КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра теории относительности и гравитации

Б А Л А К И Н А. Б.

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Часть I. Температурные волны в изотропных средах

КАЗАНЬ - 2015

УДК 537.8

Принято на заседании кафедры теории относительности и гравитации Института физики КФУ
Протокол N 4 от 13 мая 2015 года

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им.Н.И.Лобачевского **А.А. Попов**

Балакин А.Б.
Причинная термодинамика и статистика.
Часть I. Температурные волны в изотропных средах
/ А.Б. Балакин. - Казань:
Казан. ун-т, 2015. - 28 с.

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика».

В первой части методических указаний к курсу «Причинная термодинамика и статистика» речь идет о температурных волнах, весьма дискуссионном объекте физического и математического моделирования.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КПФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика». Специфика данного курса состоит в том, что он ориентирован на приложения к Релятивистской астрофизике, Космологии, Физике высоких энергий и Физике объектов с экстремальными плотностью, давлением и энерговыделением, а потому изложение ведется на языке *релятивистской* теории многочастичных систем. Сложность восприятия данного курса связана с тем, что у большинства студентов магистратуры нет знания фундаментальных основ релятивистской теории частиц и полей, а у части студентов (в частности, поступивших в магистратуру из других вузов) обнаруживается дефицит знаний в области математической физики и теории специальных функций. Указанные пробелы приходится ликвидировать и в процессе чтения лекций, и при самостоятельной работе студентов, и на практических занятиях по решению задач. Данные методические указания призваны помочь студентам в изучении курса.

Методические указания к курсу «Причинная термодинамика и статистика» разделены на три части. В первой части, которая предлагается вниманию пользователей, речь идет о температурных волнах, весьма дискуссионном объекте физического и математического моделирования. Дело в том, что классическое уравнение теплопроводности принадлежит к параболическому типу и не описывает волн в стандартном смысле. Ниже на примере решения нескольких задач о распространении тепла мы иллюстрируем точку зрения сторонников «Причинной термодинамики» на этот спорный сюжет [1,2].

ВВЕДЕНИЕ. Температурные волны: конфликт физической и математической точек зрения

Классическая теория теплопроводности основана на эволюционном уравнении для температуры, которое относится к уравнениям параболического типа. Волны в классическом понимании описываются уравнениями гиперболического типа, следовательно, с точки зрения математика температурных волн быть не может. В то же время во многих областях физики возникают процессы, сопровождающиеся волнообразными изменениями температуры. Особенно часто эти явления наблюдаются при изучении теплобмена в различных слоях земной коры и земной атмосферы. Для того, чтобы устранить данное противоречие существует несколько подходов. Один из них реализуется в рамках теории, названной в силу ряда исторических мотивов «Причинной термодинамикой». В первой части методических указаний мы подробно разберем решения пяти задач. Первая из них - это решение задачи Коши в рамках классической теории теплопроводности, которая приводит к формально бесконечной скорости распространения температурных сигналов. Вторая и третья задачи связаны с феноменологической модификацией уравнения теплопроводности, которая предложена Каттанео в 40х годах двадцатого века [3]; обсуждаются задача в неограниченной области и задача внутри шара. Четвертая задача ассоциирована с моделью, условно названной моделью Вольтерра, поскольку ключевое уравнение для температуры сведено к интегро-дифференциальному уравнению. Пятая задача связана с причинной модификацией релятивистской термодинамики, предложенной в 70х годах двадцатого века Израэлем и Стьюартом [4]. Решение задач сопровождается кратким напоминанием основных теоретических положений.

1 Классическая модель теплопроводности

1.1 Уравнение баланса тепла

В классической теории изотропных теплопроводящих сред уравнение баланса тепла записывается в интегральной форме по следующему рецепту: скорость изменения количества тепла в заданном объеме (V) равна сумме количества тепла, выработанного объемными внутренними источниками (стоками), и тепла, приобретенного (удаленного) через боковую поверхность (Σ). Математически это интегральное уравнение баланса имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(V)} d^3\vec{x}\ C_v\ T(t,\vec{x}) = \iiint\limits_{(V)} d^3\vec{x}\ I_{(\text{ист})} - \iint\limits_{(\Sigma)} dS\ (\vec{n},\vec{I})\,. \quad (1)$$

Здесь под C_v понимается теплоемкость среды, $T(t,\vec{x})$ - это искомая температура, $I_{(\text{ист})}$ - это объемная плотность источников - стоков тепла, dS - элемент площади поверхности на границе тела, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности границы, $\vec{I}$ - вектор теплового потока; скалярное произведение выделяет нормальную к поверхности составляющую данного теплового потока. Используя теорему Остроградского-Гаусса, данное уравнение баланса тепла приводят к дифференциальному виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_v T) = I_{(\text{ист})} - (\vec{\nabla},\vec{I})\,, \quad (2)$$

где дивергенция теплового потока записана с помощью векторного оператора дифференцирования $\vec{\nabla}$.

1.2 Анзац Фурье и уравнение теплопроводности

Ключевым элементом любой модели теплообмена является так называемое конституционное (определяющее) уравнение, связывающее тепловой поток $\vec{I}$ и температуру T. Это соотношение имеет феноменологический статус, то есть, вводится из физических соображений и затем проверяется с помощью предсказанных последствий. В классической теории теплообмена используется анзац Фурье, согласно которому поток тепла пропорционален градиенту температуры:

$$\vec{I} = -\kappa \vec{\nabla} T\,. \tag{3}$$

При этом коэффициент κ может оказаться функцией температуры. Подставляя тепловой поток в уравнение баланса получаем классическое уравнение эволюции температуры:

$$\frac{\partial}{\partial t} T = a^2 \Delta T + b(\vec{\nabla} T)^2 + J\,, \tag{4}$$

где $\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$ - оператор дифференцирования Лапласа, а величины a^2, b и J введены по следующим правилам:

$$a^2 = \kappa \left(C_v + T \frac{\partial C_v}{\partial T} \right)^{-1}\,, \quad b = \frac{\partial \kappa}{\partial T} \left(C_v + T \frac{\partial C_v}{\partial T} \right)^{-1}\,,$$

$$J = I_{(\text{ист})} \left(C_v + T \frac{\partial C_v}{\partial T} \right)^{-1}\,. \tag{5}$$

Если κ и C_v постоянны, то $b = 0$ и a^2 превращается в константу.

1.3 Задача Коши для классической линейной модели теплопроводности и проблема нарушения принципа причинности

ЗАДАЧА:

Найти решение $T(t, x)$ линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} T = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T \tag{6}$$

на интервале $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее начальному условию $T(0, x) = \Phi(x)$, если параметр a постоянен.

Решение находится хорошо известным методом: с помощью представления решения в виде интеграла Фурье

$$T(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left[A(t,\lambda)\cos\lambda x + B(t,\lambda)\sin\lambda x\right] . \tag{7}$$

Подставляя данное разложение в исходное уравнение, получим, что функции $A(t,\lambda)$ и $B(t,\lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}A = -\lambda^2 a^2 A\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}B = -\lambda^2 a^2 B\,, \tag{8}$$

что позволяет прийти к выражению

$$T(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \left[C_1(\lambda)\cos\lambda x + C_2(\lambda)\sin\lambda x\right] . \tag{9}$$

Поскольку $T(0,x) = \Phi(x)$, коэффициенты $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ выражаются через коэффициенты Фурье для начальной функции

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \Phi(\xi)\cos\lambda\xi\,, \quad C_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \Phi(\xi)\sin\lambda\xi\,. \tag{10}$$

Это позволяет представить искомую функцию в виде интеграла

$$T(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \Phi(\xi)\ G(t, x-\xi)\,, \tag{11}$$

в котором появляется функция Грина, ассоциированная с данной задачей Коши

$$G(t,x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(x-\xi)\,. \tag{12}$$

Интегрирование выполняется с учетом формулы Эйлера-Пуассона и дает функцию Гауссового типа

$$G(t,x-\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} . \tag{13}$$

1.4 Как быстро распространяется тепловой сигнал?

Пусть начальный всплеск температуры, возникший в начале координат, аппроксимирован дельта-функцией вида

$$\Phi(x) = \Phi_0 \; \delta(x) \, . \tag{14}$$

В этом случае интегрирование приводит к следующему результату:

$$T(t, x) = \Phi_0 \; G(t, x) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \; \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\} \, . \tag{15}$$

Представим себе наблюдателя, который находится на расстоянии L от начала координат, и $L = 2ct_*$, где c - это скорость света в вакууме (предельная скорость распространения физической информации согласно постулату Эйнштейна), а t_* - это минимальный интервал времени, который однозначно и надежно может быть зафиксирован по часам наблюдателя. Пусть вместе с тепловой вспышкой в начале координат происходит излучение светового сигнала. Тогда в момент t_* свет находится еще только на полпути к наблюдателю, но наблюдатель уже фиксирует получение теплового сигнала

$$T(t_*, L) = \frac{\Phi_0 \sqrt{c}}{\sqrt{2\pi a^2 L}} \; \exp\left\{-\frac{cL}{2a^2}\right\} \, . \tag{16}$$

Налицо нарушение Эйнштейновского принципа причинности: тепловой сигнал прибыл быстрее светового. Более того, из контекста решенной задачи следует, что скорость распространения теплового сигнала равна бесконечности, ибо глядя на Гауссову функцию (15), легко понять, что в любой точке в любой отличный от нуля момент времени сигнал отличен от нуля, то есть информация о тепловом всплеске распространяется мгновенно, или иначе, с бесконечной скоростью.

2 Температурные волны в модели Каттанео

2.1 Анзац Каттанео и уравнение теплопроводности гиперболического типа

В 40х годах прошлого века Каттанео предложил простеший выход из описанной выше противоречивой ситации о законе распространения тепла: превратить уравнение эволюции температуры из параболического в гиперболическое. В его модели уравнение баланса тепла осталось неизменным, но феноменологическое конституционное уравнение претерпело следующие изменения [3]:

$$\vec{I} = -\kappa\vec{\nabla}T - \tau\frac{\partial}{\partial t}\vec{I}. \tag{17}$$

Это действительно простейший вариант нестационарного обобщения конституционного уравнения, поскольку наряду с первой производной можно было бы ввести вторые, третьи и другие старшие производные по времени не только от потока тепла $\vec{I}$, но и от градиента температуры. Физический смысл такого нововведения очень прост. Согласно закону Фурье изменения со временем градиента температуры мгновенно, без какой-либо задержки, порождает тепловой поток. Аналогом этого эффекта является закон падения электрического напряжения на сопротивлении $U = RI$, который предполагает, что изменение электрического потенциала U мгновенно отражается на величине электрического тока I. Но хорошо известен и эффект индуктивности, когда падение напряжения пропорционально производной от тока $U = L\frac{d}{dt}I$, и это может служить мотивом для введения так называемого релаксационного члена в уравнение Каттанео. Если следовать далее этой логике, то можно ввести также и аналог формулы $U = \frac{1}{C}\int\limits_0^t d\xi\ I(\xi)$, описывающий падение напряжения на конденсаторе. В термодинамической версии, в которой роль электрического тока играет тепловой поток, роль электрического потенциала играет температура, а роль падения электрического напряжения играет градиент температуры, - это выглядело бы следующим образом:

$$\vec{I} = -\kappa \vec{\nabla} T - \tau_* \vec{\nabla} \ \frac{\partial T}{\partial t} \,, \tag{18}$$

как аналог обратного соотношения $I = C\frac{d}{dt}U$. Однако, последняя версия расширения конституционных уравнений не приводит к появлению гиперболического уравнения для эволюции температуры, и эта версия была отвергнута.

Для того, чтобы исключить тепловой поток из уравнения для температуры, мы используем схему Каттанео, полагая, что все феноменологические коэффициенты представляют собой модельные константы, а источники и стоки тепла отсутствуют. Тогда, дифференцируя уравнение баланса (2) по времени и заменяя $\frac{\partial}{\partial t}\vec{I}$ с помощью расширенного конституционного уравнения (17), получим

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = a^2 \Delta T \,, \tag{19}$$

где точка означает производную по времени. Теперь мы имеем дело с гиперболическим уравнением для описания эволюции температуры. Пользователю рекомендуется повторить эти математические выкладки в качестве *упражнения*.

2.2 Тепловые волны в неограниченном пространстве

Первый класс задач, не связанных с граничными условиями для уравнения (19), дает представление о бегущих волнах в рамках модели Каттанео. Как обычно, в качестве первого шага представим решение в виде интеграла Фурье по координатам

$$T(t, \vec{x}) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \ e^{-i\vec{k}\vec{x}} \ \mathcal{T}(t, \vec{k}) \,, \tag{20}$$

и найдем, что амплитуды $\mathcal{T}(t,\vec{k})$ находятся из дифференциального уравнения в обыкновенных производных

$$\tau\ddot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{T}} + a^2k^2\mathcal{T} = 0\,, \quad k^2 \equiv \vec{k}^2\,. \tag{21}$$

Далее используем преобразование Лапласа по времени

$$\mathcal{T}(t,\vec{k}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dp\; e^{pt}\;\mathcal{T}(p,\vec{k}) \tag{22}$$

и обнаружим, что в силу (21)

$$\mathcal{T}(p,\vec{k}) = \frac{(\tau p+1)\,\mathcal{T}(0,\vec{k}) + \tau\dot{\mathcal{T}}(0,\vec{k})}{\tau p^2 + p + a^2k^2}\,. \tag{23}$$

Начальные данные об искомом решении зашифрованы в функциях $\mathcal{T}(0,\vec{k})$ и $\dot{\mathcal{T}}(0,\vec{k})$. Характеристики распространяющихся тепловых сигналов описываются в этой схеме двумя полюсами функции $\mathcal{T}(p,\vec{k})$, которые задаются формулой

$$p = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \frac{a^2k^2}{\tau}}\,. \tag{24}$$

Если модуль волнового вектора k меньше критического $k < k_* = \frac{1}{2a\sqrt{\tau}}$, имеются два действительных простых полюса, и соответствующие решения описывают ангармонически затухающий тепловой сигнал. Если $k = k_* = \frac{1}{2a\sqrt{\tau}}$, функция $\mathcal{T}(p,\vec{k})$ имеет действительный полюс кратности два. Соответствующее решение описывается двумя модами: первая из них - чисто затухающая $\propto e^{-\frac{t}{2\tau}}$; вторая мода пропорциональна функции $te^{-\frac{t}{2\tau}}$, которая растет со временем, достигает максимума, а затем экспоненциально затухает. Для мод с $k > k_* = \frac{1}{2a\sqrt{\tau}}$ полюса комплекснозначны:

$$p = -\frac{1}{2\tau} \pm i\Omega(k)\,, \quad \Omega(k) = \sqrt{\frac{a^2k^2}{\tau} - \frac{1}{4\tau^2}}\,, \tag{25}$$

так что временна́я зависимость амплитуд данных мод имеет вид $\propto e^{-\frac{t}{2\tau}}\, e^{\pm i\Omega t}$. Очевидно, что мы имеем дело с затухающими волнами, декремент затухания которых постоянен и равен $\frac{1}{2\tau}$, а частота зависит от модуля волнового вектора и равна $\Omega(k)$ (25). Если затухание слабо, то можно говорить о волновом пакете, характеризующемся дисперсией фазовых скоростей

$$V_{ph}(k) = \frac{\Omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{a^2}{\tau} - \frac{1}{4\tau^2 k^2}}\,. \tag{26}$$

Для волн критической длины фазовая скорость равна нулю. С увеличением k значение фазовой скорости асимптотически стремится к $V_{ph}(\infty)=\frac{a}{\sqrt{\tau}}$. Эту величину можно рассматривать как асимптотическую скорость распространения слабозатухающих температурных волн. Идея Каттанео реализована.

2.3 Температурные волны в однородном шаре

В рамках модели Каттанео интересно рассмотреть эволюцию температуры внутри сферы радиуса R_0 при условии, что тепловой поток на границе равен нулю. Задача решается с использованием сферической системы координат, а искомая функция $T(t, r, \theta, \varphi)$ стандартно раскладывается в ряд по сферическим функциям

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)[\tilde{C}_{1m}\cos m\varphi + \tilde{C}_{2m}\sin m\varphi]\,, \tag{27}$$

где $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра. Поскольку сферические функции удовлетворяют уравнению

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = -n(n+1) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)\,, \tag{28}$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{29}$$

- это угловая часть оператора Лапласа, мы видим, что разложение

$$T(t,r,\theta,\varphi)=\sum_{n,m,k}T_{nmk}(t)\ R_{nk}(r)\ Y_n^{(m}(\theta,\varphi) \tag{30}$$

редуцирует задачу к процедуре поиска радиальных функций $R_{nk}(r)$, зависящих только от радиуса, а также амплитудных коэффициентов $T_{nmk}(t)$, зависящих только от времени. Действуя методом разделения переменных, получим ключевые соотношения

$$\tau\frac{\ddot{T}_{nmk}}{a^2T_{nmk}}+\frac{\dot{T}_{nmk}}{a^2T_{nmk}}=\frac{1}{r^2R_{nk}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{nk}}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}=K=const\,. \tag{31}$$

Как обычно, следует рассмотреть три случая.

1) $K=0$.

Если K=0, уравнение для функции R_{nk} превращается в уравнение Эйлера. Его решение

$$R_{nk}=A_{nk}\ r^n+B_{nk}\ r^{-(n+1)} \tag{32}$$

регулярно в центре шара, только если $B_{nk}=0$. Оставшаяся степенная функция удовлетворяет граничному условию

$$\left[\frac{d}{dr}R_{nk}(\nu r)\right]_{|r=R_0}=0\,, \tag{33}$$

которое обеспечивает отсутствие нормальной компоненты потока тепла на границе, только если A_{nk}=0. Для собственных функций граничной задачи тривиальное решение недопустимо, поэтому случай K=0 следует исключить.

2) $K>0$.

Для ненулевой константы K замена $R_{nk}\rightarrow r^{-\frac{1}{2}}V_{nk}$ превращает уравнение для радиальной функции в уравнение Бесселя

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}V_{nk}+r\frac{d}{dr}V_{nk}+\left[-Kr^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]V_{nk}=0\,. \tag{34}$$

Если константа K положительна, $K = \nu^2$, решение данного уравнения есть линейная комбинация функций Бесселя мнимого аргумента $I_{n+\frac{1}{2}}(\nu r)$ и $K_{n+\frac{1}{2}}(\nu r)$. Поведение этих функций монотонно, так что производная по радиальной переменной (см. (33)) не сможет обратиться в нуль на внешней границе области. Иными словами, граничное условие, обеспечивающее отсутствие потока тепла на границе, также невыполнимо, если $K = \nu^2 > 0$.

3) $K < 0$.

При $K = -\lambda^2 < 0$ решение уравнения для V_{nk} есть линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода

$$V_{nk}(r) = C_{1nk} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + C_{2nk} Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\,. \tag{35}$$

Регулярность найденного решения в центре шара гарантирована, если только $C_{2nk} = 0$, поскольку $Y_{n+\frac{1}{2}}(0) = \infty$. Граничное условие будет удовлетворено, если в качестве λ выбраны значения $\lambda = \frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{R_0}$, причем счетное множество $\left\{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right\}$ построено на корнях уравнения

$$2\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\,. \tag{36}$$

Найденные значения константы $K = -\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{R_0}\right)^2$ позволяют нам приступить к нахождению амплитудных коэффициентов $T_{nmk}(t)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\ddot{T}_{nmk} + \frac{1}{\tau}\,\dot{T}_{nmk} + \omega_{nmk}^2\, T_{nmk} = 0\,, \tag{37}$$

где введены следующие обозначения

$$\omega_{nmk}^2 \equiv \frac{a^2}{\tau}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{R_0}\right)^2\,. \tag{38}$$

В зависимости от обобщенного номера моды (то есть, комплекта чисел (n, m, k)) и значения релаксационного параметра τ существуют три типа решений. Если $2\tau\omega_{nmk} < 1$, то соответствующие моды являются ангармоническими (затухающими):

$$T_{nmk}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A_{nmk}\ e^{\Gamma_{nmk}t} + B_{nmk}\ e^{-\Gamma_{nmk}t}\right]\ , \tag{39}$$

$$\Gamma_{nmk} = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_{nmk}^2}\,. \tag{40}$$

Для резонансной моды с $2\tau\omega_{nmk} = 1$ решение

$$T_{nmk}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\tilde{A}_{nmk} + t\tilde{B}_{nmk}\right] \tag{41}$$

возрастает со временем, достигает максимума и затухает асимптотически с декрементом $\gamma = \frac{1}{2\tau}$. Наконец, если $2\tau\omega_{nmk} > 1$, мы имеем дело с затухающими осцилляционными модами

$$T_{nmk}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\mathrm{C}_{1nmk}\cos\Omega_{nmk}t + C_{2nmk}\sin\Omega_{nmk}t\right]\ , \tag{42}$$

$$\Omega_{nmk} = \sqrt{\omega_{nmk}^2 - \frac{1}{4\tau^2}}\,. \tag{43}$$

Тепловое состояние среды в последнем случае можно охарактеризовать термином затухающие стоячие температурные волны. Решение краевой задачи в последнем случае имеет вид

$$T(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{n,m,k} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\mathrm{C}_{1nmk}\cos\Omega_{nmk}t + C_{2nmk}\sin\Omega_{nmk}t\right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} r}{R_0}\right) P_n^{(m)}(\cos\theta)[\tilde{C}_{1m}\cos m\varphi + \tilde{C}_{2m}\sin m\varphi]\,. \tag{44}$$

Константы, входящие в данную конструкцию, стандартно выражаются через интегралы от функций, задающих начальные условия

$$\Psi_1(r,\theta,\varphi) = T(0,r,\theta,\varphi) =$$

$$\sum_{n,m,k} \frac{\mathrm{C}_{1nmk}}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} r}{R_0}\right) P_n^{(m)}(\cos\theta)[\tilde{C}_{1m}\cos m\varphi + \tilde{C}_{2m}\sin m\varphi]\,,$$

$$\Psi_2(r,\theta,\varphi)=\dot{T}(0,r,\theta,\varphi)=\sum_{n,m,k}\left[\mathrm{C}_{2nmk}\Omega_{nmk}-\frac{1}{2\tau}\mathrm{C}_{1nmk}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}r}{R_0}\right)P_n^{(m)}(\cos\theta)[\tilde{C}_{1m}\cos m\varphi+\tilde{C}_{2m}\sin m\varphi]\,. \quad (45)$$

Эти константы предлагается записать *самостоятельно* в качестве упражнения, используя известные соотношения ортогональности-нормировки для специальных функций, использованных выше:

$$\int\limits_{-1}^{1} dxP_n^{(m)}(x)P_k^{(m)}(x)=\delta_{nk}\ \left(\frac{2}{2n+1}\right)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, \quad (46)$$

$$\int\limits_{0}^{l} xdxJ_\nu\left(\frac{\mu_i^{(\nu)}}{l}x\right)J_\nu\left(\frac{\mu_j^{(\nu)}}{l}x\right)=\delta_{ij}\frac{2}{l^2\left[J'_\nu(\mu_j^{(\nu)})\right]^2}\,. \quad (47)$$

В качестве задачи для *самостоятельной* работы пользователю рекомендуется подробно рассмотреть частный случай - *радиальные* тепловые колебания.

3 Модель Вольтерра в расширенной теории теплопроводности

3.1 Интегральный эволюционный оператор

Альтернативой введению частной производной по времени от теплового потока является введение линейного интегрального оператора Вольтерра в конституционные уравнения

$$\vec{I}=-\kappa\ \vec{\nabla}T+\int_0^t d\xi\ \mathcal{K}(t-\xi)\ \vec{I}(\xi,\vec{x})\,. \quad (48)$$

Здесь $\mathcal{K}(t-\xi)$ - разностное ядро интегрального оператора Вольтерра. Привлечение соотношений такого типа часто связывают с наличием памяти в физической системе, поскольку значение градиента температуры в данный момент времени зависит не только от мгновенного значения теплового потока, но и от всей предыстории процесса эволюции теплового потока. Ядро памяти $\mathcal{K}(t-\xi)$ моделируется из физических соображений; наиболее известна конструкция ядра для сред с экспоненциальной памятью

$$\mathcal{K}(t-\xi) = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\,. \tag{49}$$

Такая система полностью «забывает» о воздействии только за бесконечный промежуток времени, но говорить о фактической «потере памяти» можно через промежуток времени τ. Множитель перед экспонентой выбирается из условия, что площадь под кривой $y = \mathcal{K}(x)$ равна единице. В данной модели для описания эволюции температуры мы получаем интегро-дифференциальное уравнение. Оно получается по следующей схеме. Вычисляем дивергенцию правой и левой частей конституционного уравнения (48)

$$(\vec{\nabla}, \vec{I}) = -\kappa \Delta T + \int_0^t d\xi \mathcal{K}(t-\xi)(\vec{\nabla}, \vec{I}(\xi, \vec{x}))\,, \tag{50}$$

а затем с помощью уравнения баланса заменяем $(\vec{\nabla}, \vec{I}) = -C_v \dot{T}$. В результате получим уравнение, не содержащее теплового потока:

$$\dot{T}(t, \vec{x}) = \frac{\kappa}{C_v}\, \Delta T(t, \vec{x}) + \int\limits_0^t d\xi\ \mathcal{K}(t-\xi)\ \frac{d}{d\xi} T(\xi, \vec{x})\,. \tag{51}$$

Понятно, что эта схема не даст столь изящного результата, если ядро оператора Вольтерра зависит не только от времени, но и от пространственных координат. Очевидно также, что модель Вольтерра математически неэквивалентна модели Каттанео.

3.2 Тепловые колебания и волны в модели Вольтерра

Для решения данной задачи вновь перейдем к образу Фурье по пространственным координатам $\mathcal{T}(t,\vec{k})$ по формуле (20). Воспользовавшись правилами операционного исчисления, в частности, применяя теорему об образе свертки, получим, что образ Лапласа $\tilde{T}(p,\vec{k})$ искомой функции $\mathcal{T}(t,\vec{k})$ определяется формулой

$$\tilde{T}(p,\vec{k}) = \mathcal{T}(0,\vec{k})\ \frac{[1-\mathcal{K}(p)]}{p[1-\mathcal{K}(p)]+a^2k^2}\,, \tag{52}$$

где $a^2 = \frac{\kappa}{C_v}$, а $\mathcal{K}(p)$ - это образ Лапласа ядра оператора Вольтерра. Рассмотрим пример, когда разностное ядро оператора Вольтерра имеет экспоненциальный вид (49); в этом случае $\mathcal{K}(p) = \frac{1}{p\tau+1}$, и образ Лапласа температуры приобретает следующую форму:

$$\tilde{T}(p,\vec{k}) = \mathcal{T}(0,\vec{k})\ p\left[\left(p+\frac{1}{2}a^2k^2\right)^2 + \frac{a^4k^2}{4}\left(\frac{4}{\tau a^2}-k^2\right)\right]^{-1}. \tag{53}$$

В соответствии с правилами обратного преобразования Лапласа в $\mathcal{T}(t,\vec{k})$ появятся тригонометрические синусы и косинусы, если вторая скобка в знаменателе положительна, то есть, $k < k_* \equiv \frac{2}{a\sqrt{\tau}}$, или, иначе говоря, длина волны больше критической $\lambda > \lambda_* \equiv \frac{a\sqrt{\tau}}{2}$. В этом случае (при отсутствии полюсов у функции $\mathcal{T}(0,\vec{k})$) получим

$$\mathcal{T}(t,\vec{k}) = \mathcal{T}(0,\vec{k})\ e^{-\frac{1}{2}a^2k^2t}\left[\cos\Omega(k)t - \frac{a^2k^2}{2\Omega(k)}\sin\Omega(k)t\right], \tag{54}$$

где использовано обозначение

$$\Omega(k) = \frac{a^2k}{2}\sqrt{\frac{4}{\tau a^2}-k^2}\,. \tag{55}$$

При $k\to 0$ фазовая скорость, формально определенная как $V_{ph}(k) = \frac{\Omega(k)}{k}$, дает асимптотическое значение $V_{ph}(0) = \frac{a}{\sqrt{\tau}}$, которое уже встречалось нам при обсуждении модели Каттанео как $V_{ph}(\infty) = \frac{a}{\sqrt{\tau}}$.

Иными словами, асимптотическое выражение $\frac{a}{\sqrt{\tau}}$ получается в модели Каттанео в пределе коротких волн, а в модели Вольтерра - в пределе длинных волн.

4 Об описании тепловых явлений в причинной теории Израэля-Стьюарта

4.1 Эволюционные уравнения

Мы предполагаем, что при работе с данными методическими указаниями пользователь уже ознакомился с лекциями по «Причинной термодинамике и статистике», и нам остается только редуцировать полученные уравнения и соотношения на случай, когда среда является теплопроводящей, но в ней отсутствуют объемная и сдвиговая вязкость. Напомним, что в релятивистской ковариантной термодинамике уравнение баланса энергии в интегральной форме не применяется просто потому, что интегрирование нарушает тензорную структуру теории (интеграл от тензора не есть тензор). Однако, дифференциальная форма уравнений баланса хорошо известна (см., например, [5]):

$$DW + (W+P)\nabla_k V^k + 2V_k DI^k + \overset{\perp}{\nabla}_k I^k = V_i \mathcal{T}^i \,. \tag{56}$$

Здесь W- скаляр плотности энергии системы; P - Паскалевское равновесное давление; V^k - четырехмерный вектор макроскопической скорости движения системы; I^k- четырехмерный вектор теплового потока (обобщение трехмерного вектора $\vec{I}$); скаляр $V_i\mathcal{T}^i$ оответствует плотности источников - стоков энергии в системе (как и в предыдущих случаях мы считаем их равными нулю при исследовании вопроса о температурных волнах). Символом ∇_i мы обозначаем ковариантную производную; $D \equiv V^l\nabla_l$ - это конвективная производная (обобщение частной производной по времени на случай движущейся среды); $\overset{\perp}{\nabla}_k \equiv \Delta_k^s \nabla_s$ представляет собой четырехмерное обобщение трехмерного пространственного градиента $\vec{\nabla}$; тензор $\Delta_k^s \equiv \delta_k^s - V^s V_k$ - это проектор, свертка которого с четырехмерным вектором макроскопической скорости среды дает тождественный ноль: $\Delta_k^s V^k = 0$. Все указанные определения детально обсуждаются в рекомендованной работе [5]. Для того, чтобы соотнести уравнение баланса (2) с уравнением (56), необходимо помнить о следующих деталях. Если изменение внутренней энергии происходит только за счет изменения температуры, то принято использовать соотношение

$$DW = DT\,\frac{\partial W}{\partial T} \equiv C_v DT\,, \tag{57}$$

которое феноменологически вводит удельную теплоемкость среды C_v (вообще говоря, как функцию температуры). Кроме того, в классической термодинамической модели система рассматривается как покоящаяся в целом; при этом четырехмерный вектор V^k имеет только нулевую компоненту, равную единице, ($V^0 = 1$), а I^k - только пространственные компоненты ($I^0 = 0$). Если среда несжимаема, то скаляр растяжения-сжатия $\Theta \equiv \nabla_k V^k$ равен нулю. В космологических приложениях $\Theta \equiv \nabla_k V^k = 3H$, где H - функция Хаббла.

Конституционное уравнение, выведенное в рамках «Причинной термодинамики» из принципа неотрицательности производства энтропии [5], имеет следующий вид:

$$\lambda T \beta_1 \Delta_k^i D I^k + I^i \left\{1 + \frac{\lambda T^2}{2}\left[\frac{\beta_1}{T}\Theta + D\left(\frac{\beta_1}{T}\right)\right]\right\} = \lambda\left[\overset{\perp}{\nabla}{}^i T - T D U^i\right]. \tag{58}$$

Здесь β_1 и λ - феноменологически введенные коэффициенты (в общем случае - функции температуры); тензор проектирования $\Delta_k^i \equiv \delta_k^i - V^i V_k$ - это стандартный инструмент, предназначенный для выделения пространственной части любого тензора. Для того, чтобы привести соотношение (58), которое получено из первых термодинамических принципов, к виду (17), который был предложен Каттанео как анзац, необходимо выполнить следующие операции. Во-первых, разделим это уравнение на коэффициент при тепловом потоке (он выделен фигурными скобками). Затем введем обозначения:

$$\beta \equiv \beta_1 T \,, \quad \tau \equiv \beta\kappa \,, \quad \kappa \equiv \lambda \left\{ 1 + \frac{\lambda T^2}{2} \left[\frac{\beta_1}{T}\Theta + D\left(\frac{\beta_1}{T}\right) \right] \right\}^{-1} \tag{59}$$

и приведем конституционное уравнение к виду

$$\tau \Delta^i_k D I^k + I^i = \kappa \left(\overset{\perp}{\nabla}{}^i T - T D V^i \right) . \tag{60}$$

В качестве следующего шага найдем условия, при которых параметры τ и κ постоянны. Понятно, что для этого мы должны считать постоянной величину β, а функцию λ выбрать следующим образом:

$$\lambda = \kappa \left[1 + \beta\kappa \left(\frac{DT}{T} - \frac{1}{2}\Theta \right) \right]^{-1} . \tag{61}$$

В итоге, конституционное уравнение для теплового потока в рамках ковариантной теории Израэля - Стьюарта можно записать в виде, максимально близком к тому, который был феноменологически сконструирован Каттанео. Однако, в конституционном уравнении неотвратимо появляется новый «игрок» - макроскопическая скорость среды, причем в этом уравнении появляется не только сама скорость V^i (через оператор D и проектор Δ^i_k), но и поле ускорения среды DV^i. Это означает, что для замкнутости системы эволюционных уравнений к конституционному уравнению (60) необходимо добавить не только уравнение баланса

$$C_v DT + (W+P)\Theta + 2V_k D I^k + \overset{\perp}{\nabla}_k I^k = 0 \,, \tag{62}$$

но и уравнение

$$(W+P) D V^l = \overset{\perp}{\nabla}{}^l P - I^l \Theta - I^k \overset{\perp}{\nabla}_k V^l - \Delta^l_i D I^i \,, \tag{63}$$

определяющее макроскопическую скорость движения среды. Понятно, что эволюционное уравнение для температуры в модели Израэля - Стьюарта становится значительно более сложным, чем феноменологическое уравнение (19) в модели Каттанео.

4.2 Как получить уравнение эволюции температуры?

Рассмотрим кратко вопрос о том, какие сложности для анализа эволюции температуры возникают при изучении систем, движущихся неравномерно и непрямолинейно. Для того, чтобы исключить тепловой поток и получить уравнение только для температуры, в классической теории теплообмена в покоящейся среде мы использовали тот факт, что частные производные по времени и по пространственным координатам перестановочны, т.е., равен нулю коммутатор

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla},\vec{I}) - \left(\vec{\nabla},\frac{\partial}{\partial t}\vec{I}\right) = 0\,. \qquad (64)$$

Ковариантный аналог такого коммутационного соотношения выглядит значительно сложнее:

$$D\overset{\perp}{\nabla}_k I^k - \overset{\perp}{\nabla}_k D I^k =$$
$$= I^k DV^l \cdot (\overset{\perp}{\nabla}_l V_k) - DI^k \cdot DV_k - (\overset{\perp}{\nabla}_k V^l)\cdot(\overset{\perp}{\nabla}_l I^k) - R_{lk}\, V^l I^k\,. \qquad (65)$$

Из чисто методических соображений стоит напомнить, что (если это не оговорено особо) по умолчанию считается, что дифференциальный оператор действует на всё, что стоит справа о него (как в левой части равенства (65)). В правой части этого равенства с помощью точек и скобок мы подчеркиваем, что соответствующему дифференцированию подвергается только ближайший к оператору символ. Для доказательства формулы (65) начнем с развернутого определения искомого коммутатора

$$[\,,] \equiv D\overset{\perp}{\nabla}_k I^k - \overset{\perp}{\nabla}_k D I^k = V^l \nabla_l \Delta^s_k \nabla_s I^k - \Delta^s_k \nabla_s V^l \nabla_l I^k\,, \qquad (66)$$

выполним ковариантное дифференцирование по правилу Лейбница и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$[\ ,] = V^l \Delta_k^s \left[\nabla_l \nabla_s - \nabla_s \nabla_l\right] I^k - D(V^s V_k) \cdot (\nabla_s I^k) - (\nabla_l I^k)(\overset{\perp}{\nabla}_k V^l)\,. \tag{67}$$

Коммутатор ковариантных производных связан с тензором кривизны Римана $R^k_{\cdot jls}$ соотношением

$$\left[\nabla_l \nabla_s - \nabla_s \nabla_l\right] I^k = R^k_{\cdot jls} I^j\,. \tag{68}$$

В силу антисимметричности тензора Римана по последней паре индексов первое слагаемое в правой части (67) выражается через тензор Риччи $R_{jl} = -R^k_{\cdot jlk}$. Кроме данной операции необходимо также воспользоваться условием ортогональности $I^k V_k = 0$, правилом дифференцирования по частям, а также следствием $V_k \nabla_l V^k = 0$, вытекающим из условия нормировки четырехмерного вектора макроскопической скорости, $V_k V^k = 1$.

4.3 Пример: температурные волны в космологии

При иследовании космологических приложений причинной термодинамики процесс распространения тепла рассматривают в рамках теории возмущений. Этому имеется простое объяснение: в рамках причинной термодинамики теплопроводность характеризуется конечной скоростью распространения, причем волнообразные явления непременно затухают, а потому термодинамические процессы следует рассматривать как локальные во времени и пространстве. Иными словами, общий космологический фон считается неизменным, однородным и изотропным, а тепловые явления вносят лишь слабые возмущения. С математической точки зрения это означает, что мы должны считать метрику неизменной:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]\,, \tag{69}$$

и сделать следующие замены в ключевых уравнениях:

$$W \to \mathcal{W}(t) + \tilde{W}(t, \vec{x}) \,, \quad P \to \mathcal{P}(t) + \tilde{P}(t, \vec{x}) \,, \quad T \to \mathcal{T}(t) + \tilde{T}(t, \vec{x}) \,. \tag{70}$$

Касательно теплового потока I^i, в изотропной Вселенной нет выделенных направлений, и все пространственно-подобные векторы считаются нулевыми, следовательно, величина I^i описывает само возмущение, $\tilde{I}^i{=}I^i$. Особо следует поговорить о конструировании четырехмерного вектора скорости и его ковариантнной производной. В невозмущенном состоянии система в целом покоится, т.е., $V^i{=}\delta^i_0$. Однако, это не означает, что ковариантная производная от нее равна нулю. Действительно,

$$\Psi_{ik} \equiv \nabla_i V_k = -\Gamma^l_{ik} V_l = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} \,, \tag{71}$$

т.е., не равны нулю три пространственные компоненты тензора Ψ_{ik}

$$\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{33} = -\dot{a}a \,. \tag{72}$$

Это, в частности, означает, что четырехмерный вектор ускорения равен нулю, $DV_i = 0$, а скаляр растяжения-сжатия $\Theta = \nabla_k V^k = 3\frac{\dot{a}}{a}$ пропорционален функции Хаббла $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Мы полагаем, что локальные вариации скорости движения системы в целом, ассоциированные с возникновением и миграцией тепловых потоков, пренебрежимо малы, и тогда три уравнения (60), (62) и (63) сводятся к следующим двум:

$$\tau D I^\alpha + I^\alpha = \kappa \overset{\perp}{\nabla}{}^\alpha T \,, \tag{73}$$

$$\tilde{C}_v D\tilde{T} + (\tilde{W} + \tilde{P})\Theta + \overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\alpha = 0 \,. \tag{74}$$

В этих уравнениях под $\tilde{C}_v$ следует понимать $\tilde{C}_v = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{T}}$, конвективная производная D сведена к частной производной по времени, а греческий индекс α пробегает значения x, y, z. Очевидно, что даже в такой упрощенной версии ключевые уравнения для эволюции тепла несут в себе отпечаток воздействия космологического фона, а именно, второе слагаемое в (74) оказывается пропорциональным функции Хаббла, $3H(\tilde{W}+\tilde{P})$. Это новое слагаемое преобразуется к виду $3H\gamma\tilde{W}$, где γ есть постоянная адиабаты, включенная в уравнение состояния $\tilde{P}=(\gamma-1)\tilde{W}$. Наконец, если предположить, что мы имеем дело с пространством де Ситтера с постоянной Хаббла $H=const$, мы получим простейшую модификацию уравнения эволюции температуры. Действительно, применим оператор $\overset{\perp}{\nabla}_\alpha$ к левой и правой частям уравнения (73), а затем воспользуемся коммутатором (65), который при $DV^l=0$ и $\Theta=3H$ упростится и примет вид:

$$D\overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\alpha - \overset{\perp}{\nabla}_\alpha DI^\alpha = -(\overset{\perp}{\nabla}_\beta V^\alpha)\cdot(\overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\beta) - R_{0\alpha}I^\alpha\,. \qquad (75)$$

Для изотропной космологической модели недиагональные компоненты тензора Риччи равны нулю, а пространственная часть ковариантной производной скорости согласно (71), (72) пропорциональна метрике:

$$R_{0\alpha}=0\,,\quad \overset{\perp}{\nabla}_\alpha V_\beta = Hg_{\alpha\beta}\,. \qquad (76)$$

Воспользуемся полученным соотношением

$$\overset{\perp}{\nabla}_\alpha DI^\alpha = D\overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\alpha + H\overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\alpha\,, \qquad (77)$$

выразим $\overset{\perp}{\nabla}_\alpha I^\alpha$ с помощью (74), заменим $\tilde{W}\to\tilde{C}_v\tilde{T}$ и получим окончательно уравнение эволюции температуры:

$$\tau\ddot{\tilde{T}} + \dot{\tilde{T}}[1+\tau H(1+3\gamma)] + 3H\gamma(1+\tau H)\tilde{T} = a^2\Delta\tilde{T}\,, \qquad (78)$$

где $\Delta=-\overset{\perp}{\nabla}_\alpha\overset{\perp}{\nabla}^\alpha$ - оператор Лапласа, $a^2=\frac{\kappa}{\tilde{C}_v}$. Формально новым элементом в структуре данного уравнения является третье слагаемое в левой части, содержащее температуру без производной по времени и пропорциональное постоянной Хаббла. При $H=0$ из (78) мы автоматически получаем уравнение (19).

Решение уравнения (78) находится по той же методике, что и решение (19). Пользователю рекомендуется выполнить упражнения *самостоятельно.* Подчеркнем только три важные детали, которые нельзя упустить из вида. Во-первых, вместо декремента затухания тепловых мод $\frac{1}{2\tau}$ мы получим выражение $\frac{1}{2\tau}[1+\tau H(1+3\gamma)]$. Во-вторых, критическое значение модуля волнового вектора $\tilde{k}_*$, которое разделяет ангармонические и квази-осцилляционные моды,

$$\tilde{k}_* = \frac{1}{2a\sqrt{\tau}}\sqrt{[1+\tau H(1+3\gamma)]^2 - 12\tau\gamma H(1+\tau H)}\,, \qquad (79)$$

зависит от постоянной Хаббла. В частности, при быстром расширении Вселеной, то есть при $\tau H >> 1$, получим, что $\tilde{k}_* = \frac{\sqrt{\tau}H}{2a}|3\gamma - 1|$. В-третьих, асимптотическое значение фазовой скорости температурных волн при $k \to \infty$ остается неизменным $V_{ph}(\infty) = \frac{a}{\sqrt{\tau}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jou D., Casas - Vazques J. and Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics.* - 1996. - Berlin. Springer Verlag.

[2] Maartens R. *Causal thermodynamics in relativity.* Lectures at the Hanno Rund Workshop. - 1996. (astro-ph/9609119).

[3] Cattaneo C. Comptes Rendus. - 1958. - V. 247. - P. 431.

[4] Israel W. and Stewart J. Ann. Phys. - 1979. - V. 118. - P. 341.

[5] Балакин А.Б. *Релятивистская теория многочастичных систем. Часть II. Релятивистская гидродинамика.* - 2003.- Казань. Изд. «Унипресс». 68 С.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Балакин Александр Борисович

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА.

Часть I. Температурные волны в изотропных средах

Подписано в печать 15.05.2015