КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Исследование нестационарного поведения финансового рынка

Автор – С.Г. Халиуллин

Казань – 2014

Халиуллин С.Г. Исследование нестационарного поведения финансового рынка:
Учебно-методическое пособие. — Казань, 2014.

Изложен материал специального курса, на протяжении ряда лет читавшегося автором в Казанском университете. Подробно разобраны доказательства ряда сложных и важных результатов теории мартингалов и теории временны́х рядов. Также рассмотрены нестационарные временны́е ряды, изучаемые с помощью моделей волатильности.

Для студентов-математиков, специализирующихся по теории вероятностей и математической статистике, и специалистов из других областей математики, интересующихся приложениями стохастического анализа в различных областях знаний.

Исследование нестационарного поведения финансового рынка

Институт вычислительной математики и информационных технологий, кафедра математической статистики

Направление: 010400.62 Прикладная математика и информатика

Учебный план: Теория вероятностей и математическая статистика (очное, 2013)

Дисциплина: Курс профессионального цикла «Волатильность финансового рынка» (бакалавриат, 4 курс, очное обучение)

Количество часов – 72 (в том числе: лабораторные занятия 40 часов, самостоятельная работа 32 часа)

Форма контроля: экзамен, 8 семестр

Аннотация: Курс предназначен для студентов, обучающихся по специальности 010400.62 «Прикладная математика и информатика» (профиль «Теория вероятностей и математическая статистика»). Курс содержит основные понятия теории финансового рынка и тех разделов математики, которые позволяют решать её задачи. Рассматривается так называемая волатильность рынка, раскрываются мотивы, требующие специальных моделей в исследовании такого рынка, таких как модели ARCH, GARCH, SV и другие.

Тема 1. Представление цены и гауссовские системы.

Тема 2. Необходимые сведения из теории мартингалов. Каноническое представление. Разложение Дуба.

Тема 3. Локальные мартингалы и мартингальные преобразования.

Тема 4. Линейные стационарные процессы и оценка неизвестных параметров.

Тема 5. Гауссовские и условно-гауссовские модели.

Тема 6. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели.

Тема 7. Оценка волатильности. Критерий волатильности.

Ключевые слова: гауссовские системы, условно гауссовские модели, линейные стационарные модели, волатильность, стохастическая волатильность.

Автор курса: Халиуллин Самигулла Гарифуллович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, телефон (843) 2337155, email: samighaliullin@gmail.com

Дата начала эксплуатации: 1 сентября 2014 года

Доступность: требует обязательной регистрации обучаемых

Язык интерфейса: русский

URL: **http://tulpar.kpfu.ru/course/view.php?id=1372**

Содержание

§1. Гауссовские системы

1. Предположим, что единицей измерения времени является один день ($n = 0, 1, 2, ...$) и

$$S = (S_n)_{n\geq 0}$$

— рыночная цена, скажем, акции, обменный курс двух валют или какой-либо другой финансовый индекс (без каких-либо ограничений на время его «жизни», как это имеет место для цен облигаций). Эмпирический анализ значений S_n, $n \geq 0$, показывает, что они меняются весьма нерегулярно, флуктуируют так, как если бы, по словам М. Кендалла «*Демон шанса вытянул случайное число ... и добавил это к текущей цене, чтобы определить следующую ... цену*». Л. Башелье, без сомнения, был первым, кто стал для описания цен S_n, $n \geq 0$ пользоваться понятиями и методами теории вероятностей, дающей модель для изучения эмпирических феноменов, характеризуемых статистической неопределенностью, но в то же самое время обладающих свойствами устойчивости статистических частот. Придерживаясь вероятностного подхода и следуя общепринятой ныне аксиоматике теории вероятностей Колмогорова, мы будем предполагать, что все рассмотрения ведутся на некотором вероятностном пространстве

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}),$$

где

Ω – пространство элементарных событий ω (состояний рынка, в рассматриваемом контексте);

$\mathcal{F}$ – $\sigma-$алгебра подмножеств Ω (совокупность событий, наблюдаемых на рынке);

$\mathbf{P}$ – вероятность, вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Время и динамика являются неотъемлемыми компонентами финансовой теории, в связи с чем целесообразно исходное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ специфицировать, считая заданным поток $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n>0}$ $\sigma-$алгебр таких, что

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}.$$

Смысл введения этого потока неубывающих $\sigma-$подалгебр, входящих в $\mathcal{F}$ и называемых также фильтрацией, проясняется следующей интерпретацией: $\mathcal{F}_n$ – совокупность событий, наблюдаемых до момента n (включительно), или по-другому можно сказать, что $\mathcal{F}_n$ — это доступная наблюдателю «информация» о состоянии рынка до момента времени n.

Итак, будем считать, что нашей базовой вероятностной моделью является фильтрованное вероятностное пространство

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P}),$$

которое мы будем называть стохастическим базисом.

Во многих случаях целесообразно расширить понятие стохастического базиса, считая, что, вместо единственной вероятностной меры $\mathbf{P}$, задано целое семейство $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$ вероятностных мер. Вызвано это тем, что часто бывает трудно специфицировать какую-то одну конкретную меру $\mathbf{P}$. Пользуясь терминологией статистической теории решений, набор объектов $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ можно назвать фильтрованным стохастическим (статистическим) экспериментом.

2. Если интерпретировать $\mathcal{F}_n$ как информацию, доступную к моменту времени n, то естественно считать, что

$$S_n - \mathcal{F}_n - \text{измеримы},$$

т.е., образно говоря, считать, что значения цен складываются в зависимости от событий, наблюдаемых на рынке до момента времени n (включительно). Исходя из смысла S_n как «цены» (скажем, акции) в момент времени n, будем предполагать, что $S_n > 0$, $n \geq 0$. Приведем теперь два наиболее распространенных способа представления цен $S = (S_n)_{n\geq 0}$.

Первый способ (аналогичный формуле «сложных» процентов) исходит из представления

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{1}$$

где $H_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$, $h_0 = 0, n \geq 0$, причем случайные величины $h_n = h_n(\omega)$ являются $\mathcal{F}_n-$измеримыми.

Таким образом, здесь

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0}.$$

Тогда величины, представляющие «возврат», или «отдачу», или «логарифмическую прибыль», записываются в виде

$$h_n = H_n - H_{n-1} = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln \left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right),$$

$\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$.

Положим
$$\widetilde{h}_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \quad \widetilde{H}_n = \sum_{1\le k\le n} \widetilde{h}_k.$$

Тогда формула (1) перепишется в виде
$$S_n = S_0 \prod_{1\le k\le n} (1+\widetilde{h}_k), \tag{2}$$
или, равносильно, в виде
$$S_n = S_0 \prod_{1\le k\le n} (1+\Delta\widetilde{H}_k) = S_0 e^{\widetilde{H}_n} \prod_{1\le k\le n} (1+\Delta\widetilde{H}_k) e^{-\Delta\widetilde{H}_k}. \tag{3}$$

Представление (2) и есть второй способ представления цен, аналогичный формуле простых процентов.

Обозначим $\mathcal{E}(\widetilde{H})_n$ выражение, стоящее в правой части (3):
$$\mathcal{E}(\widetilde{H})_n = S_0 e^{\widetilde{H}_n} \prod_{1\le k\le n} (1+\Delta\widetilde{H}_k) e^{-\Delta\widetilde{H}_k}. \tag{4}$$

Определяемая этим выражением стохастическая последовательность
$$\mathcal{E}(\widetilde{H}) = (\mathcal{E}(\widetilde{H})_n)_{n\ge 1}, \quad \mathcal{E}(\widetilde{H})_0 = 1,$$
называется стохастической экспонентой, порожденной величиной $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_n)_{n\ge 1}$, $\widetilde{H}_0 = 1$, или экспонентой Долеан.

Таким образом, можно сказать, что первый способ представления цен использует обычную экспоненту:
$$S_n = S_0 e^{H_n},$$
второй же способ для своего описания использует стохастическую экспоненту:
$$S_n = S_0 \mathcal{E}(\widetilde{H})_n.$$

Из определения величины $\widetilde{H}_n$ следует, что
$$\widetilde{H}_n = \sum_{1\le k\le n} (e^{\Delta H_k} - 1),$$

или, что то же самое,

$$\widetilde{H}_n = H_n + \sum_{1 \le k \le n} (e^{\Delta H_k} - \Delta H_k - 1). \tag{5}$$

Понятно также, что

$$H_n = \sum_{1 \le k \le n} \ln(1 + \Delta \widetilde{H}_k), \tag{6}$$

где $\widetilde{h}_k = \Delta \widetilde{H}_k > -1$, так как $S_n > 0$.

3. Рассмотрим теперь распределения вероятностей последовательностей $S = (S_n)_{n \ge 0}, H = (H_n)_{n \ge 0}$. С точки зрения классической теории вероятностей и далеко продвинутой «статистики нормального распределения» было бы весьма привлекательно рассчитывать на то, что последовательность $H = (H_n)_{n \ge 0}$ является гауссовской (нормально распределенной). Если

$$H_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n,\ n \ge 1,$$

то свойства такой последовательности полностью определяются двумерными распределениями последовательности $h = (h_n)_{n \ge 1}$ характеризуемыми средними

$$\mu_n \equiv \mathbf{E} h_n, \quad n \ge 1,$$

и ковариациями

$$\mathbf{Cov}(h_n, h_m) = \mathbf{E} h_n h_m - \mathbf{E} h_n \mathbf{E} h_m, \quad n, m \ge 1.$$

Предположение нормальности существенно упрощает решение многих вопросов, зависящих от свойств распределений. Так, теорема о нормальной корреляции в явном виде дает формулу для условного математического ожидания $\widetilde{h}_{n+1} = \mathbf{E}(h_{n+1} | h_1, h_2, \dots, h_n)$, являющуюся оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой h_{n+1} по $h_1, \dots, h_n$:

$$\widetilde{h}_{n+1} = \mu_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k (h_k - \mu_k), \tag{7}$$

где коэффициенты a_k подсчитываются по матрице коварицаий.

Если $h_1, h_2, \dots, h_n$ независимы, то

$$a_k = \frac{\mathbf{Cov}(h_{n+1}, h_k)}{\mathbf{D} h_k}.$$

Тогда ошибка оценивания

$$\Delta_{n+1} = \mathbf{E}(\widetilde{h}_{n+1} - h_{n+1})^2$$

определяется по формуле

$$\Delta_{n+1} = \mathbf{D}h_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{Cov}^2(h_{n+1}, h_k)}{\mathbf{D}h_k}$$

В силу гауссовости,

$$\widetilde{h}_{n+1} - h_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \Delta_{n+1}),$$

где $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ означает нормальное распределение с параметрами a и σ^2. Хорошо известно, что тогда

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{h}_{n+1} - h_{n+1}| \le 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}\} \approx 0.90.$$

Следовательно, можно утверждать, что с вероятностью, близкой к 0.90, ожидаемое значение величины h_{n+1} будет принадлежать доверительному интервалу

$$[\widetilde{h}_{n+1} - 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}, \widetilde{h}_{n+1} + 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}]$$

Отсюда вытекает, что в 90% случаев прогнозируемое значение $\widetilde{S}_{n+1}$ величины рыночной цены S_{n+1} (по наблюдениям $h_1, \dots, h_n$) лежит в интервале

$$[S_n e^{\widetilde{h}_{n+1} - 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}}, S_n e^{\widetilde{h}_{n+1} + 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}}].$$

4. Однако, к привлекательной гипотезе «нормальности» распределений величин $h_n, n \ge 1$, надо относиться с осторожностью. Дело в том, что эмпирический анализ многих финансовых данных показывает, что

(a) число выборочных значений, не попадающих в «доверительные« интервалы $[\overline{h}_n - k\widehat{\sigma}_n, \overline{h}_n + k\widehat{\sigma}_n]$ с $k = 1, 2, 3$, где $\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i$ — выборочное среднее и $\widehat{\sigma}_n$ — стандартное отклонение,

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h}_i)^2,$$

значительно больше, чем это должно было бы быть при гипотезе нормальности; наглядно это означает, что «хвосты» эмпирических плотностей убывают значительно медленнее, нежели для гауссовского распределения («тяжелые хвосты»);

(b) эксцесс, или коэффициент вытянутости (kurtosis),

$$\widehat{k}_n = \frac{\widehat{m}_4}{\widehat{m}_2^2} - 3$$

где $\widehat{m}_2$ и $\widehat{m}_4$ — эмпирические второй и четвертый моменты, значимым образом является положительным (для нормального распределения kurtosis равен нулю), что означает сильную «вытянутость» пика плотности распределения в окрестности центральных значений.

Пожалуй, самым сильным (относительно структуры распределений величин $h = (h_n)$ является, помимо гауссовости, предположение независимости и одинаковой распределенности этих величин. При таких условиях анализ цен $S_n = S_0 e^{H_n}$, $H_n = h_0 + h_1 + \dots + h_n$, легко проводится обычными методами теории вероятностей, основанными на этих предположениях. Но, конечно, понятно, что предположение независимости значений $h = (h_n)$ сразу разрушает надежду на то, что «прошлые данные» могут что-то дать для прогноза «будущих значений».

На самом же деле, в этом отношении ситуация более благоприятна, поскольку многочисленные исследования временны́х финансовых рядов показывают наличие, как уже отмечалось, негауссовости и зависимости в значениях (h_n), хотя они могут быть и некоррелированными, а зависимость — весьма слабой. Проще всего убедиться в наличии зависимости можно, рассматривая эмпирические корреляции не для величин h_n, а для $|h_n|$ или h_n^2. (В приводимой далее модели стохастической волатильности ситуация такова, что $\mathbf{Cov}(h_n, h_m) = 0$ для $n \neq m$, но $\mathbf{Cov}(h_n^2, h_m^2)$ и $\mathbf{Cov}(|h_n|, |h_m|)$ значительно отклоняются от нуля).

§2. Необходимые сведения из теории мартингалов. Каноническое представление. Разложение Дуба

1. Будем предполагать, что в модели

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_n = h_1 + \dots + h_n$$

величины $h_n, n \geq 1$, имеют конечные абсолютные первые моменты, $\mathbf{E}|h_n| < \infty$, $n \geq 1$.

Разложение Дуба, о котором пойдет речь дальше, предполагает изучение последовательности $h = (h_n)$ в зависимости от свойств фильтрации $(\mathcal{F}_n)$, т.е. потока «информации» $\mathcal{F}_n$, доступных «наблюдателю» (на рынке ценных бумаг — в интересующем нас контексте; $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$).

Поскольку $\mathbf{E}|h_n| < \infty$, $n \geq 1$, то определены условные математические ожидания $\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1})$ и, значит,

$$H_n = \sum_{n=1}^{n} \mathbf{E}(h_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{n=1}^{n} [h_k - \mathbf{E}(h_k|\mathcal{F}_{k-1})].$$

Иными словами, если

$$A_n = \sum_{n=1}^{n} \mathbf{E}(h_k|\mathcal{F}_{k-1}),$$

$$M_n = \sum_{n=1}^{n} [h_k - \mathbf{E}(h_k|\mathcal{F}_{k-1})],$$

то для $H = (H_n)_{n \geq 1}$ с $H_0 = 0$ справедливо разложение Дуба

$$H_n = A_n + M_n, \quad n \geq 0,$$

где

a) последовательность $A = (A_n)_{n \geq 1}$ с $A_0 = 0$ является предсказуемой в том смысле, что при каждом $n \geq 1$

$$A_n - \mathcal{F}_{n-1}\text{-измеримы;}$$

b) последовательность $M = (M_n)_{n \geq 1}$ с $M_0 = 0$ является мартингалом, т. е. при каждом $n \geq 1$ выполнено свойство

$$\mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}),$$

при этом величины M_n являются $\mathcal{F}_n-$измеримыми с $\mathbf{E}|M_n| < \infty$ при каждом $n \geq 1$.

Отметим также, что если в рассматриваемой модели $\mathbf{E}(h_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0, k \geq 1$, то сама последовательность $H = (H_n)$ является мартингалом.

Приведем следующий пример на «разложение Дуба», хорошо иллюстрирующий «нетривиальность» этого разложения, несмотря на его простоту.

Пример. Пусть $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, где (ξ_n) - независимые бернуллиевские величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_n = \pm 1\} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим разложение Дуба для $H = (|X_n|)$, $n \geq 1$, $X_0 = 0$.

Здесь

$$h_n = \Delta H_n = \Delta |X_n| = |X_n| - |X_{n-1}| = |X_{n-1} + \xi_n| - |X_{n-1}|,$$

и

$$\Delta M_n \equiv h_n - \mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = |X_{n-1} + \xi_n| - \mathbf{E}(|X_{n-1} + \xi_n| | \mathcal{F}_{n-1}) =$$

$$= |X_{n-1} + \xi_n| - \mathbf{E}(|X_{n-1} + \xi_n| | X_{n-1}) = \mathrm{Sign}(X_{n-1}) \xi_n.$$

Таким образом, для мартингала $M = (M_n)$ в разложении Дуба имеем

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Sign}(X_{n-1}) \Delta X_k.$$

Имеем также

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}(|X_{n-1} + \xi_n| | X_{n-1}) - |X_{n-1}|.$$

На множестве $\{\omega : X_{n-1} = i\}$ с $i \neq 0$ правая часть равна нулю. Если же $i = 0$, то правая часть равна единице. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(h_i | \mathcal{F}_{i-1}) = N(1 \leq k \leq n : X_{k-1} = 0),$$

где $N(1 \leq k \leq n : X_{k-1} = 0)$ — число всех тех k, $1 \leq k \leq n$, для которых $X_{k-1} = 0$. Обозначим $L_n(0) = N(1 \leq k \leq n-1 : X_{k-1} = 0)$ — число нулей последовательности $(X_k)_{1 \leq k \leq n-1}$. Тогда

$$|X_k| = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Sign}(X_{n-1}) \Delta X_k + L_n(0).$$

Отсюда видно, в частности, что

$$\mathbf{E} L_n(0) = \mathbf{E}|X_n|.$$

Поскольку $\dfrac{X_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, то $\mathbf{E}|X_n| \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi} n}$, следовательно,

$$\mathbf{E} L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}.$$

Это — известный результат о среднем числе нулей в симметричном случайном блуждании Бернулли.

2. Пусть $M = (M_n)_{n\geq 1}$ является квадратично интегрируемым мартингалом, то есть, $\mathbf{E}M_n^2 < \infty$, $n \geq 1$, $M_0 = 0$. Тогда разложение Дуба, примененное к $H_n = M_n^2$, примет следующий вид:

$$M_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (\Delta M_k^2 - \mathbf{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})),$$

где $\Delta M_k^2 = M_k^2 - M_{k-1}^2$. Определим

$$\langle M_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}),$$

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta M_k^2 - \mathbf{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})).$$

Тогда разложение Дуба в этих обозначениях запишется в виде

$$M_n^2 = \langle M_n \rangle + m_n,$$

где (предсказуемая) последовательность $\langle M \rangle = (\langle M_n \rangle)_{n\geq 1}$ называется квадратической характеристикой мартингала M.

Заметим, что поскольку $M = (M_n)$ является мартингалом, то

$$\mathbf{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbf{E}((\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Это свойство объясняет, почему квадратическую характеристику $\langle M_n \rangle$ называют также предсказуемой квадратической вариацией (квадратично интегрируемого) мартингала M. При этом термин квадратическая вариация резервируется для (непредсказуемой, вообще говоря) последовательности $[M] = ([M]_n)_{n\geq 1}$ со значениями

$$[M]_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta M_k^2).$$

3. Предположим сейчас, что последовательность $H = (H_n)$ сама является мартингалом и к тому же — квадратично интегрируемым, т. е. пусть $\mathbf{E}(\Delta H_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbf{E}(h_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$, $\mathbf{E}h_k^2 < \infty$, $k \geq 1$. Тогда

$$\langle H_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Величины $\mathbf{E}(h_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$, из которых складывается квадратическая характеристика $\langle H_n \rangle$, определяют степень изменчивости (волатильности) мартингала H и во многом — его свойства. Например, если с вероятностью единица $\langle H_n \rangle \to \infty$, то для квадратично интегрируемого мартингала H имеет место усиленный закон больших чисел: при $n \to \infty$

$$\frac{H_n}{\langle H_n \rangle} \to 0 \quad \mathbf{P} - \text{п. н.}$$

В дальнейшем набор величин $\mathbf{E}(h_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$ будет играть существенную роль при анализе временны́х финансовых рядов $S = (S_n)$ с $S_n = S_0 e^{H_n}$. Применительно к этому случаю и следуя принятой в теории финансов терминологии, последовательность $(\mathbf{E}(h_k^2|\mathcal{F}_{k-1}))_{k \geq 1}$ будем называть стохастической волатильностью.

Если условные математические ожидания $\mathbf{E}(h_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$ совпадают с безусловными (например, если (h_n) есть последовательность независимых случайных величин и $\mathcal{F}_{k-1} = \sigma(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})$ — σ−алгебра, порожденная величинами $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$, то волатильность — это просто набор дисперсий $\sigma_k^2 = \mathbf{E} h_k^2$ (предполагается, что $\mathbf{E} h_k = 0, k \geq 1$), которые являются стандартными мерами разброса (изменчивости) величин h_k.

§3. Локальные мартингалы, мартингальные преобразования

1. В проведенном выше анализе последовательности $H = (H_n)$, основанном на разложении Дуба, ключевую роль играют два понятия — «мартингальность» и «предсказуемость», и, соответственно, участвующие в представлении $H = (H_n)$ мартингал $M = (M_n)$ и предсказуемая последовательность $A = (A_n)$.

Это и определяет то, что проводимый далее стохастический анализ часто называют «мартингальным» или «стохастическим исчислением» подразумевая под этим анализ на фильтрованных вероятностных пространствах, специализированных выделением на (обычных) вероятностных пространствах особой структуры — потока σ−алгебр $(\mathcal{F}_n)$. Именно, с наличием этой структуры — «фильтрации» $(\mathcal{F}_n)$ — связаны такие понятия, как момент остановки, мартингал, предсказуемость, суб- и супермартингалы, семимартингалы.

В современном стохастическом исчислении, пожалуй, более важную роль играет не понятие мартингала, а понятие локального мартингала. Важным обстоятельством здесь является то, что хотя класс локальных мартингалов шире класса мартингалов, но он сохраняет многие важные свойства последних. Дадим ряд определений.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ — стохастический базис, т.е. фильтрованное вероятностное пространство, с дискретным временем, $n \geq 0$.

Определение 1. *Последовательность случайных величин $X = (X_n)$, заданных на стохастическом базисе, называется стохастической последовательностью, если при каждом $n \geq 0$ величины X_n являются $\mathcal{F}_n-$измеримыми.*

Чтобы подчеркнуть это свойство измеримости, стохастические последовательности записывают в виде $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, включая в обозначение также и $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_n$, относительно которых измеримы величины X_n.

Определение 2. *Стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ является*

мартингалом, супермартингалом, субмартингалом,

если $\mathbf{E}|X_n| < \infty, n \geq 0$ и при каждом $n \geq 1$ $\mathbf{P}-$п.н.

$$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1},\ \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1},\ \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$$

соответственно.

Понятно, что для мартингала математические ожидания $\mathbf{E}X_n = Const$ $(= \mathbf{E}X_0)$, для супермартингала они не возрастают, для субмартингала — не убывают.

Классическим примером мартингала является «мартингал Леви» $X = (X_n)$, $X_n = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$, где ξ — измеримая случайная величина $\mathbf{E}|\xi| < \infty$.

Этот мартингал является равномерно интегрируемым, т. е. семейство случайных величин X_n равномерно интегрируемо:

$$\sup_n \mathbf{E}(|X_n| I_{\{|X_n|>C\}}) \to 0,\ C \to \infty.$$

Определение 3. *Стохастическая последовательность $x = (x_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ с $\mathbf{E}|x_n| < \infty$ называется мартингал-разностью, если $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и*

$$\mathbf{E}(x_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Ясно, что для такой последовательности $x = (x_n)$ соответствующая «суммарная» последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ с $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ образует мартингал. И наоборот, с каждым мартингалом $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ связывается мартингал-разность $x = (x_n, \mathcal{F}_n)$ с $x_n = \Delta X_n$, где $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ для $n \geq 1$ и $\Delta X_0 = X_0$ для $n = 1$.

Определение 4. *Будем называть стохастическую последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ локальным мартингалом (субмартингалом, супермартингалом), если найдется такая (локализующая) последовательность $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ марковских моментов (т.е. таких, что $\{\omega : \tau_k(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$), что $\tau_{k+1} \geq \tau_k$ ($\mathbf{P}-$п.н.), $\tau_k \uparrow \infty$ ($\mathbf{P}-$п.н.) при $k \to \infty$, и каждая «остановленная» последовательность*

$$X^{\tau_k} = (X_{\tau_k \wedge n}, \mathcal{F}_n)$$

является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом).

Определение 5. *Пусть $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$ — стохастическая последовательность и $Y = (Y_n, \mathcal{F}_{n-1})$ — предсказуемая последовательность (Y_n являются $\mathcal{F}_{n-1}-$измеримыми, $n \geq 1$, и Y_0 — $\mathcal{F}_0-$измеримо). Стохастическая последовательность*

$$Y \cdot M = ((Y \cdot M)_n, \mathcal{F}_n),$$

где

$$(Y \cdot M)_n = Y_0 \cdot M_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k,$$

называется преобразованием M с помощью Y. Если к тому же M является мартингалом, то $Y \cdot M$ называют мартингальным преобразованием (мартингала M с помощью (предсказуемой) последовательности Y).

Следующая теорема устанавливает, что в случае дискретного времени объекты, введенные последними определениями, родственны между собой.

Теорема 1. *Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ — стохастическая последовательность с $\mathbf{E}X_0 < \infty$. Следующие условия являются эквивалентными:*

(a) X — локальный мартингал;

(b) X есть мартингальное преобразование, т.е. $X = Y \cdot M$ с некоторой предсказуемой последовательностью $Y = (Y_n, \mathcal{F}_{n-1})$ и некоторым мартингалом $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$.

Доказательство. $(b) \Rightarrow (a)$. Пусть X есть мартингальное преобразование:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k, \tag{8}$$

где M — предсказуемая последовательность и Y — мартингал. Если $|Y_k| \le C, \ge 1$, то X, очевидно, мартингал.

В противном случае положим $\tau_j = \inf\{n-1 : |Y_n| > j\}$. Поскольку Y_n — $\mathcal{F}_{n-1}$−измеримы, то τ_j — моменты остановки, $\tau_j \to \infty, j \to \infty$, и «остановленные» последовательности X^{τ_j} снова имеют вид (8) с ограниченными $Y_k^{\tau_j} = Y_k I_{\{k \le \tau_j\}}$. Следовательно, X является локальным мартингалом.

$(a) \Rightarrow (b)$. Пусть X — локальный мартингал, и (τ_k) — его локализующая последовательность. Тогда $\mathbf{E}|X_n^{\tau_k}| < \infty$ и $\mathbf{E}(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(|X_{n+1}^{\tau_k}||\mathcal{F}_n)$ на множестве $\{\tau_k > n\} \in \mathcal{F}_n$. Поэтому $\mathbf{E}(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n) < \infty$ ($\mathbf{P}$− п.н.)

Аналогично, на этом же множестве $\{\tau_k > n\}$

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_{n+1}^{\tau_k}|\mathcal{F}_n) = X_{n+1}^{\tau_k} = X_n.$$

Положим теперь

$$A_n(k) = \{\omega : \mathbf{E}(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n) \in [k, k+1)\}.$$

Тогда

$$u_n = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{(k+1)^3} \Delta X_n I_{A_{n-1}(k)}$$

является $\mathcal{F}_n$−интегрируемой случайной величиной с $\mathbf{E}(u_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Следовательно, последовательность (u_n) является мартингал-разностью, и тогда последовательность $M_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ будет мартингалом ($M_0 = 0$). Положим

$$Y_n = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{(k+1)^3} I_{A_{n-1}(k)}.$$

Тогда

$$X_n = (Y \cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k,$$

то есть, (X_n) есть мартингальное преобразование.

2. Приведем теперь простой, но важный для теории результат, дающий достаточные условия, при которых локальный мартингал в действительности есть мартингал.

Лемма 1. *1). Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ является локальным мартингалом с $\mathbf{E}|X_0| < \infty$, и пусть либо*

$$\mathbf{E}X_n^- < \infty \quad (n \geq 0),$$

либо

$$\mathbf{E}X_n^+ < \infty \quad (n \geq 0).$$

Тогда $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ — мартингал.

2). Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{1\leq n\leq N}, N < \infty$, является локальным мартингалом с $\mathbf{E}|X_0| < \infty$, и пусть либо $\mathbf{E}X_N^- < \infty$, либо $\mathbf{E}X_N^+ < \infty$. Тогда для всех $n \leq N$ выполнены условия $\mathbf{E}X_n^- < \infty$, и $\mathbf{E}X_n^+ < \infty$, и $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{1\leq n\leq N}$ — мартингал.

Доказательство. 1). Покажем, что любое из условий $\mathbf{E}X_n^- < \infty \, (n \geq 0)$ или $\mathbf{E}X_n^+ < \infty \, (n \geq 0)$ влечет за собой выполнение другого, а значит, $\mathbf{E}|X_n| < \infty \, (n \geq 0)$.

Действительно, если выполнено, скажем, условие $\mathbf{E}X_n^- < \infty \, (n \geq 0)$, то по лемме Фату

$$\mathbf{E}X_n^+ = \mathbf{E}(\liminf_k X_{n\wedge\tau_k}^+) \leq \liminf_k (\mathbf{E}X_{n\wedge\tau_k}^+) \leq \liminf_k [\mathbf{E}X_{n\wedge\tau_k} - \mathbf{E}X_{n\wedge\tau_k}^-] =$$

$$= \mathbf{E}X_0 - \liminf_k (\mathbf{E}X_{n\wedge\tau_k}^-) \leq |\mathbf{E}X_0| + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}X_i^- < \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{E}|X_n| < \infty$, $n \geq 0$.

Далее, так как $|X_{n+1\wedge\tau_k}| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |X_i|$, где $\mathbf{E}\sum_{i=0}^{(n+1)} |X_i| < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в результате предельного перехода при $k \to \infty$ в соотношении

$$\mathbf{E}(X_{(n+1)\wedge\tau_k} I_{\{\tau_k>0\}} | \mathcal{F}_n)) = X_{n\wedge\tau_k}$$

получаем, что $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $n \geq 0$.

2). Заметим, что если $\mathbf{E}X_N^- < \infty$, то тогда и $\mathbf{E}X_n^- < \infty, n \leq N$. Точно также как и в теореме 1 из того, что (X_n) является локальным мартингалом, следует, что $X_n = \mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, откуда $X_n^- \leq \mathbf{E}(X_{n+1}^-|\mathcal{F}_n)$, следовательно, $\mathbf{E}X_n^- \leq \mathbf{E}X_{n+1}^-$ для всех $n \leq N-1$.

Тем самым, из 1) следует, $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{1\leq n\leq N}$ — мартингал.

Аналогично рассматривается и случай $\mathbf{E}X_N^+ < \infty$.

Следствие. Всякий локальный мартингал $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, ограниченный снизу ($\inf_n X_n(\omega) \geq C > -\infty \quad \mathbf{P}-$п.н.) или ограниченный сверху ($\sup_n X_n(\omega) \leq C < \infty \quad \mathbf{P}-$п.н.), является мартингалом.

§4. Линейные стационарные процессы и оценка неизвестных параметров

1. Введем точные определения основных понятий.

Белым шумом будем называть последовательность случайных величин (ε_n), для которой математическое ожидание $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$, дисперсия $\mathbf{D}\varepsilon_n = \sigma_\varepsilon^2$ и ковариация $Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = 0$ для всех $n \neq m$. Часто на последовательность (ε_n) налагают более сильные ограничения: предполагается, что они не просто некоррелированы для всех n, но и независимы. В этом случае (ε_n) будем называть сильным белым шумом. Отметим сразу, что в приложениях часто предполагают, что ε_n являются нормальными случайными величинами, для которых некоррелированность совпадает с независимостью.

Случайный процесс (x_n) называется *строго стационарным*, если

$$F(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}) = F(x_{n+k}, x_{n+k+1}, \dots, x_{n+k+l})$$

для всех k и l, где $F(x_1, x_2, \dots, x_l)$ – совместная функция распределения случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_l$.

Очевидно, что белый шум (ε_n), введенный выше, является стационарной последовательностью.

Из последнего определения следует, в частности, что случайные величины x_n имеют постоянное математическое ожидание $\mathbf{E}x_n = m$, а ковариация $Cov(x_n, x_{n+k})$ зависит только от k. Везде далее будем полагать $m = 0$, хотя это и не является определяющим обстоятельством, но значительно облегчает расчеты. Из условий стационарности также следует, что функция плотности распределения $p(x)$ может быть оценена по гистограмме наблюдённых значений $x_1, x_2, \dots, x_N$ временно́го ряда, а математическое ожидание и дисперсию можно оценить соответственно по формулам:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \widehat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2.$$

Введем автокорреляционную функцию процесса с задержкой k, полагая

$$\rho_k = \frac{Cov(x_n, x_{n+k})}{\sigma_x^2}.$$

В качестве оценки функции автокорреляции естественно взять величину

$$\widehat{\rho}_k = \frac{1}{\widehat{\sigma}_x^2} \cdot \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k} x_i.$$

Эти оценки являются несмещенными, и при выполнении некоторых условий и состоятельными в средеквадратическом смысле.

Наибольшее распространение в исследовании стационарных временны́х рядов получили модели авторегрессии, модели скользящего среднего и смешанные модели. Рассмотрим подробно эти модели.

2. Модели авторегрессии порядка p $(AR(p))$. Авторегрессионная модель порядка p записывается как взвешенная сумма предыдущих значений процесса плюс дополнительный независимый импульс, то есть

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \ldots + \alpha_p x_{n-p} + \varepsilon_n, \tag{1}$$

где (ε_n) – белый шум. В этой модели $p+1$ неизвестных параметров: $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \sigma_\varepsilon^2$.

Набор регулируемых параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ должен удовлетворять определенным условиям для того, чтобы процесс был стационарным.

Умножая обе части уравнения (1) на x_{n-k} и переходя к математическим ожиданиям, мы получим соотношения для функции автоковариации процесса:

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \alpha_p \gamma_{k-p}, \ k > 0.$$

Поделив обе части на σ_x^2, получим разностное уравнение для функции автокорреляции:

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \ldots + \alpha_p \rho_{k-p}, \ k > 0.$$

Отсюда подставляя в последнее равенство значения $k = 1, 2, \ldots, p$, получим систему линейных уравнений для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Эти уравнения носят название уравнений Юла–Уокера:

$$\begin{aligned}
\rho_1 = &\quad \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 + \ldots + \alpha_p\rho_{p-1},\\
\rho_2 = &\quad \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p\rho_{p-2},\\
\vdots \\
\rho_p = &\ \alpha_1\rho_{p-1} + \alpha_2\rho_{p-2} + \ldots + \alpha_p.
\end{aligned}$$

Для дисперсии мы имеем выражение

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_x^2(1 - \alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2 - \ldots \alpha_p\rho_p).$$

Заменяя в последних уравнениях σ_x^2 и ρ_k на их оценки по наблюдённым данным $\widehat{\sigma}_x^2$ и $\widehat{\rho}_k$, и решая соответствующую систему уравнений, мы получим оценки неизвестных параметров модели.

Рассмотрим здесь наиболее употребимые на практике процессы авторегрессии первого и второго порядков.

3. Модель $AR(1)$. Процесс авторегрессии первого порядка $AR(1)$ имеет вид

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Условия стационарности в этом случае достаточно просты:

$$\mid \alpha_1 \mid < 1.$$

Автокорреляционная функция ρ_k удовлетворяет разностному уравнению первого порядка:

$$\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1}, \quad k > 0.$$

Оно имеет решение при $\rho_0 = 1$

$$\rho_k = \alpha_1^k, \quad k \geq 0.$$

В частности,

$$\rho_1 = \alpha_1.$$

В модели имеется еще один неизвестный параметр σ_ε^2. Имеем соотношение

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_x^2(1 - \alpha_1^2).$$

4. Модель $AR(2)$. Процесс авторегрессии второго порядка записывается как

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \varepsilon_n.$$

Для стационарности процесса необходимо, чтобы параметры α_1 и α_2 находились в области

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \\ &\alpha_2 - \alpha_1 < 1, \\ &-1 < \alpha_2 < 1. \end{aligned}$$

Для оценивания неизвестных параметров α_1 и α_2 применяется система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_1, \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Дисперсию белого шума в этой модели можно получить из уравнения

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_x^2(1 - \alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2).$$

5. Модели скользящего среднего прядка q $(MA(q))$**.** Отправляясь от белого шума (ε_n), образуем последовательность

$$x_n = \varepsilon_n + \beta_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{n-q}, \tag{2}$$

которая называется моделью скользящего среднего порядка q. Модель содержит $1 + q$ неизвестных параметров: $\beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma_\varepsilon^2$. При всех значениях этих параметров процесс (x_n) является стационарным.

Обратимся к вопросу оценивания параметров процесса скользящего среднего. Как следует из представления (2), автоковариационная функция процесса $MA(q)$ равна

$$\gamma_k = \mathbf{E}\left[(\varepsilon_n + \beta_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{n-q})\right]\left[(\varepsilon_{n+k} + \beta_1\varepsilon_{n+k-1} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{n+k-q})\right].$$

Следовательно, дисперсия процесса равна

$$\sigma_x^2 = \gamma_0 = (1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_q^2)\sigma_\varepsilon^2, \tag{3}$$

и автокорреляционная функция

$$\rho_k = \begin{cases} (\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \ldots + \beta_{q-k}\beta_q)/(1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_q^2), & k = 1, 2, \ldots, q, \\ 0, & k > q. \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда видно, что автокорреляционная функция процесса $MA(q)$ обрывается на задержке q.

Заменяя в равенствах (3) и (4) σ_x^2 и ρ_k на их оценки $\widehat{\sigma}_x^2$ и $\widehat{\rho}_k$, и решая систему относительно неизвестных параметров, мы найдем оценки этих параметров. Надо отметить, что уравнения для нахождения этих оценок не являются линейными, что вызывает определенные сложности.

Наиболее распространенными моделями MA являются модели $MA(1)$ и $MA(2)$.

6. Модель $MA(1)$. В этом случае процесс записывается в виде

$$x_n = \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1}.$$

Для оценки параметров β_1, σ_ε^2 процесса имеем уравнения

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\sigma}_x^2 & = & (1+\beta_1^2)\sigma_\varepsilon^2, \\ \widehat{\rho}_1(1+\beta_1^2) & = & \beta_1. \end{array}$$

При этом если β_1^* является решением соответствующего квадратного уравнения, то и $1/\beta_1^*$ является его корнем. Для задачи прогноза можно взять любой из них, но предпочтение нужно отдать тому корню, который по модулю не превосходит единицы.

7. Модель $MA(2)$. Здесь модель имеет вид

$$x_n = \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1} + \beta_2 \varepsilon_{n-2}.$$

Решая уравнения

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\sigma}_x^2 & = & (1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma_\varepsilon^2, \\ \widehat{\rho}_1(1+\beta_1^2+\beta_2^2) & = & \beta_1(1+\beta_2), \\ \widehat{\rho}_2(1+\beta_1^2+\beta_2^2) & = & \beta_2 \end{array}$$

относительно неизвестных параметров модели, мы получим их оценки.

8. Смешанная модель $ARMA(p,q)$. Для достижения экономичности модели иногда приходится включать как члены с авторегрессией, так и члены со скользящими средними:

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \ldots + \alpha_p x_{n-p} + \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{n-q}.$$

Эта модель содержит $1+p+q$ неизвестных параметров. Условия стационарности для смешанных моделей накладываются только на параметры, отвечающие за авторегрессионную составляющую.

Автоковариационная функция смешанного процесса удовлетворяет разностному уравнению

$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \ldots + \alpha_p\gamma_{k-p} + \gamma_{x\varepsilon}(k) - \beta_1\gamma_{x\varepsilon}(k-1) - \ldots - \beta_q\gamma_{x\varepsilon}(k-q), \quad (5)$$

где $\gamma_{x\varepsilon}(k)$ – взаимная ковариационная функция x и ε, определяемая как $\gamma_{x\varepsilon}(k) = \mathbf{E}(x_{n-k}\varepsilon_n)$. Так как x_{n-k} зависит только от импульсов, произошедших до момента $n-k$, очевидно, что

$$\gamma_{x\varepsilon}(k) = 0,\ k > 0; \qquad \gamma_{x\varepsilon}(k) \neq 0,\ k \leq 0.$$

При $k = 0$ получаем уравнение

$$\gamma_0 = \sigma_x^2 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1\gamma_{x\varepsilon}(-1) - \ldots - \beta_q\gamma_{x\varepsilon}(-q),$$

решая которое вместе с (5) для $k = 1, 2, \ldots, p$, найдем $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$.

9. Смешанная модель $ARMA(1,1)$. В этом частном случае модель записывается в виде

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \varepsilon_n - \beta_1\varepsilon_{n-1}.$$

Прежде всего отметим, что процесс стационарен при $-1 < \alpha_1 < 1$. Следуя уравнениям, полученным выше, мы можем выразить две первые автокорреляции через параметры процесса:

$$\begin{aligned} \rho_1(1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1) &= (1 - \alpha_1\beta_1)(\beta_1 - \alpha_1), \\ \rho_2 &= \beta_1\rho_1. \end{aligned}$$

Для дисперсии имеем соотношение

$$\sigma_x^2(1 - \beta_1^2) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1).$$

10. Идентификация модели. Здесь мы приведем сведения, позволяющие проводить предварительную идентификацию моделей по поведению функции автокорреляции.

Модель процесса	Поведение автокорреляций ρ_k
$AR(1)$	Экспоненциально затухают
$AR(2)$	Наложение экспонент и затухающих синусоид
$MA(1)$	Только $\rho_1 \neq 0$
$MA(2)$	Только $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$
$ARMA(1,1)$	Экспоненциально затухают, начиная задержки 1

В этой таблице указано поведение теоретической функции автокорреляции. По наблюдённым данным вычисляется функция $\widehat{\rho}_k$, и ее поведение кладется в основание принятия решения о выборе соответствующей модели.

11. Прогнозирование для стационарных процессов.

Все представленные модели записаны в виде соответствующих разностных уравнений. Наилучшим прогнозом, то есть прогнозом с минимальной среднеквадратической ошибкой, $\mathbf{x}_n(l)$ с упреждением l является условное математическое ожидание случайной величины x_{n+l} в момент времени n:

$$\mathbf{x}_n(l) = \mathbf{E}\{x_{n+l}|X_n\},$$

где X_n – наблюдения вплоть до момента n.

На практике значения прогноза с упреждением l легко вычисляются рекуррентным способом, начиная с $\mathbf{x}_n(1)$. Приведем простой пример вычисления прогноза для смешанной модели.

Пример. Пусть задана смешанная модель $ARMA(1,1)$

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1}.$$

Тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{x}_n(1) & = & \alpha_1 x_n - \beta_1 \varepsilon_n, \\
\mathbf{x}_n(2) & = & \alpha_1 \mathbf{x}_n(1) \\
 & \vdots & \\
\mathbf{x}_n(l) & = & \alpha_1 \mathbf{x}_n(l-1).
\end{array}$$

Ошибка прогноза для упреждения l равна

$$e_n(l) = \varepsilon_{n+l} + \psi_1 \varepsilon_{n+l-1} + \ldots + \psi_{l-1}\varepsilon_{n+1}.$$

Так как математическое ожидание ошибки равно нулю, то прогноз является несмещенным. Дисперсия прогноза равна

$$V(l) = (1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

Веса ψ_i при вычислении ошибки прогноза для смешанной модели $ARMA(p,q)$

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \ldots + \alpha_p x_{n-p} + \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{n-q}.$$

подчинены следующим соотношениям:

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 & = & \alpha_1 - \beta_1, \\ \psi_2 & = & \alpha_1\psi_1 + \alpha_2 - \beta_2, \\ & \vdots & \\ \psi_j & = & \alpha_1\psi_{j-1} + \ldots + \alpha_p\psi_{j-p} - \beta_j, \end{array}$$

где $\psi_0 = 1,\ \psi_j = 0$ при $j < 0$, и $\beta_j = 0$ при$j > q$.

В предположении нормальности случайных величин ε_n условное распределение вероятности $p(x_{n+l}|X_n)$ будущего значения процесса x_{n+l} будет нормальным со средним значением $\mathbf{x}_n(l)$ и стандартным отклонением $(1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)^{1/2}\sigma_\varepsilon$. Поэтому доверительные $(1-\delta)$-процентные вероятностные пределы $x_{n+l}(\pm)$ для x_{n+l} вычисляются так:

$$x_{n+l}(\pm) = \mathbf{x}_n(l) \pm u_{\delta/2}(1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)^{1/2}\sigma_\varepsilon,$$

где $u_{\delta/2}$ – квантиль уровня $1 - \delta/2$ стандартного нормального распределения.

12. Линейные нестационарные модели.

Многие эмпирические временны́е ряды ведут себя так, как будто они не имеют фиксированного среднего значения. Но при этом они могут выглядеть однородными в том смысле, что если не учитывать локальный уровень или, возможно, локальный тренд, любая часть временно́го ряда по своему поведению подобна любой другой. Модели такого типа можно получить, предположив, что некоторая подходящая разность процесса является стационарной.

Пусть (x_n) – некоторый процесс. Обозначим через

$$\nabla x_n = x_n - x_{n-1}$$

разность процесса (x_n), ∇^d – d-я степень оператора ∇.

13. Модель авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего порядка (p, d, q)**.**

Рассмотрим общую модель

$$w_n - \alpha_1 w_{n-1} - \alpha_2 w_{n-2} - \ldots - \alpha_p w_{n-p} = \beta_0 + \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{n-q}, \quad (6)$$

где

$$w_n = \nabla^d x_n.$$

Мы можем рассматривать представленную модель как средство преобразования сильно зависимых и, возможно, нестационарных членов (x_n) процесса в последовательность некоррелированных случайных величин.

Стохастические и детерминированные тренды. Если в уравнении (6) свободный член β_0 отличен от нуля, то это уравнение описывает ряды со стохастическим трендом, например, случайным уровнем или случайным наклоном. В общем случае мы можем включить в модель детерминированную функцию времени $f(t)$. В частности, неравенство нулю β_0 обеспечивает наличие полиномиального тренда степени d. Например, когда $d = 1$, мы можем использовать модель с $\beta_0 \neq 0$ для оценок возможного детерминированного тренда в присутствии нестационарного шума. Поскольку условие $\beta_0 \neq 0$ эквивалентно условию

$$\mathbf{E} w_n = \mu_w = \beta_0 / (1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p) \neq 0,$$

другой способ описания модели (6) может быть осуществлен в виде стационарного процесса $ARMA(p, q)$, в котором $\tilde{w}_n = w_n - \mu_w$. Везде в дальнейшем мы будем полагать $\mu_w = 0$, что эквивалентно $\beta_0 = 0$, если нет никаких причин, следующих из постановки задачи, для учета этого ненулевого среднего значения для разности процесса.

При описании многих нестационарных процессов мы редко встречаемся с ситуацией, когда p, d или p должны быть больше двух. Поэтому рассмотрим некоторые наиболее важные случаи модели авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего.

1) Процесс (0, 1, 1).

$$\nabla x_n = \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1}.$$

Как видно из представления, процесс (0, 1, 1) – это процесс скользящего среднего первого порядка для первой разности исходного процесса.

2) Процесс (0, 2, 2).

$$\nabla^2 x_n = \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1} - \beta_2 \varepsilon_{n-2}.$$

Здесь мы имеем процесс скользящего среднего второго порядка для второй разности исходного процесса.

3) Процесс (1, 1, 1).

$$\nabla x_n - \alpha_1 \nabla x_{n-1} = \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1}$$

Эта модель представляет из себя смешанную модель авторегрессии и скользящего среднего порядка (1, 1).

Так как соответствующие разности процесса стационарны, то методы идентификации и прогнозирования аналогичны методам, изложенным выше. Коль скоро вычислен прогноз для разности, прогноз для исходного процесса вычисляется немедленно из определения разности.

§5. Гауссовские и условно-гауссовские модели

1. Концепция эффективного рынка обосновывает гипотезу мартингальности нормированных цен, делая тем самым понятие «мартингала» одним из основных при исследовании динамики эволюции цен как стохастических последовательностей с определенными свойствами их распределений. Однако, при проведении конкретных расчетов одного лишь знания «мартингальности распределений» слишком мало — нужна более «тонкая» структура этих распределений, что приводит к необходимости детального рассмотрения самых разнообразных вероятностно-статистических моделей с целью выявления тех из них, свойства распределений которых лучше всего согласуются со свойствами эмпирических распределений, построенных по статистическим данным. Именно этой цели и посвящен, в сущности, весь материал этого курса, в котором будут представлены модели, позволяющие объяснять те или иные свойства, обнаруживаемые при анализе «статистического сырья», в частности, образованного временными финансовыми рядами.

Предположение гауссовости распределений $Law(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ величин $h_1, h_2, \ldots, h_n$ является, конечно, наиболее привлекательным и с точки зрения теоретического анализа, и с точки зрения хорошо развитой «статистики нормального распределения». Но, как отмечалось выше, приходится констатировать (и считаться с этим), что статистическая обработка данных многих финансовых рядов показывает, что предположение гауссовости не всегда адекватно отражает истинную картину поведения цен.

Если же попытаться отыскать альтернативу предположению о гауссовости безусловных распределений $Law(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ последовательности $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то, имея в виду «разложение Дуба», которое определяется с привлечением условных математических ожиданий $\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1})$, вполне естественной представляется идея считать, что не безусловные, а условные распределения вероятностей $Law(h_n|\mathcal{F}_{n-1})$ являются гауссовскими:

$$Law(h_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2),$$

где $\mu_n = \mu_n(\omega)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ являются $\mathcal{F}_{n-1}-$измеримыми.

Это означает, что при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{P}(h_n \leq x|\mathcal{F}_{n-1})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{\frac{(y - \mu_n(\omega))^2}{2\sigma_n^2(\omega)}\} dy.$$

Будем также предполагать, что для всех n и $\omega \in \Omega$ величины $\sigma_n(\omega) \neq 0$.

Это условное распределение $\mathbf{P}(\omega; B)$ $(\omega \in \Omega, B \in \mathcal{F}_{n-1})$ является регулярным, то есть,

1). при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ $\mathbf{P}(\omega; B)$ является вероятностной мерой;

2). для каждого $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ $\mathbf{P}(\omega; B)$ как функция от ω является одним из вариантов условной вероятности $\mathbf{P}(B|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$.

Поэтому условное математическое ожидание $\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$ может быть найдено обычным интегрированием:

$$\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbf{P}(h_n \leq x|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$$

В случае гауссовского распределения получаем

$$\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mu_n$$

и

$$\mathbf{D}(h_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2.$$

Таким образом, «параметры» μ_n и σ_n^2 имеют простой «традиционный» смысл — это условное среднее и условная дисперсия (условного) распределения $Law(h_n|\mathcal{F}_{n-1})$.

Само же распределение $Law(h_n)$ является, тем самым, взвесью (или смесью) условных гауссовских распределений $Law(h_n|\mathcal{F}_{n-1})$ с усреднением по распределению величин μ_n и σ_n^2.

Отметим здесь, что класс распределений, образованных «взвесью» нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ со «случайными» параметрами $\mu_n = \mu_n(\omega)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$, является достаточно широким. С разными частными случаями таких распределений в дальнейшем мы будем встречаться не раз.

Наряду с последовательностью $h = (h_n)$ введем «стандартную» условно-гауссовскую последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ $\mathcal{F}_n-$измеримых случайных величин таких, что

$$Law(\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(0,1), \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Понятно, что эта последовательность является мартингал-разностью, поскольку $\mathbf{E}(\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Но, более того, это будет последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$, поскольку

$$Law(\varepsilon_n|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \mathcal{N}(0,1).$$

В силу сделанного выше предположения $\sigma_n(\omega) \neq 0$ для всех n и $\omega \in \Omega$ величины ε_n, $n \geq 1$, определяемые формулой $\varepsilon_n = (h_n - \mu_n)/\sigma_n$, образуют стандартную гауссовскую последовательность. Следовательно, можно считать, что рассматриваемые условно-гауссовские (относительно потока $\mathcal{F}_n$ и вероятности $\mathbf{P}$) последовательности $h = (h_n)_{n\geq 1}$ представимы в виде

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ — последовательность независимых $\mathcal{F}_n-$измеримых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, $\mathcal{N}(0,1)$.

Понятно, что более детальное изучение вероятностных свойств последовательности $h = (h_n)_{n\geq 1}$, а значит, и $S = (S_n)_{n\geq 1}$, зависит от конкретизации структуры величин $\mu_n = \mu_n(\omega)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$. Именно это и делается в представляемых ниже моделях.

Заметим, что с точки зрения распределений последовательности $h = (h_n)_{n\geq 1}$ и желания иметь условную гауссовость целесообразно бывает рассмотрение этого свойства в следующем контексте. Пусть $(\mathcal{S}_n)$ — подфильтрация $(\mathcal{F}_n)$, т.е. $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_{n+1}$; например, $\mathcal{S}_n = \mathcal{F}_{n-1}$.

Предположим, что $Law(h_n|\mathcal{S}_n) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ с $\mu_n = \mathbf{E}(h_n|\mathcal{S}_n)$, $\sigma_n^2 = \mathbf{D}(h_n|\mathcal{S}_n)$ В этом случае распределение $Law(h_n)$ также является смесью гауссовских.

Перейдем теперь к некоторым конкретным (линейным и нелинейным) гауссовским и условно-гауссовским моделям, в которых для $n \geq 1$ специфицируются значения μ_n и σ_n и должны задаваться начальные условия $(\dots, h_{-1}, h_0)$ и $(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$ для h и ε.

2. Авторегрессионная модель $AR(p)$ **порядка** p. В этой модели предполагается, что

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

и

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_p h_{n-p}, \quad \sigma_n = \sigma = Const > 0.$$

Таким образом, здесь

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n.$$

Последовательность $h = (h_n)_{n \geq 1}$ называемая авторегрессионной моделью (AutoRegressive model) порядка p, требует для своего определения задания начальных значений $h_{n-p}, \dots, h_0$. Если эти значения являются константами, то последовательность $(h_n)_{n \geq 1}$ будет не только условно-гауссовской, но и гауссовской.

3. Модель скользящего среднего $MA(q)$. В этой модели (аббревиатура означает «Moving Average») задаются начальные значения $\varepsilon_{n-q}, \dots, \varepsilon_0$ и полагается

$$\mu_n = b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}, \quad \sigma_n = \sigma = Const > 0.$$

Следовательно,

$$h_n = b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q} + \sigma \varepsilon_n.$$

4. Модель авторегрессии и скользящего среднего $ARMA(p, q)$. Полагается $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, задаются начальные условия $h_{n-p}, \dots, h_0$, $\varepsilon_{n-q}, \dots, \varepsilon_0$ и считается, что

$$\mu_n = (a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_p h_{n-p}) +$$

$$+(b_1\varepsilon_{n-1}+b_2\varepsilon_{n-2}+\dots+b_q\varepsilon_{n-q}), \quad \sigma_n=\sigma=Const>0.$$

Модель такого типа порядка $(,q)$ обозначается $ARMA(p,q)$ (AutoRegressive Moving Average) и называется смешанной моделью авторегрессии и скользящего среднего порядка (p,q); она реализуется, если

$$\mu_n=(a_0+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\dots+a_ph_{n-p})+(b_1\varepsilon_{n-1}+b_2\varepsilon_{n-2}+\dots+b_q\varepsilon_{n-q})+\sigma\varepsilon_n.$$

Перейдем теперь к некоторым интересным условно-гауссовским моделям, которые (в отличие от предшествующих) являются уже нелинейными.

5. Авторегрессионная модель условной неоднородности $ARCH(p)$. Снова предполагаем, что последовательность $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ является (единственным) источником случайности, $\mathcal{F}_n=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$,

$$\mu_n=\mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1})=0,$$

и

$$\sigma_n^2=\mathbf{E}(h_n^2|\mathcal{F}_{n-1})=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i h_{n-i}^2, \tag{9}$$

где $\alpha_0>0$, $\alpha_i\geq 0$, $i=1,\dots,p$, $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ и $h_{n-p},\dots,h_0$ — заданные начальные константы.

Другими словами, условная дисперсия σ_n^2 является функцией от значений $h_{n-1}^2,\dots,h_{n-p}^2$.

Эта модель, введенная в 1982 году Р. Энглем (R.F. Engle) и названная им $ARCH(p)$ (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model — Авторегрессионная модель условной неоднородности), оказалась весьма удачной при объяснении ряда нетривиальных свойств временны́х финансовых рядов таких, как, например, эффект кластерности (скученности) значений величин h_n.

Таким образом

$$h_n=\sigma_n\varepsilon_n, \quad n\geq 1,$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин, $\varepsilon_n\sim\mathcal{N}(0,1)$, а σ_n^2 определяются по формуле (9).

Будем считать, что $\mathbf{E}h_n^2<\infty$. Положим

$$\nu_n=h_n^2-\sigma_n^2.$$

Тогда из (9) имеем

$$h_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2 + \nu_n,$$

где

$$\mathbf{E}(\nu_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}(h_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) - \sigma_n^2 = 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $\nu = (\nu_n)$ образует мартингал-разность.

Таким образом, $ARCH(p)$−модель может рассматриваться как авторегрессионная модель $AR(p)$ для последовательности h_n^2 с «шумом» $\nu = (\nu_n)$, являющимся мартингал-разностью.

6. Обобщенная авторегрессионная модель условной неоднородности $GARCH(p, q)$. Успех применения модели $ARCH(p)$ привел к появлению различных ее обобщений, уточнений, модификаций и т. п.

Приводимая модель $GARCH(p, q)$ (Generalized $ARCH$ — Обобщенная авторегрессионная модель условной неоднородности), введенная Т. Боллерслевом (T. Bollerslev) в 1986 г., является одной из таких разновидностей.

Считая как и раньше

$$\mu_n = \mathbf{E}(h_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

вместо (9) положим

$$\sigma_n^2 = \mathbf{E}(h_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2, \tag{10}$$

где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ и $(h_{n-p}, \ldots, h_0)$, $(\sigma_{n-q}, \ldots, \sigma_0)$— заданные начальные константы.

Модель $GARCH(p, q)$ — это последовательность $h = (h_n)$, где

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а σ_n^2 определяются формулой (10).

Обозначим

$$\alpha(L) h_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2, \quad \beta(L) \sigma_{n-1}^2 = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2,$$

где L есть оператор сдвига:

$$Lh_n^2 = h_{n-1}^2.$$

В этих обозначениях

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha(L)h_{n-1}^2 + \beta(L)\sigma_{n-1}^2.$$

Если, как и выше, положить $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$, то получим

$$h_n^2 = \nu_n + \sigma_n^2 = \nu_n + \alpha_0 + \alpha(L)h_{n-1}^2 + \beta(L)(\sigma_{n-1}^2 - \nu_{n-1}) =$$

$$= \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L))h_{n-1}^2 - \beta(L)\nu_{n-1} + \nu_n =$$
$$= \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L))h_{n-1}^2 + \nu_n - \beta(L)\nu_{n-1}.$$

Тем самым, $GARCH(p, q)-$модель можно рассматривать как модель авторегрессии скользящего среднего, $ARMA(\max(p, q), q)$, для последовательности (h_n^2) с «шумом» (ν_n), который является мартингал-разностью.

7. Модель стохастической волатильности. Во всех предыдущих моделях источник случайности был один. Он задавался гауссовской последовательностью независимых величин $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Модели стохастической волатильности включают в себя два источника случайности: $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ и $\delta = (\delta_n)_{n\geq 1}$, которые в простейшем случае предполагаются независимыми и стандартными гауссовскими последовательностями, то есть, состоящими из независимых, $\mathcal{N}(0, 1)-$распределенных случайных величин.

Пусть $\mathcal{S}_n = \sigma(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Положим

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где σ_n являются $\mathcal{S}_n-$измеримыми.

Ясно, что

$$Law(h_n | \mathcal{S}_n) = \mathcal{N}(0, \sigma_n^2),$$

то есть, $\mathcal{S}_n-$условное распределение h_n является гауссовским с параметрами 0 и σ_n^2.

Положим

$$\sigma_n = e^{\frac{\Delta_n}{2}}.$$

Тогда $\sigma_n^2 = e^{\Delta_n}$, где Δ_n являются $\mathcal{S}_n-$измеримыми. Достаточно популярны модели, где последовательность (Δ_n) является авторегрессионной моделью:

$$\Delta_n = a_0 + a_1\Delta_{n-1} + a_2\Delta_{n-2} + \cdots + a_p\Delta_{n-p} + \delta_n.$$

Обращение к нелинейным моделям вызвано желанием и необходимостью найти объяснение ряда наблюдаемых (в финансовой статистике и в экономике вообще) феноменов типа «кластерность» цен, их «катастрофических» изменений, наличие «тяжелых хвостов» в распределениях величин

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

наличие «долгой памяти» в ценах и других присущих им свойств, которые нельзя объяснить в рамках линейных моделей.

Не вызывает сомнения, что экономические показатели, к которым относятся и финансовые индексы, носят флуктуационный характер.

Флуктуируют макроэкономические индексы (объем продукции, потребления, инвестирования, общий уровень цен, процентных ставок, государственного резерва, ...), дающие представление о состоянии экономики «в среднем», «в целом» флуктуируют и микроэкономические индексы (текущие цены, объем проданных акций, ...). При этом флуктуации могут носить весьма высокочастотный и крайне нерегулярный характер, что и объясняет попытки описания такими моделями флуктуационных эволюции, резких переходов, «катастрофических» выбросов, сгруппированности (кластерности) значений и т.п.

§6. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели

1. Модели $ARCH$ и $GARCH$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — исходное вероятностное пространство, $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, моделирующих «случайность», «неопределенность» в рассматриваемых далее моделях.

Через $\mathcal{F}_n$ обозначаем $\sigma-$алгебы $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$. Будем интерпретировать $S_n = S_n(\omega)$ как значение цены (скажем, акции, обменного курса) в момент времени $n = 0, 1, \ldots$ Время может измеряться в годах, месяцах, ..., минутах, секундах. Как уже отмечалось выше, для описания эволюции величин $h = (h_n)_{n\geq 1}$, где

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

Р. Энгл использовал условно-гауссовскую модель, в которой

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где «волатильности» σ_n^2 определяются следующим образом:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2, \tag{11}$$

где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p, h_0 = h_0(\omega)$ — случайная величина, не зависящая от $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$. Часто h_0 считается константой или случайной величиной, математическое ожидание квадрата которой выбирается из соображений «стационарности» значений $\mathbf{E}h_n^2$, $n \geq 1$.

Из (11) видим, что волатильности σ_n^2 являются предсказуемыми функциями от $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots, h_{n-p}^2$. При этом ясно, что большие или малые значения h_{n-i}^2 $(i = 1, \dots, p)$, приводят к большим или малым значениям σ_n^2. Возникновение же больших h_n^2 в предположении, что предшествующие $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots, h_{n-p}^2$ были малыми, происходит за счет появления больших значений ε_n. Таким образом, становится понятным, почему рассматриваемые нелинейные модели могут объяснять эффекты типа «кластерности», то есть группирования значений (h_n) в пачки «больших» и пачки «малых» значений.

Рассмотрим теперь свойства последовательности $h = (h_n)_{n \geq 1}$, описываемой $ARCH(p)-$моделью, ограничившись, для простоты изложения, случаем $p = 1$.

Имеем

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2. \tag{12}$$

Тогда для $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ очевидны следующие простые свойства: $\mathbf{E}h_n = 0$, $\mathbf{E}h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{E}h_{n-1}^2$, $\mathbf{E}(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2$

В предположении

$$0 < \alpha_1 < 1$$

рекуррентное соотношение $\mathbf{E}h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{E}h_{n-1}^2$ имеет единственное «стационарное» (то есть, не зависящее от n) решение

$$\mathbf{E}h_n^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad n \geq 1. \tag{13}$$

Значит, если взять $h_0^2 = \alpha_0/(1 - \alpha_1)$, то формула (13) будет выполнена для всех $n \geq 0$.

Простой подсчет показывает, что

$$\mathbf{E}h_n^4 = \mathbf{E}\sigma_n^4 \mathbf{E}\varepsilon_n^4 = 3\mathbf{E}(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)^2 =$$

$$= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \mathbf{E}h_{n-1}^2 + \alpha_1^2 \mathbf{E}h_{n-1}^4).$$

Отсюда, учитывая (13), получаем «стационарное» решение в предположении $0 < \alpha_1 < 1$, $3\alpha_1^2 < 1$:

$$\mathbf{E}h_n^4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что «стационарное» значение куртозиса (коэффициента эксцесса) выражается формулой

$$K = \frac{6\alpha_0^2}{1-3\alpha_1^2}$$

положительность которого говорит о том, что плотность «установившегося» распределения величин (h_n) в окрестности среднего значения «вытянута» вверх (тем сильнее, чем больше α_1^2). Напомним, что для нормального распределения эксцесс $K = 0$.

2. Последовательность $h = (h_n)$ с $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ является при $0 < \alpha_1 < 1$ квадратично интегрируемой мартингал-разностью и, тем самым, является последовательностью с ортогональными значениями:

$$\mathbf{Cov}(h_n, h_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Это свойство не означает, разумеется, независимости величин h_n и h_m, поскольку их совместное распределение, $Law(h_n, h_m)$, не является, как мы видим, гауссовским при $\alpha_1 > 0$.

О характере зависимости величин h_n и h_m можно получить представление рассматривая корреляционную зависимость их квадратов h_n^2 и h_m^2 или модулей $|h_n|$ и $|h_m|$.

Прилагая некоторые усилия, можно получить

$$\mathbf{D}h_n^2 = \frac{2}{1-3\alpha_1^2}\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2,$$

$$\mathbf{E}h_n^2 h_{n-1}^2 = \frac{1+3\alpha_1}{1-3\alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_1},$$

$$\mathbf{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2) = \mathbf{E}h_n^2 h_{n-1}^2 - \mathbf{E}h_n^2 \mathbf{E}h_{n-1}^2 = \frac{1+3\alpha_1}{1-3\alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\alpha_1\alpha_0^2}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)^2}.$$

Следовательно,

$$\rho_1 \equiv \mathbf{Corr}(h_n^2, h_{n-1}^2) = \frac{\mathbf{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2)}{\sqrt{\mathbf{D}h_n^2\, \mathbf{D}h_{n-1}^2}} = \alpha_1.$$

Для $k < n$ запишем

$$\mathbf{E}h_n^2 h_{n-k}^2 = \mathbf{E}[h_{n-k}^2(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)] = \alpha_0 \mathbf{E}h_{n-k}^2 + \alpha_1 \mathbf{E}h_{n-1}^2 h_{n-k}^2.$$

Аналогично выводится рекуррентное соотношение для корреляционной функции

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1},$$

которое дает «стационарное» решение:

$$\rho_k = \alpha_1^k.$$

Отметим здесь, что $ARCH(p)-$модели самым тесным образом связаны с общими авторегрессионными схемами $AR(p)$.

Действительно, пусть имеется $ARCH(p)-$модель $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$. Тогда, если $\mathbf{E}h_n^2 < \infty$, то последовательность (ν_n) образует (относительно потока $(\mathcal{F}_n)$) мартингал-разность, и из (11) следует, что величины $x_n = h_n^2$ удовлетворяют авторегрессионной модели $AR(p)$:

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \ldots + \alpha_p x_{n-p} + \nu_n,$$

где «шум» $\nu = (\nu_n)$ является мартингал-разностью.

Таким образом, $ARCH(p)-$модели самым тесным образом связаны также с авторегрессионными моделями со случайными коэффициентами, которые используются при описании «случайных блужданий в случайных средах».

Для пояснения сути дела снова ограничимся значением $p = 1$. В этом случае имеем

$$h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2}\, \varepsilon_n.$$

Рассмотрим теперь следующую авторегрессионную модель первого порядка со случайными коэффициентами:

$$x_n = B_1 \eta_n x_{n-1} + B_0 \delta_n,$$

где (η_n) и (δ_n) — две независимые стандартные гауссовские последовательности. С точки зрения конечномерных распределений последовательность $x = (x_n)$ с $x_0 = 0$ (для определенности) устроена так же, как и последовательность $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ с

$$\widetilde{x}_n = \sqrt{B_0^2 + B_1 \widetilde{x}_{n-1}^2}\, \widetilde{\varepsilon}_n, \quad \widetilde{x}_0 = 0.$$

где $\widetilde{\varepsilon} = (\widetilde{\varepsilon}_n)$ — стандартная гауссовская последовательность.

Сопоставляя представления для h_n и $\widetilde{x}_n$, мы видим, что при $B_0^2 = \alpha_0$ и $B_1^2 = \alpha_1$ вероятностные законы последовательностей $h = (h_n)$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ с $h_0 = \widetilde{x}_0 = 0$ одни и те же.

3. Рассмотрим вопрос о прогнозировании движения цен, считая, что последовательность $h = (h_n)$ подчиняется модели $ARCH(p)$.

Поскольку последовательность $h = (h_n)$ является мартингал-разностью, то $\mathbf{E}(h_{n+m}|\mathcal{F}_n) = 0$ и, значит, оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка

$$\widehat{h}_{n+m} \equiv \mathbf{E}(h_{n+m}|\mathcal{F}_n^h) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(h_{n+m}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n^h) = 0,$$

где $\mathcal{F}_n^h = \sigma(h_1, h_2, \dots, h_n)$. Тривиальность этой оценки делает целесообразным рассмотрение вопроса о предсказании будущих значений нелинейных функций от h_{n+m}, например, величин h_{n+m}^2 или $|h_{n+m}|$.

$$\widehat{h}_{n+m}^2 = \mathbf{E}(h_{n+m}^2|\mathcal{F}_n^h) = \mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2 \varepsilon_{n+m}^2|\mathcal{F}_n^h) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2 \varepsilon_{n+m}^2|\mathcal{F}_{n+m-1}^\varepsilon)|\mathcal{F}_n^h] =$$

$$= \mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2|\mathcal{F}_n^h)\, (\equiv \widehat{\sigma}_{n+m}^2).$$

Таким образом, вопрос предсказания будущих значений h_{n+m}^2 сводится к вопросу предсказания «волатильности» σ_{n+m}^2 по результатам прошлых наблюдений $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$.

Учитывая, что

$$\sigma_{n+m}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n+m-1}^2 \varepsilon_{n+m-1}^2,$$

по индукции находим

$$\sigma_{n+m}^2 = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1\sigma_{n+m-2}^2\varepsilon_{n+m-2}^2]\varepsilon_{n+m-1}^2 = \ldots =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{i=1}^{j} \alpha_1 \varepsilon_{n+j-i+1}^2 + \sigma_n^2 \prod_{i=1}^{m} \alpha_1 \varepsilon_{n+m-i}^2.$$

Отсюда, беря условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_n^h)$ и учитывая независимость в величинах последовательности (ε_n), находим, что

$$\widehat{h}_{n+m}^2 = \widehat{\sigma}_{n+m}^2 = \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_1^j + h_n^2\alpha_1^m = \alpha_0 \frac{1-\alpha_1^m}{1-\alpha_1} + h_n^2\alpha_1^m.$$

Как и следовало ожидать, при $m \to \infty$ оценки $\widehat{\sigma}_{n+m}^2$ сходятся (с вероятностью единица) к «стационарному» значению $\mathbf{E}h_n^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1)$.

4. Успех условно-гауссовской модели ARCH(p), давшей объяснение целому ряду феноменов в поведении финансовых индексов («кластерность», «тяжелые хвосты», «вытянутость» плотности распределения величин h_n, ...), породила целую лавину различных ее обобщений, преследующих цель «ухватить», дать возможные объяснения ряда других эффектов, обнаруживаемых методами статистического анализа.

Одним из первых обобщений модели $ARCH(p)$, представленной здесь формулой (10), явилась введенная в 1986 г. Т. Боллерслевом (T. Bollerslev) Обобщенная $ARCH(p)-$модель, характеризуемая двумя параметрами p и q, обозначаемая $GARCH(p,q)$.

Основным преимуществом $GARCH(p,q)-$моделей по сравнению с их прототипом $ARCH(p)-$моделью является то, что при подгонке статистических данных моделями $ARCH(p)$ часто приходится обращаться к слишком большим значениям p, тогда как при подгонке $GARCH(p,q)-$моделями можно ограничиваться (проверено экспериментально) лишь небольшими значениями p и q.

Анализ моделей $GARCH(p,q)$, в которых «волатильность» σ_n предполагается зависящей (предсказуемым образом) как от $h_{n-i}^2, i \leq p$, так и от $\sigma_{n-j}^2, j \leq q$ проводится аналогично анализу $ARCH(p)-$моделей.

Опуская детали, приведем ряд простых формул, относящихся к модели $GARCH(1,1)$:

$$h_n = \sigma_n\varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1\sigma_{n-1}^2,$$

где $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$.

Очевидно, что тогда

$$\mathbf{E}h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{E}h_{n-1}^2$$

«стационарное» значение $\mathbf{E}h_n^2$ существует при $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ и равно

$$\mathbf{E}h_n^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

При $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ существует «стационарное» значение

$$\mathbf{E}h_n^4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)}.$$

Отсюда получается «стационарное» значение коэффициента эксцесса

$$K = \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2}.$$

Нетрудно также найти и «стационарное» значение автокорреляционной функции ρ_k:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2},$$

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\rho_1.$$

5. Модели стохастической волатильности. Эти модели, уже в введенные выше, характеризуются наличием двух источников случайности (ε_n) и (δ_n), определяющих поведение последовательности $h = (h_n)$ со значениями

$$h_n = \sigma_n\varepsilon_n,$$

где $\sigma_n = e^{\frac{\Delta_n}{2}}$, а последовательность (Δ_n) является моделью $AR(p)$:

$$\Delta_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i\Delta_{n-i} + c\delta_n.$$

Обе последовательности (ε_n) и (δ_n) будем предполагать независимыми стандартными гауссовскими; при этом будем говорить, что $h = (h_n)$ подчиняется $SV(p)$ (Stochastic Volatility)-модели, т.е. модели стохастической волатильности.

Рассмотрим свойства этой модели, полагая $p = 1, |a_1| < 1$:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \ln \sigma_n^2 = a_0 + a_1 \ln \sigma_{n-1}^2 + c\delta_n. \tag{15}$$

Обозначим $\mathcal{F}_n^{\varepsilon,\delta} = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n; \delta_1, \dots, \delta_n)$, $\mathcal{F}_n^{\delta} = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Очевидно, что

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_n^{\delta}) = \sigma_n \mathbf{E}\varepsilon_n = 0$$

и

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) = \mathbf{E}(\sigma_n \varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) = \mathbf{E}(\sigma_n \mathbf{E}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta} \vee \sigma(\delta_n)) | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) =$$
$$= \mathbf{E}(\sigma_n \mathbf{E}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta})) = \mathbf{E}(\sigma_n \mathbf{E}\varepsilon_n) = 0.$$

Тем самым, относительно потока $(\mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta})$ величины $h = (h_n)$ образуют мартингал-разность. (Но не относительно $(\mathcal{F}_n^{\delta})$, поскольку h_n не являются $\mathcal{F}_n^{\delta}$–измеримыми.)

Имеем далее

$$\mathbf{E}h_n^2 = \mathbf{E}\sigma_n^2 \mathbf{E}\varepsilon_n^2 = \mathbf{E}\sigma_n^2 = \mathbf{E}e^{\Delta_n}.$$

Будем предполагать

$$\Delta_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{c^2}{1-a_1^2}\right)$$

Тогда, согласно (17), последовательность $\Delta = (\Delta_n)$ удовлетворяет авторегрессионной схеме $AR(1)$:

$$\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c\delta_n, \tag{16}$$

и при заданных условиях является стационарной последовательностью.

В силу предположений относительно Δ_0 получаем

$$\mathbf{E}h_n^2 = \mathbf{E}\exp\{\Delta_n\} = \exp\left\{\frac{a_0}{1-a_1} + \frac{c^2}{2(1-a_1^2)}\right\},$$

где для подсчета $\mathbf{E}\exp\{\Delta_n\}$ мы воспользовались тем, что для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и для любого σ

$$\mathbf{E}e^{\sigma\xi} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Рассмотрим теперь ковариационные свойства последовательностей $h = (h_n)$ и $h^2 = (h_n^2)$.

Имеем для любого $k \geq 1$:

$$\mathbf{E} h_n h_{n+k} = 0.$$

Тем самым, последовательность $h = (h_n)$ состоит из некоррелированных случайных величин: если $R_n(k) = \mathbf{E} h_n h_{n+k}$, то

$$R_n(k) = 0, k > 0.$$

Вычислим

$$\mathbf{E} h_n^2 h_{n-1}^2 = \mathbf{E} \sigma_n^2 \sigma_{n-1}^2 = \mathbf{E} \exp\{\Delta_n + \Delta_{n-1}\} =$$
$$\mathbf{E}(\exp\{\Delta_{n-1}\} \mathbf{E}(\exp\{a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c\delta_n\} | \Delta_{n-1})) =$$
$$= \mathbf{E} \exp\{a_0 + (1 + a_1)\Delta_{n-1}\} \mathbf{E} \exp\{c\delta_n\} =$$
$$= \exp\left\{a_0 + \frac{c^2}{2}\right\} \exp\left\{\frac{a_0(1 + a_1)}{1 - a_1}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{(1 + a_1)(\Delta_{n-1} + \frac{a_0}{1 - a_1})\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{2a_0}{1 - a_1} + \frac{c^2}{2}\right\} \exp\left\{\frac{(1 + a_1)^2}{2} \cdot \frac{c^2}{1 - a_1^2}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{2a_0}{1 - a_1} + \frac{c^2}{2}\right\} \exp\left\{\frac{c^2}{2} \cdot \frac{1 + a_1}{1 - a_1}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{2a_0}{1 - a_1} + \frac{c^2}{2} \cdot \frac{2}{1 - a_1}\right\} = \exp\left\{\frac{2a_0 + c^2}{1 - a_1}\right\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2) = \exp\left\{\frac{2a_0 + c^2}{1 - a_1}\right\} - \exp\left\{\frac{2a_0}{1 - a_1}\right\} \exp\left\{\frac{c^2}{1 - a_1^2}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{2a_0}{1 - a_1}\right\} \exp\left\{\frac{c^2}{1 - a_1^2}\right\} \left(\exp\left\{\frac{c^2 a_1}{1 - a_1^2}\right\} - 1\right).$$

Как и следовало ожидать, величины h_n^2, и h_{n-1}^2 положительно коррелированы в случае $a_1 > 0$ и отрицательно коррелированы при $a_1 < 0$.

Нетрудно подсчитать, что «стационарный» коэффициент эксцесса в этой модели неотрицателен. Это говорит о том, что модели «стохастической волатильности» с двумя источниками случайности $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ и $\delta = (\delta_n)$, так же как и модели семейства $ARCH$, позволяют описывать последовательности $h = (h_n)$, у которых плотности распределения вероятностей величин h_n имеют вытянутость в окрестности среднего значения $\mathbf{E} h_n = 0$.

§7. Оценка волатильности. Критерий волатильности.

Остановимся на вопросах построения оценок $\widehat{\sigma}_n$ волатильности по результатам наблюдений $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Пусть $h_n = \mu + \sigma_n \varepsilon_n$. Тогда $\mathbf{E}h_n = \mu$ и

$$\mathbf{E}|h_n - \mu| = \mathbf{E}|\sigma_n \varepsilon_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathbf{E}\sigma_n$$

Этот факт естественно положить в основу построения оценок $\widehat{\sigma}_n$ волатильности σ_n по формуле:

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|h_n - \overline{h}_n|,$$

где

$$\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k$$

если μ неизвестно. Если же μ известно, то в качестве соответствующей оценки можно взять

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|h_n - \mu|.$$

Другой метод оценивания σ_n^2 исходит из того факта, что $\mathbf{E}h_n^2 = \mathbf{E}\sigma_n^2$, т. е. основан на свойствах моментов второго порядка.

В качестве оценки для σ_n^2 можно было бы, конечно, взять оценку $\widehat{\sigma}_n^2 = h_n^2$. Она будет несмещенной, однако ее среднеквадратическая ошибка

$$\mathbf{E}|\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2|^2 = \mathbf{E}|h_n^2 - \sigma_n^2|^2 = \mathbf{E}h_n^4 - 2\mathbf{E}h_n^2\sigma_n^2 + \mathbf{E}\sigma_n^4 = 4\mathbf{E}\sigma_n^4 - 2\mathbf{E}\sigma_n^4 = 2\mathbf{E}\sigma_n^4$$

может оказаться достаточно большой.

Естественно, что если величины $\sigma_k^2, k \le n$, являются коррелированными, то можно пытаться при конструировании оценок σ_n^2 использовать не только одно наблюдение h_n^2, но и предшествующие наблюдения $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \ldots$ При этом, конечно, понятно, что если величины $\sigma_k^2, k \le n$, слабо коррелированы, то прошлые величины $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \ldots$ надо учитывать с малыми, убывающими весами. Если же $\sigma_k^2, k \le n$, сильно коррелированы, то значения $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \ldots$ могут дать существенную дополнительную информацию (к той, что есть в h_n^2) о значениях σ_n^2.

Эта идея приводит к рассмотрению экспоненциально-взвешенных оценок

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k h_{n-k}^2, \quad 0<\lambda<1, \tag{17}$$

конструирование которых, как видим, относит момент начала из нуля в $-\infty$.

Заметим, что для формулы (16) верно, что

$$(1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = 1,$$

т.е. сумма взвешенных коэффициентов при конструировании $\widetilde{\sigma}_n^2$ равна единице.

Поскольку $\mathbf{E}h_{n-k}^2 = \mathbf{E}\sigma_{n-k}^2 = \mathbf{E}h_n^2$, то мы видим, что $\mathbf{E}\widetilde{\sigma}_n^2 = \mathbf{E}\sigma_n^2$, т. е. оценка $\mathbf{E}\widetilde{\sigma}_n^2$ наряду с $\mathbf{E}\widehat{\sigma}_n^2$ является несмещенной.

Отметим также, что точность оценки $\widetilde{\sigma}_n^2$ сильно зависит от значения выбираемого параметра λ и, тем самым, возникает (и довольно-таки не простая) задача выбора «оптимального» значения параметра λ.

Из формулы (16) следует, что $\widetilde{\sigma}_n^2$ подчиняются рекуррентным соотношениям

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \lambda\widetilde{\sigma}_{n-1}^2 + (1-\lambda)h_n^2,$$

которые удобны при отыскании оценок методами статистического анализа и моделирования.

2. Обратимся к некоторой последовательности $h=(h_n)_{n\geq 1}, h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, с неоднородными активностями $\sigma_n, n\geq 1$. При этом будем рассматривать n как физическое («старое») время.

Определим последовательность моментов

$$\tau^*(\theta) = \min\left\{ m\geq 1 : \sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2 \geq \theta \right\},$$

где θ принимает значения $1,2,\ldots$ и будет рассматриваться как операционное («новое») время.

Пусть также для $\theta = 1,2,\ldots$

$$h_\theta^* = \sum_{\tau^*(\theta-1)<k\leq\tau^*(\theta)} h_k$$

при этом $\tau^*(0) = 0$.

Ясно, что $\mathbf{E}h^*(\theta) = 0$, а дисперсия

$$\mathbf{D}h^*(\theta) = \mathbf{D}\left[\sum_{\tau^*(\theta-1)<k\le\tau^*(\theta)} h_k\right] = \sum_{\tau^*(\theta-1)<k\le\tau^*(\theta)} \sigma_k^2 \approx 1,$$

поскольку обычно величины σ_k^2 являются достаточно малыми.

Тем самым, можно сказать, что переход к новому «θ-времени» превратил неоднородную последовательность $h = (h_n)_{n\ge1}$ в (почти) однородную последовательность $h^* = (h^*_\theta)_{\theta\ge1}$.

В том случае, когда σ_n являются случайными, $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$, и преследуется цель априорного расчета замены времени для всех (в том числе и для будущих) моментов времени, то предшествующие идеи «деволатилизации» можно использовать, заменив $\sigma_n^2(\omega)$ его средним значением $\mathbf{E}\sigma_n^2(\omega)$ или, в конкретной статистической практике, оценкой этого среднего значения.

Из представления для $h_n = \sigma_n\varepsilon_n$ мы видим, что в предположении $\mathcal{F}_{n-1}$—измеримости σ_n математическое ожидание $\mathbf{E}h_n^2(\omega) = \mathbf{E}\sigma_n^2(\omega)$, и, значит, в качестве оценочного значения для $\mathbf{E}\sigma_n^2$, где момент n соответствует, скажем, интервалу времени $[(n-1)\Delta, n\Delta]$ по Гринвичу понедельника, можно брать арифметическое среднее значений h_n^2, подсчитываемых по статистическим данным, отвечающим этому временному интервалу по всем понедельникам, находящимся в базе данных.

Используя моменты остановки $\tau^*(\theta)$, построим критерий для проверки «гипотезы однородности дисперсий» для последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$. В предположении однородности дисперсий $\sigma_n^2 \equiv \sigma^2$ рассмотрим величину

$$\chi^2 = \sum_{\theta=1}^{r} \frac{\sigma^2}{\theta}\cdot\Big(\tau^*(\theta) - \frac{\theta}{\sigma^2}\Big)^2.$$

Здесь $r = r(N)$ — последний момент остановки.

Теорема 2. *В предположении однородности последовательности (σ_n^2) величина χ^2 имеет распределение хи-квадрат с $(r-1)$ степенью свободы.*

Здесь в качестве оценки неизвестной дисперсии σ_k^2 возьмём, например, несмещенную оценку $\widehat{\sigma}_k^2 = h_k^2$.

Отметим здесь, что распределение статистики хи-квадрат не зависит от оценки волатильностей σ_n^2.

Список литературы

[1] *Ширяев, Альберт Николаевич.* Вероятность: [В 2-х кн.] / А. Н. Ширяев.– Москва: МЦНМО, 2004.[Кн. 1]: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. – Издание 3-е, переработанное и дополненное.– 2004. – 520 с.: табл., ил. – Библиогр.: с.496-501.– Указ.: с.502-517.– ISBN 5-94057-036-4.— ISBN 5-94057-105-0((кн. 1)).

[2] *Ширяев, Альберт Николаевич.* Задачи по теории вероятностей: учеб. пособие / А. Н. Ширяев. – Москва: Изд-во МЦНМО, 2006. – 416 с.; 22. – Предм. указ.: с. 405-410. – Библиогр.: с. 399-404. – ISBN 5-94057-107-7(в пер.), 2000.

[3] *Банк, Валерий Рафаэлович.* Финансовый анализ: учеб. пособие для студентов, обучающихся по спец. "Финансы и кредит "Мировая экономика "Налоги и налогообложение"/ В. Р. Банк, С. В. Банк, А. В. Тараскина.?Москва: Проспект: ТК Велби, 2006.?343, [1] с.: ил.; 22.?Библиогр.: с. 338-343.?ISBN 5-482-00022-2, 3000.

[4] *Батяева, Тамара Александровна.* Рынок ценных бумаг: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 080105 "Финансы и кредит"/ Т.А. Батяева, И.И. Столяров; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, Фак. гос. упр..?Москва: ИНФРА-М, 2009.?302, [1] с.: ил.; 22.?(Учебники факультета государственного управления МГУ им. М. В. Ломоносова).?Библиогр.: с. 294-297 (69 назв.) и в подстроч. примеч..?ISBN 978-5-16-002081-5, 1000.

[5] *Лялин, Владимир Алексеевич.* Рынок ценных бумаг: учебник / В. А. Лялин, В. П. Воробьев.?Изд. 2-е, перераб. и.доп..?Москва: Проспект, 2011.?398 с.: табл.; 22.?Библиогр. в конце гл. и в подстроч. примеч..?ISBN 978-5-392-01277-0((в пер.)), 2000.

[6] *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. - М.: Лань, 2011. - 256с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2026

[7] *Боровков А.А.* Математическая статистика.- М.: Лань, 2010. - 704 с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3810

[8] *Свешников А.А.* Прикладные методы теории вероятностей.- М.: Лань, 2012. - 480 с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3184

[9] *Свешников А.А.* Прикладные методы теории марковских процессов.- М.: Лань, 2007. - 192 с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=590

[10] *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций.- М.: Лань, 2011. - 464с ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=656

[11] *Минниахметов И.Р.* Стохастическое моделирование условных гауссовских процессов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 79. 18 с. http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-79