КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра теории относительности и гравитации

Б А Л А К И Н А. Б.

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Часть II. Уравнения состояния в релятивистской гидродинамике

КАЗАНЬ - 2015

УДК 537.8

Принято на заседании кафедры теории относительности
и гравитации Института физики КФУ
Протокол N 4 от 13 мая 2015 года

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им.Н.И.Лобачевского **А.А. Попов**

Балакин А.Б.
Причинная термодинамика и статистика.
Часть II. Уравнения состояния в релятивистской гидродинамике
/ А.Б. Балакин. - Казань:
Казан. ун-т, 2015. - 23 с.

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика».

Во второй части методических указаний речь идет об уравнениях состояния как важнейшем элементе комплекса конституционных уравнений, которые делают феноменологическую теорию замкнутой.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика».

Методические указания к курсу «Причинная термодинамика и статистика» разделены на три части. Во второй части, которая предлагается вниманию пользователей, речь идет о комплексе конституционных уравнений (основополагающих соотношений) как связующем элементе, делающем феноменологическую теорию самосогласованной (замкнутой). Автор считает, что методически важным первым шагом должно стать выделение из этого комплекса соотношений тех уравнений, которые принято называть *уравнения состояния* и которые появляются в *равновесной*, стационарной релятивистской термодинамике сплошных сред. Эта процедура важна для понимания следующего шага - формулировки неравновесных, нестационарных анизотропных конституционных соотношений, на базе которых построена причинная термодинамика.

В данной работе приведены примеры анализа уравнений состояния для произвольных баротропных релятивистских жидкостей, кварк-глюонной плазмы, струнного газа и газа Чаплыгина, жидкостей со сверхжестким и фантомным уравнениями состояния, ядерной жидкости, релятивистского идеального газа и газа ван - дер - Ваальса, систем безмассовых частиц и релятивистских политроп.

1 Введение

1.1 Какой смысл современные физики вкладывают в понятие "уравнения состояния"?

Ни одна статья, исследующая модели в современной релятивистской космологии и астрофизике, не обходится без использования соотношений, которые в англоязычной литературе называются "EoS - Equations of State", а в русскоязычной версии - "уравнения состояния". У этого термина сложная и даже запутанная история. Необходимость введения уравнений состояния проще всего обосновать следующим образом. Уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} \tag{1}$$

связывают геометрические характеристики пространства-времени: метрику g_{ik}, тензор Риччи R_{ik}, скаляр Риччи R, и физическую характеристику гравитирующей материи: тензор энергии - импульса T_{ik}. Тензор Эйнштейна, стоящий в левой части (1), подчиняется тождеству Бианки:

$$\nabla_k \left[R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right] \equiv 0 \,, \tag{2}$$

заставляя четыре-дивергенцию тензора энергии-импульса быть нулевым вектором

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \,. \tag{3}$$

Если физическая модель гравитирующей системы не конкретизирована, и тензор энергии - импульса формально определен с помощью вариационной производной Лагранжиана материи $L_{(m)}$:

$$T_{ik} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta [\sqrt{-g} L_{(m)}]}{\delta g^{ik}} \,, \tag{4}$$

- то принято использовать следующее стандартное алгебраическое разложение симметричного тензора энергии - импульса:

$$T^{ik} = WV^iV^k + V^iI^k + V^kI^i + \mathcal{P}^{ik} \,. \tag{5}$$

Здесь V^i - четырехмерное векторное поле скорости среды, которое непременно времениподобно и нормировано на единицу, т.е., $g_{ik}V^iV^k = 1$. Симметричный тензор

$$\Delta_{ik} \equiv g_{ik} - V_iV_k \,, \tag{6}$$

играет роль проектора, ибо обладает свойствами:

$$\Delta_{ik}V^k \equiv 0 \,, \quad \Delta_{ik}\Delta^{ij} = \Delta^j_k \,, \quad \Delta^k_k = 3 \,. \tag{7}$$

Скалярная плотность энергии

$$W \equiv T^{ik}V_iV_k \,, \tag{8}$$

обобщенный вектор Пойнтинга

$$I^i \equiv T^{jl}V_j\Delta^i_l = \Delta^i_jT^{jl}V_l \quad (I^iV_i = 0) \tag{9}$$

и тензор напряжений (давлений)

$$\mathcal{P}^{ik} \equiv \Delta^i_jT^{jl}\Delta^k_l \tag{10}$$

представляют собой тензорные объекты, которым принято придавать динамический смысл при моделировании процессов в системе. Макроскопическую скорость системы обычно вводят по определению Эккарта:

$$V^i = \frac{N^i}{\sqrt{N^kN_k}} \,, \tag{11}$$

где N^i- четыре-вектор потока числа частиц. Более распространенная форма записи правила Эккарта (11)

$$N^i = nV^i \tag{12}$$

вводит в рассмотрение скаляр плотности числа частиц

$$n = V^i N_i = \sqrt{N^k N_k}\,. \tag{13}$$

Из закона сохранения числа частиц следует, что

$$\nabla_i N^i = 0 = \nabla_i (nV^i) = V^i \nabla_i n + n \nabla_i V^i\,. \tag{14}$$

Итак, законы сохранения энергии-импульса и числа частиц дают четыре уравнения (3) и одно уравнение (14), т.е., всего пять. При этом неизвестных величин становится 14. Это скаляр n, три независимые компоненты нормированного вектора скорости V^i, скаляр W, три независимые компоненты 4-вектора I^i, ортогонального макроскопической скорости, $g_{ik}V^i I^k = 0$, а также шесть компонент симметричного тензора давлений $\mathcal{P}^{ik}$, который также ортогонален скорости ($\mathcal{P}^{ik}V_i = 0 = \mathcal{P}^{ik}V_k$). Такая система, очевидно, является недоопределенной.

Если настаивать на том, что именно уравнения (3) и (14) являются уравнениями эволюции системы (как это делается во многих научных трудах), то указанные *пять* уравнений должны быть дополнены *девятью* соотношениями (связями), чтобы сделать систему уравнений определенной. Однако, не все девять уравнений имеют одинаковый статус. Опираясь на термодинамические идеи о равновесных и неравновесных величинах, многие авторы считают, что к равновесным величинам следует отнести n, V^i, W и Паскалево изотропное давление P. Последняя из указанных величин появляется при разложении

$$\mathcal{P}^{ik} \quad \rightarrow \quad -P\Delta^{ik} + \Pi^{ik}\,, \tag{15}$$

где Π^{ik} - тензор неравновесного (анизотропного) давления. Считается, что три независимые компоненты пространственно - подобного 4-вектора I^i, а также компоненты тензора Π^{ik} должны быть выражены через производные от равновесных функций. Кроме того, плотность числа частиц находится непосредственно из (14). Тогда пять функций V^i, W и P оказываются связанными четырьмя уравнениями (3). Оставшееся необходимое феноменологическое соотношение и называется уравнением состояния.

Подведем промежуточные итоги.

1) Если неравновесные моменты равны нулю, т.е., $I^i = 0$ и $\Pi^{ik} = 0$, то уравнение состояния, необходимое для замыкания системы эволюционных уравнений, - это одно уравнение связи (функциональное, дифференциальное, интегральное и т.д.), включающее, вообще говоря, пять функций V^i, W, и P (это уравнение может включать также и n, если скаляр W представлен как $W = ne$, где e-удельная плотность энергии). Если эволюционные уравнения усилены термодинамическими соотношениями, то в равновесном случае появляется новое действующее лицо - температура T, но одновременно добавляется дополнительное уравнение - закон Гиббса, или первое начало термодинамики. В этом случае уравнение состояния включает, вообще говоря, семь функций n, V^i, W, P и T, но по прежнему остается единственным соотношением, необходимым для замыкания полной системы эволюционных уравнений.

2) Если неравновесные моменты I^i и Π^{ik} не равны нулю, необходимо ввести девять так называемых конституционных (или основополагающих) уравнений; одно из них, как правило, имеет вид расширенного (модифицированного) уравнения состояния. Эта задача подробно рассмотрена в лекционном курсе "Причинная термодинамика и статистика".

1.2 Какими условиями ограничен выбор феноменологических уравнений состояния?

1. В пространственно-изотропной физической системе скорость, будучи величиной векторной, не может участвовать в формулировке уравнения состояния, однако, участие скаляра растяжения-сжатия, как дивергенции скорости, $\Theta \equiv \nabla_i V^i$, - не возбраняется. Последнее обстоятельство важно для релятивистской изотропной космологии, поскольку в этой модели скаляр растяжения - сжатия равен утроенной функции Хаббла, H, которая играет фундаментальную роль в моделях Фридмановского типа.

2. Энтропия системы должна быть непрерывной функцией состояния. В частности, если независимыми термодинамическими переменными считаются температура T и плотность числа частиц n, а уравнение состояния можно смоделировать в виде пары *функциональных* соотношений

$$P = P(n,T), \quad W = W(n,T)\,, \tag{16}$$

то должно выполняться коммутационное соотношение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial n} = \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\,, \tag{17}$$

как следствие непрерывности вторых производных скаляра энтропии s.

3. В пространственно-анизотропной физической системе вместо скаляра Паскалевского давления P должен быть введен тензор напряжений, у которого не все собственные значения $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$ совпадают. В этом случае два соотношения (16) логично заменить на четыре уравнения

$$P_{(a)} = P_{(a)}(n,T)\,, \quad W = W(n,T)\,, (a) = (1),(2),(3)\,. \tag{18}$$

Если функциональных соотношений для формулировки уравнений недостаточно, можно воспользоваться интегро - дифференциальными соотношениями; так обычно поступают, если речь идет о реологических моделях и моделях сред с памятью.

2 Примеры уравнений состояния в релятивистских системах

Прежде чем мы рассмотрим конкретные уравнения состояния в релятивистской гидродинамике, методически важно убедиться в том, что свобода моделирования ограничена некими условиями совместности или условиями интегрируемости.

2.1 Дифференциальные соотношения, ограничивающие уравнения состояния $P{=}P(n,T)$, $W{=}W(n,T)$

Связь между P и $W{=}en$ подчиняется условию интегрируемости. Это условие можно получить следующим образом. Уравнение Гиббса

$$TDs = De + PD\left(\frac{1}{n}\right) , \tag{19}$$

в котором символом D обозначена конвективная производная $D = V^i\nabla_i$, легко представить в виде (проверить самостоятельно в качестве *упражнения*):

$$Ds = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}DT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial n} - \frac{P}{n^2}\right)Dn\,. \tag{20}$$

Считая конвективные дифференциалы Dn и DT независимыми, получим, что

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}\,, \quad \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial n} - \frac{P}{n^2}\right)\,. \tag{21}$$

Полагая, что частные производные коммутируют

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial n} = \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\,, \tag{22}$$

находим условие, при котором Ds является полным дифференциалом, или иначе, условие интегрируемости:

$$n^2\,\frac{\partial e}{\partial n} + T\,\frac{\partial P}{\partial T} = P\,. \tag{23}$$

В терминах W это условие имеет вид:

$$n\,\frac{\partial W}{\partial n} + T\,\frac{\partial P}{\partial T} = W + P\,. \tag{24}$$

Предназначение данных уравнений, как своеобразных тестов, таково. Мы можем сформулировать феноменологически (например, используя графики экспериментальных зависимостей) формулу для удельной плотности энергии $e(n,T)$; тогда формула для $P(n,T)$ может быть найдена из (23) с точностью до некоторой произвольной функции. Можно действовать и наоборот: задать функцию $P(n,T)$ и обнаружить $W(n,T)$, интегрируя (24). Ниже рассмотрены примеры применения обеих процедур.

2.2 Баротропные уравнения состояния

2.2.1 О моделях общего вида

Термин "баротропные уравнения состояния"применяется в том случае, если явно задано функциональное уравнение, связывающее давление и плотность энергии

$$P = P(W). \tag{25}$$

В современной теоретической космологии и астрофизике именно баротропные уравнения состояния наиболее часто используются при моделировании эволюции Вселенной или строения звезд. По - видимому, первым шагом на пути обобщения уравнений состояния стали две наиболее известные модели: модель массивной пыли с $P = 0$ и модель системы безмассовых частиц, для которой $P = \frac{1}{3}W$. Это были два наиболее наглядных примера применения линейного соотношения

$$P = \sigma W - B \,, \tag{26}$$

где σ и B - некоторые константы. Очевидно, что пыль соответствует случаю $\sigma = 0$, $B = 0$. Модель безмассовых частиц описывается константами $\sigma = \frac{1}{3}$, $B = 0$. Впоследствии было установлено, что константа B возникает при описании систем с доминирующим сильным взаимодействием и называется "константой мешка". Для большинства же моделей можно считать, что $B = 0$.

Если $P = P(W)$, соотношение (24) приобретает вид

$$n\frac{\partial W}{\partial n} + T\left[\frac{dP}{dW}\right]\frac{\partial W}{\partial T} = W + P(W) \,. \tag{27}$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для искомой функции $W(n,T)$. Следуя правилам нахождения общего решения уравнения такого типа, запишем характеристическую систему

$$\frac{dn}{n} = \frac{dT}{T\left[\frac{dP}{dW}\right]} = \frac{dW}{W + P(W)} \,. \tag{28}$$

Если функция $P = P(W)$ не конкретизирована, но известно, что $W + P \neq 0$, то первый и второй инетегралы этой системы записываются с помощью квадратур:

$$lnC_1 = ln\left(\frac{1}{n}\right) + \int \frac{dW}{W + P(W)} \,, \tag{29}$$

$$lnC_2 = ln\left(\frac{1}{T}\right) + \int \frac{dW}{W + P(W)}\left[\frac{dP}{dW}\right](W) \,. \tag{30}$$

При этом равенство $\Psi(C_1, C_2) = 0$, где Ψ есть произвольная функция своих аргументов, задает решение для W с точностью до одной произвольной функции.

Если речь идет о линейном уравнении состояния (26), то соответствующий результат можно записать в явном виде:

$$C_1 = \frac{1}{n}[(1+\sigma)W - B]^{\frac{1}{(1+\sigma)}}, \quad C_2 = \frac{1}{T}[(1+\sigma)W - B]^{\frac{\sigma}{(1+\sigma)}}, \tag{31}$$

а из характеристического уравнения

$$\frac{dn}{n} = \frac{dT}{\sigma T} \tag{32}$$

получить вспомогательный интеграл

$$\mathrm{C}_3 = \frac{T}{n^\sigma}. \tag{33}$$

Поскольку на решении исходного уравнения интеграл C_2 есть произвольная функция интеграла C_3, то явное решение имеет вид

$$W = \frac{1}{1+\sigma}\left[T^{1+\frac{1}{\sigma}} f\left(\frac{T}{n^\sigma}\right) + B\right], \tag{34}$$

где $f\left(\frac{T}{n^\sigma}\right)$ - есть произвольная функция своего аргумента.

2.2.2 Газ безмассовых частиц

Из соотношения (34) при $\sigma = \frac{1}{3}$ и $B = 0$ получим

$$W = \frac{3}{4}\, T^4\, f\left(\frac{T}{n^{\frac{1}{3}}}\right), \tag{35}$$

и если функция $f\left(\frac{T}{n^\sigma}\right)$ постоянна, то

$$W = \chi T^4, \quad P = \frac{1}{3}\chi T^4, \tag{36}$$

т.е., воспроизводится закон Стефана-Больцмана.

2.2.3 Уравнение состояния кварк-глюонной плазмы

Для моделирования уравнения состояния кварк - глюонной плазмы используют линейное соотношение

$$W = 3P + 4\mathcal{B}\,, \tag{37}$$

которое соответствует разобранному выше случаю с $\sigma = \frac{1}{3}$ и $\mathcal{B} = \frac{3}{4}B$. Понятно, что плотность энергии W обязана иметь вид (34), однако, произвольная функция в данном примере выбирается весьма нетривиальным образом.

Начнем с того, что модельное уравнение для плотности энергии кварк-глюонной плазмы формулируется с помощью температуры и кваркового химического потенциала μ:

$$W = \frac{37}{30}\pi^2 T^4 + 3\mu^2 T^2 + \frac{3\mu^4}{2\pi^2} + \mathcal{B}\,, \tag{38}$$

причем барионная плотность n есть кубическая функция μ:

$$n = \frac{2\mu}{3}\left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}\right)\,. \tag{39}$$

Очевидно, что мы имеем дело с параметрической формой задания функции $W(n,T)$, и для подтверждения того факта, что уравнения интегрируемости выполняются и в данном случае тоже, нам необходимо указать, как строится произвольная функция $f\left(\frac{T}{n^{\frac{1}{3}}}\right)$ в соотношении (34).

Начнем с того, что представим аргумент $X \equiv \frac{T}{n^{\frac{1}{3}}}$ искомой произвольной функции $f(X)$ с помощью некой функции от безразмерного аргумента $z \equiv \frac{\mu}{\pi T}$

$$X = \frac{T}{n^{\frac{1}{3}}} = \left[\frac{2\pi}{3} z\left(1 + z^2\right)\right]^{-\frac{1}{3}}\,. \tag{40}$$

Обратная функция $z(X)$ находится как решение кубического уравнения

$$z^3 + z - \frac{3}{2\pi X^3} = 0\,. \tag{41}$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = \frac{1}{27} + \frac{9}{16\pi^2 X^6} \tag{42}$$

положителен, следовательно, уравнение имеет только один действительный корень, который задается формулой Кардано

$$z_* = \left[\sqrt{D} + \frac{3}{4\pi X^3}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[\sqrt{D} - \frac{3}{4\pi X^3}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{43}$$

Этот корень положителен, как и требует определение. С другой стороны, выразив W в формуле (38) с помощью z, получим

$$W = \frac{3\pi^2}{4} T^4 \left(\frac{74}{45} + 4z^2 + 2z^4\right) + \mathcal{B}\,. \tag{44}$$

Сравнивая (44) с уравнением

$$W = \frac{3}{4}\left[T^4 f(X)) + \mathcal{B}\right]\,, \tag{45}$$

можно заявить, что тест на совместность будет пройден, если произвольная функция выбрана следующим образом:

$$f(X) = \pi^2 \left[\frac{74}{45} + 4z_*^2(X) + 2z_*^4(X)\right]\,, \tag{46}$$

где $z_*(X)$ выбрана по правилу (43).

2.2.4 Уравнение состояния сверхжесткой среды

При $\sigma = 1$ и $B = 0$ получим уравнение состояния так называемой сверхжесткой среды

$$W = P = \frac{1}{2}\left[T^2 f\left(\frac{T}{n}\right)\right]\,. \tag{47}$$

Такой термин обусловлен тем, что в данном случае скорость звука в среде, определяемая по формуле Вайнберга

$$v_{(s)} = c\sqrt{\frac{dP}{dW}} \to c\sqrt{\sigma}\,, \tag{48}$$

равна скорости света c.

2.2.5 Об уравнении состояния "струнного газа"

При $\sigma = -\frac{1}{3}$ и $B = 0$ мы имеем дело с так называемым "струнным газом"; для него согласно (34)

$$W = \frac{3}{2T^2} f\left(T n^{\frac{1}{3}}\right) . \tag{49}$$

Любопытно, что если выбрать произвольную функцию по правилу

$$f = 2\chi \left(T n^{\frac{1}{3}}\right)^3 , \tag{50}$$

то получим удивительные соотношения

$$W = 3\chi n T \,, \quad P = -\chi n T \,, \tag{51}$$

в котором формула для давление напоминает формулу Больцмана $P = k_B n T$, однако, давление имеет отрицательный знак.

2.2.6 Особый случай $P + W = 0$ (среда вакуумо-подобного или фантомного типа)

При $\sigma = -1$ и $B = 0$ получим особый случай уравнение состояния вакуумо-подобной (фантомной) среды, для которой $P + W = 0$. Для такой среды тензор энергии - импульса имеет вид $T^i_k = W\delta^i_k$, следовательно, собственное значение W четырехкратно вырождено, и любой вектор является собственным.

При $\sigma = -1$ и $B = 0$ мы должны вернуться к исходному уравнению, которое теперь имеет вид

$$n\frac{\partial W}{\partial n} - T\frac{\partial W}{\partial T} = 0 \,. \tag{52}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dT}{T} = \frac{dW}{0} \tag{53}$$

легко интегрируется:

$$C_1 = nT \,, \quad W = f(C_1) \,, \tag{54}$$

где $f(C_1)$ - произвольная функция своего аргумента. В итоге получим соотношение

$$W = -P = f\left(nT\right)\,, \tag{55}$$

которое, в частном случае линейной функции принимает вид

$$W = -P = \chi nT\,, \tag{56}$$

т.е., может быть охарактеризовано как квази-Больцмановское.

2.2.7 Обобщенный газ Чаплыгина

В связи с открытием явления ускоренного расширения Вселенной большую популярность приобрела модель обобщенного газа Чаплыгина, для которой давление отрицательно и увеличивается по модулю с уменьшением плотности энергии субстрата:

$$P = -\frac{A}{W^{\alpha}}\,. \tag{57}$$

Параметры A и α положительны. В данном примере первый и второй интегралы (29),(30) находятся явно:

$$C_1 = \frac{1}{n}\left[W^{\alpha+1} - A\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\,, \tag{58}$$

$$C_2 = \frac{1}{T}\left[1 - \frac{A}{W^{\alpha+1}}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,. \tag{59}$$

Пользователю предлагается проверить самостоятельно в качестве *упражнения*, что можно также ввести удобный третий интеграл, как функциональную комбинацию первых двух интегралов:

$$C_3 = \frac{W}{n}T^{\frac{1}{\alpha}} = fracC_1C_2^{\frac{1}{\alpha}}\,. \tag{60}$$

Общее решение исследуемого уравнения удобно представить в виде $\Psi(C_1, C_3) = 0$, а затем переписать его следующим образом (*проверить самостоятельно*):

$$\left[\frac{W}{n}T^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha+1} = f(Y)\,, \quad Y \equiv \left[\left(\frac{W}{n}\right)^{\alpha+1}\left(1 - \frac{A}{W^{\alpha+1}}\right)\right]\,, \tag{61}$$

где $f(Y)$ есть произвольная функция своего аргумента. В частном случае, когда произвольная функция линейна с коэффициентом пропорциональности K, плотность энергии не зависит от плотности n и может быть записана как функция температуры с помощью так называемого критического показателя:

$$W = W_* \left[1 - \left(\frac{T}{T_*} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right]^{-\frac{1}{\alpha+1}} . \tag{62}$$

Здесь использованы обозначения

$$T_* \equiv K^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} , \quad W_* \equiv A^{\frac{1}{\alpha+1}} . \tag{63}$$

При таком выборе произвольной функции f решение имеет физический смысл только в "пост-критическую эпоху"расширения Вселенной $T < T_*$, т.е., в поздние времена, когда температура упала ниже критического значения.

2.3 Небаротропные уравнения состояния

2.3.1 Идеальный газ релятивистских частиц

Рассмотрим класс моделей, в которых удельная плотность энергии e не зависит от плотности числа частиц n, а плотность энергии W, является, соответственно, линейной функцией плотности числа частиц $W = ne(T)$. В этом случае уравнение (23) принимает вид

$$T \, \frac{\partial P}{\partial T} = P \, . \tag{64}$$

Характеристическое уравнение

$$\frac{dn}{0} = \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} \tag{65}$$

дает два интеграла

$$\mathrm{C}_1 = n \, , \quad C_2 = \frac{P}{T} \, , \tag{66}$$

так что общее решение $P = f(n)T$ содержит произвольную функцию $f(n)$. Наиболее известным примером уравнения данного типа является уравнение состояния для релятивистского идеального газа, для которого произвольная функция превращается в линейную от плотности числа частиц

$$P = nk_B T\,, \quad W = ne(T)\,. \tag{67}$$

Поиск функции $e(T)$ - это *упражнение*, которое пользователю предлагается выполнить самостоятельно с помощью материалов, изложенных в [2]. Ответ хорошо известен:

$$e(T) = k_B T \left[\lambda\, \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)} - 1\right]\,, \quad \lambda \equiv \frac{mc^2}{k_B T}\,. \tag{68}$$

Символом $K_s(\lambda)$ обозначены модифицированные функции Бесселя, определенные следующим образом:

$$K_s(\lambda) \equiv \int_0^\infty dt \exp\{-\lambda \cosh t\} \cosh st\,. \tag{69}$$

Других (нелинейных) примеров выбора функции $f(n)$ в литературе нет, но пользователю предлагается самостоятельно поискать новые любопытные примеры данного класса в качестве игрового упражнения.

2.3.2 Газ ван-дер-Ваальса

Пусть плотность энергии W есть квадратичная функция плотности числа частиц

$$W(n,T) = ne(T) - an^2\,, \tag{70}$$

где a - некоторая константа. Тогда уравнение (24) превращается в

$$T\,\frac{\partial P}{\partial T} = P + an^2\,. \tag{71}$$

Характеристическое уравнение

$$\frac{dn}{0} = \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P + an^2} \tag{72}$$

дает интегралы

$$\mathrm{C}_1 = n\,, \quad C_2 = \frac{P + aC_1^2}{T}\,, \tag{73}$$

а общее решение представляется в виде $P + an^2 = f(n)T$, где $f(n)$ - произвольная функция плотности числа частиц. В разряд таких уравнений состояния попадает уравнение ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{nk_B T}{1 - nb} - an^2\,, \tag{74}$$

для которой

$$f(n) = \frac{nk_B}{1 - nb}\,. \tag{75}$$

Иные конструкции произвольной функции $f(n)$ не попали в анналы физики, однако, пользователю предлагается самостоятельно придумать и обосновать новый именной закон, выбрав $f(n)$ должным образом.

2.3.3 Ядерная жидкость

Одно из модельных уравнений состояния ядерной жидкости, справедливое при температурах выше энергии Ферми, основано на следующем представлении удельной плотности энергии

$$e(n, T) = \frac{K}{18}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)^2 + \frac{3}{2}T + \frac{\pi^2}{10n}T^4 + m_n\,. \tag{76}$$

В данной формуле K - коэффициент ядерной сжимаемости, n - барионная плотность, n_0 - плотность насыщения симметричной ядерной материи. Второй член в правой части (76) описывает тепловые возбуждения нуклонов, третий - тепловые возбуждения пи-мезонов, а последнее слагаемое есть энергия покоя нуклона. Здесь использованы энергетические единицы для температуры (отсутствует привычная постоянная Больцмана) и для энергии покоя нуклона ($m_n = 938$ Мэв; в данной формуле отсутствует привычный коэффициент c^2). Уравнение (23) в этом случае приобретает вид

$$T\,\frac{\partial P}{\partial T} = P + \frac{\pi^2}{10}T^4 - \frac{Kn^2}{9n_0}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\,, \tag{77}$$

а характеристическое уравнение

$$\frac{dn}{0} = \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P + \frac{\pi^2}{10}T^4 - \frac{Kn^2}{9n_0}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)} \tag{78}$$

дает очевидный первый интеграл $C_1 = n$. Второй же интеграл C_2 получается при решении линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dT} = \frac{P}{T} + \left[\frac{\pi^2}{10}T^3 - \frac{KC_1^2}{9Tn_0}\left(\frac{C_1}{n_0} - 1\right)\right]\,. \tag{79}$$

Пользователю предлагается самостоятельно найти общее решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка в обыкновенных производных методом вариации произвольной постоянной и проверить, что, повторяя использованную выше процедуру, мы получим

$$P(n,T) = Tf(n) + \frac{Kn^2}{9n_0}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right) + \frac{\pi^2}{30}T^4\,. \tag{80}$$

Первое слагаемое в правой части, линейное по температуре, следует отождествить с давлением нуклонов nT, которое соответствует нерелятивистскому вкладу $\frac{3}{2}T$ нуклонов в удельную энергию ядерной жидкости. Таким образом, произвольная функция $f(n)$ оказывается линейной $f(n) = n$ (напомним, что постоянная Больцмана считается равной единице в выбраной системе единиц).

2.3.4 Политропное уравнение состояния

Пусть давление не зависит от температуры и представлено степенной функцией плотности числа частиц

$$P = Kn^{\gamma}\,. \tag{81}$$

Коэффициент γ называется показателем политропы. Уравнение (24) в этом случае превращается в

$$n\frac{\partial W}{\partial n} = W + Kn^{\gamma}\,. \tag{82}$$

Характеристическое уравнение

$$\frac{dn}{n} = \frac{dT}{0} = \frac{dW}{W + Kn^{\gamma}} \tag{83}$$

дает очевидный первый интеграл $C_1 = T$ и линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dn} = \frac{W}{n} + Kn^{\gamma-1} \tag{84}$$

для нахождения W. Пользователю предлагается проверить, что решением поставленной задачи является функция

$$W(n) = nf(T) + \frac{Kn^{\gamma}}{\gamma - 1} \tag{85}$$

с температурной зависимостью в виде произвольной функции $f(T)$. Для нерелятивистских политроп W представима в виде

$$W(n) = nmc^2 + \frac{P}{\gamma - 1}\,, \tag{86}$$

т.е., произвольная функция $f(T) = mc^2$ оказывается постоянной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jou D., Casas - Vazques J. and Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics.* - 1996. - Berlin. Springer Verlag.

[2] Балакин А.Б. *Релятивистская теория многочастичных систем. Часть II. Релятивистская гидродинамика.* - 2003. - Казань. Изд. «Унипресс». 68 С.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Балакин Александр Борисович

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА.

Часть II. Уравнения состояния в релятивистской гидродинамике

Подписано в печать 15.05.2015