случаем формулы Гельфанда для спектрального радиуса.

Предложение 1.

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} ||A^k||_\infty^{1/k}.$$

Доказательство. Из соотношений $(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq ||A^k||_\infty$ вытекает неравенство $\rho(A) \leq ||A^k||_\infty^{1/k}$ для всех $k = 1, 2, \dots$. При любом $\varepsilon > 0$ спектральный радиус матрицы $\widetilde{A} = (\rho(A) + \varepsilon)^{-1}A$ меньше единицы. Значит, $\widetilde{A}^k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, существует номер N, такой, что $||\widetilde{A}^k||_\infty < 1$ при всех $k \geq N$. Это означает, что $||A^k||_\infty < (\rho(A) + \varepsilon)^k$ при всех $k \geq N$ или, эквивалентно, $||A^k||_\infty^{1/k} < \rho(A) + \varepsilon$ при всех $k \geq N$. Итак, при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших k выполняются неравенства

$$\rho(A) \leq ||A^k||_\infty^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение. $\square$

О сходимости матричных рядов

Из неравенств (1) с очевидностью следует

Лемма 2. *Если* $||A|| < 1$, *то* $A^k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ комплексной матрицы A равен максимальному из модулей её собственных значений.

Теорема 1. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что любая комплексная матрица подобна верхней треугольной матрице. При переходе к подобной матрице сохраняется спектр и свойство сходимости степеней матрицы к нулевой матрице. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда A — верхняя треугольная матрица. Пусть $A^k \to 0$, тогда степени диагональных элементов — собственных значений A, сходятся к нулю. Значит, они меньше единицы по модулю и $\rho(A) < 1$.

Обратно, пусть $\rho(A) < 1$. Положим $D = \mathrm{diag}(d, d^2, ..., d^n)$, тогда

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12}d & \dots & a_{1n}d^{n-1} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n}d^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n}d \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

За счёт выбора d можно сделать модули недиагональных элементов матрицы $D^{-1}AD$ настолько малыми, чтобы выполнялось неравенство $||D^{-1}AD|| < 1$. По лемме 2 тогда $D^{-1}A^kD \to 0$, следовательно, $A^k \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

Применим теорему 1 для обобщения леммы 2.

Следствие 1. *Если* $||A^m|| < 1$ *для некоторого показателя* m, *то* $A^k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\rho(A^m) = \rho^m(A) \leq ||A^m|| < 1 \;\Rightarrow\; \rho(A) \leq (||A^m||)^{1/m} < 1$. Осталось применить теорему 1. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $A^k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *или, равносильно,* $\rho(A) < 1$. *Тогда матрица* $E - A$ *имеет обратную, причём*

$$(E - A)^{-1} = \lim_{k\to\infty} (E + A + \dots A^k). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 единица не является собственным значением матрицы A, следовательно, матрица $E - A$

обратима. Имеет место тождество

$$(E + A + \ldots A^k)(E - A) = E - A^k.$$

Умножим обе его части на $(E - A)^{-1}$:

$$E + A + \ldots A^k = (E - A^k)(E - A)^{-1}.$$

При $k \to \infty$ в пределе получается равенство (3). $\square$

Если матрица $A \geq 0$, то, разумеется, и $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Лемма 4. *Если $Q^k \to 0$ при $k \to \infty$, то блочно треугольные матрицы $\begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E & R_k \\ 0 & Q^k \end{pmatrix}$ сходятся к матрице*

$$\begin{pmatrix} E & R(E - Q)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенства

$$\begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E & R(E + Q + \ldots Q^{k-1}) \\ 0 & Q^k \end{pmatrix},$$

которое доказывается индукцией по k, и леммы 3. $\square$

Аналогично, для матрицы вида $\begin{pmatrix} E & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$ из $Q^k \to 0$ следует, что

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E & 0 \\ R_k & Q^k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 \\ (E - Q)^{-1}R & 0 \end{pmatrix}.$$

Предметный указатель

Литература

1. Minc H., *Nonnegative Matrices.* – Wiley, 1988.
2. Seneta E., *Non-negative Matrices and Markov Chaines.* – Springer, 2006.
3. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967.
4. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ.* — М.: Мир, 1989.
5. Сачков В.Н., Тараканов В.Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц.* – М: ТВП, 2000.
6. Романовский В. И., *Дискретные цепи Маркова.* – М.: Гостехиздат, 1949.
7. Артамонов В.А., Латышев В.Н. *Линейная алгебра и выпуклая геометрия.* – М.: Факториал Пресс, 2004.
8. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. *Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.
9. Альпин Ю.А., Ильин С.Н., *Дискретная математика: графы и автоматы.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007.
10. Альпин Ю. А., Альпина В. С. *Теорема Перрона – Фробениуса: доказательство с помощью цепей Маркова.* – Зап. научн. семин. ПОМИ – 2008 – **359**, С. 5-16.
11. Кривулин Н. К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах модлирования и анализа сложных систем.* — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.
12. Butkovich P. *Max-linear systems: theory and algorithms* – Springer, 2010.