Министерство образования и науки РФ
ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Высшая школа информационных технологий и информационных систем
Кафедра автономных робототехнических систем

Н.Н. Корнеева

Математическая логика

Конспект лекций

Казань — 2014

Направление подготовки: 230700.62 «Прикладная информатика» (бакалавриат, 2 курс, очное обучение)
Дисциплина: «Математическая логика»
Количество часов: 108 ч. (в том числе: лекции – 18, практические занятия – 18, самостоятельная работа – 36, форма контроля: экзамен (3 семестр) – 36).
Аннотация: В курсе излагаются основные разделы математической логики. Изучается логика высказываний и логика предикатов и соответствующие им аксиоматические системы: исчисление высказываний и исчисление предикатов. Доказываются теоремы о непротиворечивости и полноте указанных исчислений.
Темы: 1. Логика высказываний. 2. Исчисление высказываний. 3. Логика предикатов. 4. Исчисление предикатов.
Ключевые слова: высказывание, предикат, логические операции, кванторы, аксиоматическая система, непротиворечивость, полнота
Дата начала эксплуатации: 1 сентября 2014г.
Автор: Корнеева Наталья Николаевна, старший преподаватель кафедры автономных робототехнических систем КФУ, кандидат физико-математических наук, e-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru
URL электронного курса в MOODLE:
http://tulpar.kpfu.ru/course/view.php?id=837

Содержание

1. Логика высказываний **4**

Лекция 1. Основные понятия логики высказываний 4

Лекция 2. Теорема компактности логики высказываний 8

2. Исчисление высказываний **12**

Лекция 3. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Теорема дедукции. 12

Лекция 4. Правила введения и удаления логических символов. Закон исключенного третьего. 16

Лекция 5. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний. 19

3. Логика предикатов **25**

Лекция 6. Основные понятия логики предикатов 25

Лекция 7. Эквивалентные формулы логики предикатов. Пренексная (предваренная) нормальная форма 28

4. Исчисление предикатов **33**

Лекция 8. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Теорема дедукции 33

Лекция 9. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов 36

1. Логика высказываний

Лекция 1. Основные понятия логики высказываний.

Аннотация: В данной лекции рассматриваются основные понятия логики высказываний: высказывание, логические операции, формулы, подформулы, нормальные формы формул. Приводятся определения тождественной истинности, тождественно ложности, выполнимости формул логики высказываний. Дается определение эквивалентных формул логики высказываний и приводятся основные эквивалентности.

Ключевые слова: высказывание, логические операции, формула, тождественно истинная формула, выполнимая формулы, тождественно ложная формула, эквивалентные формулы.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.

3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.

5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf

6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/

7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/

10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Высказывание.

2. Основные логические операции и их таблицы истинности.
3. Формулы логики высказываний.
4. Тождественно истинные, тождественно ложные и выполнимые формулы логики высказываний.
5. Эквивалентные формулы логики высказываний. Основные пары эквивалентных формул.
6. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

Высказывание – повествовательное предложение, про которое можно сказать истинно оно или ложно. Соединяя различные высказывания союзами "и", "или", "если..., то...", "не" (другими словами, используя различные логические операции), можно строить новые высказывания. Об истинности полученных высказываний можно судить по истинности исходных высказываний.

Рассмотрим основные логические операции и их таблицы истинности, при этом высказывания будем обозначать большими латинскими буквами.
1. *Конъюнкция:* $A \wedge B$ (читается "A и B"). Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истины оба высказывания A и B.
2. *Дизъюнкция:* $A \vee B$ (читается "A или B"). Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B. Другими словами, дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B.
3. *Импликация:* $A \to B$ (читается "если A, то B"). Импликация ложна тогда и только тогда, когда истинно A и ложно B.
4. *Отрицание:* $\neg A$ (читается "не A"). Отрицание истинно тогда и только тогда, когда исходное выказывание A ложно.

Истинностные значения логических операций отражены в следующих таблицах, где истина обозначена как 1, ложь – как 0:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

и

A	$\neg A$
0	1
1	0

Язык логики высказываний:

1. пропозициональные переменные (высказывания), которые будем обозначать большими латинскими буквами (возможно с индексами) $A, B, C \ldots$,
2. логические символы: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$,
3. вспомогательные символы: открывающаяся скобка (, закрывающаяся скобка), запятая.

Формулы логики высказываний. Понятие формулы логики высказываний вводится индуктивно:

1. пропозициональная переменная есть формула,
2. если A, B – формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $\neg A$ – формулы.

Соглашение. При записи формул внешние скобки опускают. Кроме того, опускают некоторые внутренние скобки, считая, что $\wedge$ выполняется раньше $\vee$, которая выполняется раньше $\rightarrow$.

Подформула. Введем индуктивно понятие подформулы:

1. подформулой пропозициональной переменной является она сама,
2. если формула имеет вид $\neg A$, то ее подформулами являются она сама, формула A и все подформулы формулы A; если формула имеет вид $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ или $(A \rightarrow B)$, то ее подформулами являются она сама, формулы A и B и все подформулы формул A и B.

Пример. Выражение $((A \wedge B) \rightarrow (\neg(A \vee B)))$ является формулой. С учетом соглашения ее можно записать следующим образом: $A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)$.

Подформулами указанной формулы являются A, B, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg(A \vee B)$, $A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)$.

Эквивалентность формул. Две формулы логики высказываний A и B называются *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если они принимают одинаковые значения при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных, или, другими словами, если их таблицы истинности совпадают.

Эквивалентные формулы логики высказываний:

1. $\neg\neg A \sim A$
2. $A \wedge B \sim B \wedge A$
3. $A \vee B \sim B \vee A$
4. $A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

6. $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
7. $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
8. $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
9. $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
10. $A \to B \sim \neg A \vee B$
11. $A \to B \sim \neg B \to \neg A$
12. $A \wedge (A \vee B) \sim A$
13. $A \vee (A \wedge B) \sim A$
14. $A \wedge A \sim A$
15. $A \vee A \sim A$
16. $A \wedge \neg A \sim 0$
17. $A \vee \neg A \sim 1$

Формула логики высказываний называется *тождественно истинной*, если она принимает значения истина при любых значениях входящих в нее пропозициональных переменных.

Формула логики высказываний называется *выполнимой*, если она принимает значения истина хотя бы при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Формула логики высказываний называется *тождественно ложной*, если она принимает значения ложь при любых значениях входящих в нее пропозициональных переменных.

Определить тождественную истинность, тождественную ложность, выполнимость формулы можно записав ее нормальную форму.

Элементарной конъюнкцией называется произвольная конъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний. *Элементарной дизъюнкцией* называется произвольная дизъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций. ДНФ (КНФ) называется *совершенной* и обозначается *СДНФ (СКНФ)*, если каждая переменная, входящая в нее, входит с отрицанием или без в каждую элементарную конъюнкцию (элементарную дизъюнкцию) ровно один раз. Для каждой формулы существуют эквивалентные ей ДНФ и КНФ.

Легко доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Элементарная дизъюнкция тождественно истинна тогда и только тогда, когда она содержит некоторую пропозициональную переменную и ее отрицание.

Теорема 2. Элементарная конъюнкция тождественно ложна тогда и только тогда, когда она содержит некоторую пропозициональную переменную и ее отрицание.

Теорема 3. Формула тождественно истинна тогда и только тогда, когда в ее конъюнктивной нормальной форме каждая элементарная дизъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную и ее отрицание.

Теорема 4. Формула тождественно ложна тогда и только тогда, когда в ее дизъюнктивной нормальной форме каждая элементарная конъюнкция содержит некоторую пропозициональную переменную и ее отрицание.

Лекция 2. Теорема компактности логики высказываний.

Аннотация: В данной лекции дается понятие выполнимого множества формул логики высказываний и доказывается теорема компактности, то есть необходимое и достаточное условие выполнимости для бесконечного множества формул логики высказываний.

Ключевые слова: выполнимое множество формул, теорема компактности.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.
5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf
6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/
7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/
8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf
9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/
10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Выполнимое множество формул логики высказываний.
2. Теорема компактности логики высказываний.

Множество формул логики высказываний Γ называется *выполнимым*, если при некотором наборе значений пропозициональных переменных, входящих в формулы из Γ, все формулы из множества Γ принимают значение истина.

Теорема компактности. Пусть $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ – некоторое (бесконечное) множество формул логики высказываний. Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда выполнимо каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$.

Для доказательства потребуется лемма Кенига для бесконечных конечно ветвящихся деревьев. Приведем необходимые определения и результаты.

Частично упорядоченные множества.

Множество S называется *строго частично упорядоченным*, если на нем задано антирефлексивное транзитивное бинарное отношение (которое обозначим $<$), то есть

1. для любого $x \in S$ неверно, что $x < x$ (антирефлексивность),
2. для любых $x, y, z \in S$: если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$ (транзитивность).

Строго частично упорядоченное множество S называется *линейно упорядоченным*, если для любых $x, y \in S$ выполняется условие: $x < y$, или $y < x$, или $x = y$.

Линейно упорядоченное множество S называется *вполне упорядоченным*, если любое непустое подмножество S' множества S имеет наименьший элемент относительно заданного на нем отношения $<$, то есть существует такой элемент $x \in S'$, что $y < x$ не выполняется ни при каком $y \in S'$.

Дерево. *Деревом* называется строго частично упорядоченное множество, которое имеет единственный наименьший элемент, называемый корнем, и в котором множество всех предшественников каждого его элемента образует вполне упорядоченное множество. Элементы дерева называются его *вершинами.*

Пусть T – дерево. Если $x, y \in T$ и $x < y$, то x называется *предшественником* y, а y – *последователем* x. Элемент x называется *непосредственным предшественником* элемента y и y – *непосредственным последователем* x, если не существует $z \in T$ такого, что $x < z < y$.

Дерево называется *бесконечным*, если оно содержит бесконечное число вершин. Дерево называется *конечно ветвящимся*, если каждая его вершина имеет конечное число непосредственных последователей.

Дерево называется *бинарным*, если каждая его вершина имеет не более двух непосредственных последователей, и *полным бинарным*, если каждая его вершина имеет ровно двух непосредственных последователей.

Лемма Кенига. Любое конечно ветвящееся бесконечное дерево содержит бесконечную ветвь (то есть максимальное линейно упорядоченное подмножество).

Доказательство леммы Кенига. Пусть T – бесконечное дерево и x_0 – его корень. Так как дерево бесконечное (число последователей x_0 бесконечно) и конечно ветвящееся (число непосредственных последователей x_0 конечно), то среди непосредственных последователей x_0 найдется вершина, имеющая бесконечное число последователей. Пусть это вершина x_1. Аналогично среди непосредственных последователей x_1 находим вершину, которая имеет бесконечное число последователей (пусть это вершина x_2) и т. д. В итоге получим бесконечное линейно упорядоченное подмножество (ветвь) $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\square$

Доказательство теоремы компактности.

Необходимость: Очевидно, что если Γ выполнимо, то выполнимо и каждое конечное подмножество Γ.

Достаточность: Пусть $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ – все пропозициональные переменные, из которых составлены формулы из множества Γ.

Если множество $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ конечно, то утверждение теоремы практически очевидно.

Предположим, что множество $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Пусть T – полное бинарное дерево. Интерепретируем метки 0 и 1 первого уровня дерева (то есть непосредственных последователей корневой вершины) как значения пропозициональной переменной B_0, метки $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 1\}$ второго уровня (то есть непосредственных последователей вершин первого уровня) – как значения пропозициональных переменных B_0, B_1 (в указанном порядке) и т.д. Таким образом, метки n-го уровня дерева T интерпретируются как значения пропозициональных переменных B_0, B_1,..., B_{n-1}.

Определим поддерево T' дерева T. Пусть i_0 – наименьшее число такое, что пропозициональные переменные, участвующие в составлении формулы A_0, содержатся в $\{B_i | i \leq i_0\}$. Добавим в поддерево T' все вершины i_0-го уровня дерева T, метки которых придают истинные значения формуле A_0, и всех их предшественников. По условию теоремы существует хотя бы одна вершина i_0-го уровня, удовлетворяющая этому условию.

Аналогично, пусть i_1 – такое наименьшее число, что участвующие в составлении формул A_0, A_1 пропозициональные переменные содержатся в $\{B_i | i \leq i_1\}$. Добавим в поддерево T' все вершины i_1-го уровня дерева T, метки которых придают истинные значения формулам A_0, A_1, и всех их предшественников.

Продолжаем указанную процедуру далее. В результате будет построено бесконечное бинарное дерево T'. В силу леммы Кенига, T' содержит бесконечную ветвь Q. В силу построения T', все формулы из Γ принимают значение истина, если придать пропозициональным переменным значения истинности как на построенной бесконечной ветви Q. $\square$

2. Исчисление высказываний

Лекция 3. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Теорема дедукции.

Аннотация: В данной лекции рассматривается аксиоматическая логическая система, которая естественным образом связана с логикой высказываний. Приводятся аксиомы и правила вывода этой системы, понятия доказуемой и выводимой формулы. Доказывается теорема дедукции исчисления высказываний.

Ключевые слова: аксиомы исчисления высказываний, правило Modus Ponens, доказуемая формула, выводимая формула, теорема дедукции.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.

3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.

5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf

6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/

7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/

10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Аксиомы и правило вывода исчисления высказываний.
2. Понятие доказуемой и выводимой формулы.

3. Свойства операции выводимости.
4. Теорема дедукции исчисления высказываний.

Рассмотрим аксиоматическую логическую систему, которая естественным образом связана с логикой высказываний. Для описания логического исчисления необходимо указать язык, аксиомы и правила вывода исчисления, понятие формулы и доказуемой формулы исчисления. Язык и понятие формулы исчисления высказываний совпадают с соответствующими понятиями логики высказываний.

Аксиомы исчисления высказываний:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
10. $\neg\neg A \to A$

Правило вывода (Modus Ponens): $\frac{A, A \to B}{B}$

Доказуемые формулы. Формула D называется *доказуемой (теоремой)*, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул. Последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ называется доказательством. Число n называется длиной доказательства. Если D доказуема, то пишут $\vdash D$.

Пример: $A \to A$ – доказуемая формула, длина доказательства 5.

Доказательство:

1) $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$ (аксиома 2)
2) $A \to (A \to A)$ (аксиома 1)
3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ (MP(2,1))
4) $A \to ((A \to A) \to A)$ (аксиома 1)
5) $A \to A$ (MP (4,3)).

Выводимые формулы. Формула D называтся *выводимой из формул* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо одна из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих формул. Последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ называется выводом формулы D из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Если D выводима из $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то пишут $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash D$.

Очевидно, что формула, выводимая из пустого множества формул, является доказуемой. Кроме того, ясно, что если формула доказуема, то она выводима из любого множества формул.

Следующие свойства операции выводимости легко следуют из определения этой операции.

Свойства операции выводимости $\vdash$:

1) $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash A_i$ для любого $i = \overline{1.m}$.
2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_1$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_2, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_p$ и $B_1, B_2, \ldots, B_p \vdash C$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash C$.
3) Если $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1} \vdash B$.
4) Если $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_m \vdash B$, то $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_m \vdash B$.

Теорема дедукции: Если Γ – некоторое конечное множество формул исчисления высказываний, A, B – произвольные формулы исчисления высказываний и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится индукцией по длине n вывода B из множества формул Γ, A.

Базис индукции, если длина вывода $n = 1$. Возможны 3 случая:

1) B – аксиома,
2) $B = A$,
3) $B \in \Gamma$.

Разберем каждый случай. Построим вывод формулы $A \to B$ из Γ.

В первом и третьем случаях:

1. $B \to (A \to B)$ (аксиома 1)
2. B (аксиома или $B \in \Gamma$)
3. $A \to B$ (MP(2,1)).

Во втором случае формула, которую требуется доказать, принимает вид $A \to A$. Это доказуемая формула (см. пример выше), значит она выводима из любого множества формул, в частности, из Γ.

Предположение индукции: допустим, утверждение теоремы справедливо для случая, когда длина вывода B из Γ, A не превосходит n.

Шаг индукции: пусть длина вывода B из Γ, A есть $n+1$.

В силу определения выводимости на $(n+1)$–ом шаге возможны следующие случаи:

1) B – аксиома,

2) $B = A$,

3) $B \in \Gamma$,

4) $B = MP(P_i, P_j)$, где $1 \leq i, j \leq n$, то есть B получена по правилу Modus Ponens из формул P_i и P_j.

Доказательство для первых трех случаев проводится также, как в базисе индукции.

Рассмотрим 4 случай. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ есть вывод B из Γ, A:

1. $\Gamma, A \vdash P_1$

2. $\Gamma, A \vdash P_2$

$\vdots$

i. $\Gamma, A \vdash P_i$

$\vdots$

j. $\Gamma, A \vdash P_j$ или $\Gamma, A \vdash (P_i \to B)$

$\vdots$

n+1. $\Gamma, A \vdash B$.

По индукционному предположению имеем

(α) $\Gamma \vdash A \to P_i$

(β) $\Gamma \vdash A \to P_j$ или $\Gamma \vdash A \to (P_i \to B)$

Построим вывод $\Gamma \vdash A \to B$:

$(\gamma)\Gamma \vdash (A \to P_i) \to ((A \to (P_i \to B)) \to (A \to B))$ (аксиома 2)

$(\delta)\Gamma \vdash (A \to (P_i \to B)) \to (A \to B)$ (MP(α,γ))

$\Gamma \vdash A \to B$ (MP(β,δ)). $\square$

Лекция 4. Правила введения и удаления логических символов. Закон исключенного третьего.

Аннотация: В данной лекции выводятся новые правила исчисления высказываний, называемые правилами введения и удаления логических символов, и доказываются два закона: закон исключенного третьего и закон противоречия.

Ключевые слова: правила введения и удаления логических символов, закон исключенного третьего, закон противоречия.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.

3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.

5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf

6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/

7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/

10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Правила введения и удаления логических символов.
2. Закон исключенного третьего.
3. Закон противоречия.

Правила введения и удаления логических символов:

1) введение конъюнкции: $A, B \vdash A \wedge B$

2) введение дизъюнкции: $A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$

3) введение импликации: если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$.

4) введение отрицания: если $A \vdash B$ и $A \vdash \neg B$, то $\vdash \neg A$.

5) удаление конъюнкции: $A \wedge B \vdash A$, $A \wedge B \vdash B$

6) удаление дизъюнкции: если $A \vdash C$ и $B \vdash C$, то $A \vee B \vdash C$

7) удаление импликации: $A, A \to B \vdash B$

8) удаление отрицания: $\neg\neg A \vdash A$

Доказательство:

1) введение конъюнкции:

1. $A, B \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B))$ (аксиома 5)
2. $A, B \vdash A \to (A \to A)$ (аксиома 1)
3. $A, B \vdash A$ (свойство $\vdash$)
4. $A, B \vdash A \to A$ (MP(3, 2))
5. $A, B \vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B)$ (MP(4, 1))
6. $A, B \vdash B \to (A \to B)$ (аксиома 1)
7. $A, B \vdash B$ (свойство $\vdash$)
8. $A, B \vdash A \to B$ (MP(7, 6))
9. $A, B \vdash A \to A \wedge B$ (MP(8, 5))
10. $A, B \vdash A \wedge B$ (MP(3, 9))

2) введение дизъюнкции (докажем для A, для B аналогично):

1. $A \vdash A \to A \vee B$ (аксиома 6)
2. $A \vdash A$ (свойство $\vdash$)
3. $A \vdash A \vee B$ (MP(2,3))

3) введение импликации: если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$ (это теорема дедукции, доказанная ранее).

4) введение отрицания:

1. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (аксиома 9)
2. $A \vdash B$ (допущение правила)
3. $\vdash A \to B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (MP(3, 1))
5. $A \vdash \neg B$ (допущение правила)

6. $\vdash A \to \neg B$ (теорема дедукции, примененная к шагу 4)
7. $\vdash \neg A$ (MP(6, 4)).

5) удаление конъюнкции (докажем для A, для B аналогично):
1. $A \wedge B \vdash A \wedge B \to A$ (аксиома 3)
2. $A \wedge B \vdash A \wedge B$ (свойство $\vdash$)
3. $A \wedge B \vdash A$ (MP(2,1))

6) удаление дизъюнкции:
1. $A \vee B \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ (аксиома 8)
2. $A \vdash C$ (допущение правила)
3. $\vdash A \to C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 2)
4. $A \vee B \vdash A \to C$ (свойство $\vdash$)
5. $A \vee B \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ (MP(4, 1))
6. $B \vdash C$ (допущение правила)
7. $\vdash B \to C$ (теорема дедукции, примененная к шагу 6)
8. $A \vee B \vdash B \to C$ (свойство $\vdash$)
9. $A \vee B \vdash A \vee B \to C$ (MP(8, 5))
10. $A \vee B \vdash A \vee B$ (свойство $\vdash$)
11. $A \vee B \vdash C$ (MP(10, 9))

7) удаление импликации: $A, A \to B \vdash B$ (это правило Modus Ponens).

8) удаление отрицания:
1. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$ (аксиома 10)
2. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A$ (свойство $\vdash$)
3. $\neg\neg A \vdash A$ (MP(2,1)) $\square$

Теорема (закон исключенного третьего): Для любой формулы исчисления высказываний A доказуема формула $A \vee \neg A$, то есть $\vdash A \vee \neg A$.

Доказательство.
1. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$ (свойство $\vdash$)
2. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ (введение дизъюнкции)
3. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ (введение отрицания)
4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ (введение дизъюнкции)
5. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$ (свойство $\vdash$)
6. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$ (свойство $\vdash$)
7. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ (введение отрицания)
8. $\vdash A \vee \neg A$ (удаление отрицания) $\square$

Теорема (закон противоречия,слабое удаление отрицания): Для любой формулы исчисления высказываний A верно $A, \neg A \vdash B$, где B – произвольная формула исчисления высказываний.

Доказательство. Пусть B – произвольная формула исчисления высказываний.
1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$ (свойство $\vdash$)
2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ (свойство $\vdash$)
3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ (введение отрицания)
4. $A, \neg A \vdash B$ (удаление отрицания) $\square$

Лекция 5. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.

Аннотация: В данной лекции доказываются непротиворечивость и полнота исчисления высказываний.

Ключевые слова: непротиворечивость, полнота.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.
4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.
5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf
6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/
7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/
8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/
10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Непротиворечивость исчисления высказываний.
2. Полнота исчисления высказываний.
3. Равносильность формул исчисления высказываний.

Логическое исчисление *непротиворечиво*, если не существует такой формулы A, что доказуемо A и доказуемо $\neg A$ (то есть $\vdash A$ и $\vdash \neg A$).

Теорема 1. Любая доказуемая формула исчисления высказываний тождественно истинна.

Доказательство.

1. Каждая аксиома тождественно истинна (проверка построением таблицы истинности для аксиом).

2. Применение правила вывода (Modus Ponens) к тождественно истинным формулам дает тождественно истинную формулу.

Пусть A, $A \to B$ тождественно истинны. Допустим, что B не тождественно истинна. Тогда она принимает значение ложь при некоторых значениях входящих в нее пропозициональных переменных. Формула A принимает значение истина на этом наборе значений пропозициональных переменных. Тогда $A \to B$ принимает значение ложь при этих значениях пропозициональных переменных, что противоречит тождественной истинности формулы $A \to B$. □

Теорема 2 (о непротиворечивости исчисления высказываний). Исчисление высказываний непротиворечиво.

Доказательство. Доказательство от противного. Пусть исчисление высказываний противоречиво. Тогда существует формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. Значит, в силу закона противоречия, в исчислении высказываний любая формула доказуема. Следовательно, в силу теоремы 1, любая формула тождественно истинна. Приходим к противоречию с тем, что не любая формула исчисления высказываний тождественно истинна (привести пример не тождественно истинной формулы исчисления высказываний). □

Теорема 3 (о полноте исчисления высказываний). Исчисление высказываний полно, то есть формула исчисления высказываний доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.

Необходимость доказана в теореме 1. Прежде чем доказать достаточность докажем лемму.

Соответствующая n-ка. Пусть формула A составлена из пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Пусть эти переменные принимают некоторые значения 0,1. Последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, где

$$Q_i = \begin{cases} P_i, \text{ если } P_i = 1 \\ \neg P_i, \text{ если } P_i = 0 \end{cases},$$

называется *соответствующей n-кой.*

Лемма. Пусть формула A составлена из пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Пусть эти переменные принимают некоторые значения 0,1 и последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ является соответствующей n-кой. Тогда если A при заданных значениях $P_1, P_2, \ldots, P_n$ принимает значение 1, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ выводит A. Если A при заданных значениях $P_1, P_2, \ldots, P_n$ принимает значение 0, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ выводит $\neg A$, то есть
если $A = 1$, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash A$.
если $A = 0$, то $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash \neg A$.

Доказательство леммы. Доказательство индукцией по количеству логических знаков m, участвующих в построении формулы A.

Базис индукции: $m = 0$, тогда $A = P$. Возможны 2 варианта:
1) $P = 0$ и $A = 0$, тогда $Q = \neg P$. Требуется доказать $\neg P \vdash \neg A$ или $\neg A \vdash \neg A$ (очевидно).
2) $P = 1$ и $A = 1$, тогда $Q = P$. Требуется доказать $P \vdash A$ или $A \vdash A$ (очевидно).

Предположение индукции: пусть лемма доказана для формул с $\leq m$ логическими знаками.

Шаг индукции: докажем лемму для формул с $m+1$ логическим знаком.

Рассмотрим различные случаи в зависимости от того, какой логический знак входит в формулу последним:
1) $A = B \wedge C$,
2) $A = B \vee C$,
3) $A = B \to C$,
4) $A = \neg B$,
причем формулы B и C содержат не более m логических знаков, то есть для них лемма доказана.

В зависимости от значений B и C в каждом из 4 приведенных выше случаев возможны следующии подслучаи:

$B=1$ и $C=1$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash B$, $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash C$,
$B=1$ и $C=0$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash B$, $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg C$,
$B=0$ и $C=1$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg B$, $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash C$,
$B=0$ и $C=0$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg B$, $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg C$.

Рассмотрим первый случай $A = B \wedge C$. Для него требуется доказать:

1.1. $B=1$ и $C=1$, тогда $A=1$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash A$,
1.2. $B=1$ и $C=0$, тогда $A=0$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg A$,
1.3. $B=0$ и $C=1$, тогда $A=0$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg A$,
1.4. $B=0$ и $C=0$, тогда $A=0$: $Q_1, Q_2, ..., Q_n \vdash \neg A$.

Для доказательства достаточно будет построить выводы:

1.1 $B, C \vdash B \wedge C$,
1.2. $B, \neg C \vdash \neg(B \wedge C)$,
1.3. $\neg B, C \vdash \neg(B \wedge C)$,
1.4. $\neg B, \neg C \vdash \neg(B \wedge C)$.

Разберем лишь подслучай 1.2:

1) $B, \neg C, B \wedge C \vdash \neg C$ (в силу свойств операции $\vdash$)
2) $B, \neg C, B \wedge C \vdash C$ (удалении конъюнкции)
3) $B, \neg C \vdash \neg(B \wedge C)$ (введение отрицания)

В подслучаях 1.3, 1.4 выводы строятся аналогично, подслучай 1.1 – правило введение конъюнкции.

Случаи 2) – 4) рассматриваются аналогично. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть A – тождественно истинная формула, составленная из букв $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Будем считать, что $n = 3$. Доказательство в общем случае проводится аналогично.

Пропозициональные переменные могут принимать следующии значения:

$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 1$
$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 0$
$P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 1$
$P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 0$
$P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = 1$
$P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = 0$

$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 1$
$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$.

Тогда согласно предыдущей лемме:
$P_1, P_2, P_3 \vdash A$
$P_1, P_2, \neg P_3 \vdash A$
$P_1, \neg P_2, P_3 \vdash A$
$P_1, \neg P_2, \neg P_3 \vdash A$
$\neg P_1, P_2, P_3 \vdash A$
$\neg P_1, P_2, \neg P_3 \vdash A$
$\neg P_1, \neg P_2, P_3 \vdash A$
$\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3 \vdash A$.

Применяем правило удаления дизъюнкции к парам формул 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8:
$P_1, P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$P_1, \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$\neg P_1, P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$\neg P_1, \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$.

Еще раз применяем правило удаления дизъюнкции к только что полученным парам формул 1-2 и 3-4:
$P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$\neg P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$.

Последний раз применяем правило удаления дизъюнкции, после этого используем закон исключенного третьего:
$P_1 \vee \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2, P_3 \vee \neg P_3 \vdash A$
$\vdash A$. $\square$

Эквивалентные формулы. Две формулы исчисления высказываний A и B называются *равносильными* (обозначается $A \dashv\vdash B$), если $A \vdash B$ и $B \vdash A$.

Следствие (теоремы о полноте исчисления высказываний). $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $A \dashv\vdash B$.

Доказательство. Необходимость ($\Rightarrow$): Пусть $A \sim B$. Тогда таблицы истинности формул A и B совпадают. Значит, формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ тождественно истинна. Следовательно, по теореме о полноте она доказуема:
$\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$

По правилу удаления конъюнкции :
$(A \to B) \wedge (B \to A) \vdash A \to B$,
$(A \to B) \wedge (B \to A) \vdash B \to A$.

Значит, доказуемы $A \to B$, $B \to A$: $\vdash A \to B$, $\vdash B \to A$.

Или, по правилу удаления импликации: $A \vdash B$, $B \vdash A$.

В соответствии с определением равносильных формул: $A \dashv\vdash B$.

Достаточность ($\Leftarrow$): Пусть $A \dashv\vdash B$. Тогда, по определению равносильных формул, $A \vdash B$, $B \vdash A$.

По правиду введения импликации: $\vdash A \to B$, $\vdash B \to A$.

По правилу введения конъюнкции: $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Значит, указанная формула тождественно истинна.

Предположив, что A и B имеют разные таблицы истинности, придем к противоречию с тождественной истинностью формулы $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Следовательно, A и B имеют одинаковые таблицы истинности, то есть $A \sim B$. $\square$

3. Логика предикатов

Лекция 6. Основные понятия логики предикатов.

Аннотация: В данной лекции рассматриваются основные понятия логики предикатов: предикат, кванторы, свободные и связанные переменные, термы, формулы, подформулы. Приводятся понятия сигнатуры, интерпретации сигнатуры, модели. Даются понятия тождественной истинности, тождественно ложности, выполнимости формул логики предикатов.

Ключевые слова: предикат, кванторы, свободные и связанные переменные, термы, формулы, сигнатура, интерпретация, модель, тождественно истинные и выполнимые формулы.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.

3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.

5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf

6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/

7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/

10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Предикат. Кванторы. Свободные и связанные переменные.
2. Терм, атомарная формула, формула логики предикатов.

3. Сигнатура, интерпретация, модель.
4. Тождественно истинные, тождественно ложные, выполнимые формулы логики предикатов.

Пусть задано некоторое множество M и $A : M^n \to \{0, 1\}$ – функция, которая принимает значение истина или ложь на каждом наборе значений переменных, то есть функция, которая при подстановке переменных становится высказыванием (истинным или ложным). Такие функции называют *предикатами* от соответствующего числа переменных.

Если $n = 0$, то предикат является высказыванием.

Пусть $A : M^n \to \{0, 1\}$ – предикат от n переменных, тогда $\exists x_i A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\forall x_i A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикаты от $n-1$ переменной, где $\exists$ и $\forall$ – кванторы существования и всеобщности соответственно.

Если $A(x)$ – предикат от одной переменной, заданный на множестве M, то $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ – высказывания, причем $\forall x A(x)$ – истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно для любого $x \in M$ и $\exists x A(x)$ – истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно при некотором $x \in M$.

Переменная, не связанная никаким квантором, называется свободной. Переменная, связанная либо квантором всеобщности, либо квантором существования, называется связанной.

Язык логики предикатов:

1) предметные переменные. Будем их обозначать малыми латинскими буквами, возможно с индексами: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots,$
2) логические символы $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists,$
3) вспомогательные символы: запятая, открывающаяся скобка (, закрывающаяся скобка),
4) символы сигнатуры Σ, то есть
а) предикатные символы: $A^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), B^k(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots,$
б) функциональные символы: $f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), g^k(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots$

Для каждого символа как предикатного, так и функционального указывается его местность, то есть число переменных, от которых он зависит. Нульместный предикатный символ называется символом высказываний, нульместный функциональный символ – символом константы.

Интерпретация. *Интерпретацией сигнатуры Σ на множестве M* называется сопоставление каждому символу из Σ некоторой функции

$f : M^n \to M$ (для функционального символа) или $A : M^n \to \{0, 1\}$ (для предикатного символа).

Модель. *Моделью сигнатуры* Σ называется набор $\langle M, f_1, f_2, \ldots, f_n, A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$, где M – непустое множество (называемое универсумом модели), а $f_1, f_2, \ldots, f_n, A_1, A_2, \ldots, A_k$ – интерпретация сигнатуры Σ на этом множестве.

Терм. Понятие терма вводится индуктивно:
1) каждая предметная переменная – терм,
2) каждый символ константы – терм,
3) если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы и f – n–местный функциональный символ, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ также терм.

Атомарная формула. Атомарной формулой называется выражение $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где A – n–местный предикатный символ, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы.

Формула. Свободное и связанное вхождение переменной в формулу. Понятие формулы вводится индуктивно. Вместе с определением формулы, дадим определение свободной и связанной переменной:
1) атомарная формула есть формула, каждая предметная переменная, входящая в атомарную формулу, входит в нее свободно,
2) пусть A – формула, тогда $\neg A$ – формула, переменные, которые были в A свободны, в $\neg A$ также свободны, которые были в A связанны, в $\neg A$ также связанны,
3) пусть A и B – формулы, причем переменные, которые входят в одну из формул свободно, не могут входить в другую связанно. Тогда $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ – формулы, причем свободные переменные совпадают со свободными переменными, а связанные – со связанными переменными формул A и B,
4) Пусть $A(x)$ – формула, содержащая переменную x свободно, тогда $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ – формулы содержащие переменную x связанно.

Формула называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных.

Формула A называется *тождественно истинной* , если она принимает значение истина на любой модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при любых значениях входящих в нее свободных переменных.

Формула A называется *выполнимой*, если она принимает значение истина на некоторой (хотя бы одной) модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при некоторых значениях входящих в нее свободных переменных.

Формула A называется *тождественно ложной*, если она принимает значение ложь на любой модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, при любых значениях входящих в нее свободных переменных.

Лекция 7. Эквивалентные формулы логики предикатов. Пренексная (предваренная) нормальная форма.

Аннотация: В данной лекции дается определение эквивалентных формул логики предикатов и приводятся основные эквивалентности. Также рассматривается нормальная форма формулы логики предикатов, называемая пренексной. Доказывается, что для каждой формулы существует эквивалентная ей формула, находящаяся в пренексной нормальной форме.

Ключевые слова: эквивалентные формулы, пренексная (предваренная) нормальная форма.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.
4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.
5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf
6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/
7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf
9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/
10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Эквивалентые формулы логики предикатов. Основные пары эквивалентных формул логики предикатов.
2. Пренексная (предваренная) нормальная форма.
3. Теорема о существовании пренексной (предваренной) нормальной формы.

Эквивалентность формул.

Формулы A и B называются *эквивалентными на модели* M, если они принимают одинаковые истинностные значения на модели M при любых из универсума модели значениях входящих в них свободных переменных.

Формулы A и B называются *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если они принимают одинаковые истинностные значения на любой модели M, сигнатура которой содержит сигнатуру формул, при любых значениях входящих в них свободных переменных.

Эквивалентные формулы логики предикатов:

1) $\neg\forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$
2) $\neg\exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$
3) $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \sim \forall x(A(x) \wedge B(x))$
4) $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x(A(x) \vee B(x))$
5) $\forall x A(x) \wedge B \sim \forall x(A(x) \wedge B)$
6) $\exists x A(x) \wedge B \sim \exists x(A(x) \wedge B)$
7) $\forall x A(x) \vee B \sim \forall x(A(x) \vee B)$
8) $\exists x A(x) \vee B \sim \exists x(A(x) \vee B)$
9) $\forall x A(x) \to B \sim \exists x(A(x) \to B)$
10) $\exists x A(x) \to B \sim \forall x(A(x) \to B)$
11) $A \to \forall x B(x) \sim \forall x(A \to B(x))$
12) $A \to \exists x B(x) \sim \exists x(A \to B(x))$
13) $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \sim \exists y \forall z(A(y) \to B(z))$
14)$\forall x A(x) \to \exists x B(x) \sim \exists x(A(x) \to B(x))$
15) $\exists x A(x) \to \exists x B(x) \sim \forall y \exists z(A(y) \to B(z))$
16) $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \sim \forall y \forall z(A(y) \to B(z))$

Доказательство. Для доказательства эквивалентности необходимо показать, что на любой модели, сигнатура которой содержит сигнатуру формул, при любых значениях свободных переменных обе формулы либо истинны, либо ложны одновременно. Докажем, например, эквивалентности 1 и 4. Остальные эквивалентности логики предикатов доказываются аналогично.

1) Пусть M – модель, сигнатура которой содержит предикат $A(x)$. Если предикат содержит, кроме переменной x, другие свободные переменные, то фиксируем произвольные значения для них.

Пусть $\neg\forall x A(x)$ истинна при заданной фиксации свободных переменных, тогда $\forall x A(x)$ – ложь. То есть формула $A(x)$ ложна при некотором значении x. Тогда при этом значении x формула $\neg A(x)$ истинна. Значит, истинна и формула $\exists x \neg A(x)$.

Пусть теперь истинна формула $\exists x \neg A(x)$ при заданной фиксации свободных переменных. Тогда формула $\neg A(x)$ истинна при некотором значении x. Значит, формула $A(x)$ ложна при этом значении x. По смыслу квантора всеобщности, ложна формула $\forall x A(x)$. Следовательно, формула $\neg\forall x A(x)$ истинна.

4) Пусть M – модель, сигнатура которой содержит предикаты $A(x)$ и $B(x)$. Если предикаты содержат другие свободные переменные, кроме переменной x, то фиксируем произвольные значения для них.

Пусть $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ – ложна при заданных значениях свободных переменных. Тогда ложна как формула $\exists x A(x)$, так и формула $\exists x B(x)$. По смыслу квантора существования, $A(x)$ и $B(x)$ ложны при любом значении x. Значит, при любом x ложна формула $A(x) \vee B(x)$. По смыслу квантора существования, формула $\exists x (A(x) \vee B(x))$ также ложна.

Пусть $\exists x (A(x) \vee B(x))$ ложна при заданных значениях свободных переменных. Тогда $A(x) \vee B(x)$ ложна при любом значении x. Значит, $A(x)$ и $B(x)$ ложны при любом значении x. Отсюда следует, что ложны формулы $\exists x A(x)$ и $\exists x B(x)$ и ложна их дизъюнкция $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$. $\square$

Замечание. Следующие пары формул не эквивалентны (придумать модель, в которой одна формула принимает значение истина, а другая – ложь):
1) $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ и $\forall x (A(x) \vee B(x))$,
2) $\exists x (A(x) \wedge B(x))$ и $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.

Пренексная (предваренная) нормальная форма.
Формула находится в *пренексной (предваренной) нормальной форме*, если она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nA(x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots,y_k)$, где Q_i, $i=\overline{1.n}$, – кванторы, $A(x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots,y_k)$ – формула, не содержащая кванторов.

Теорема. Для каждой формулы логики предикатов A существует эквивалентная ей формула B, находящаяся в пренексной нормальной форме.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по количеству k логических знаков и кванторов, участвующих в построение формулы.

Базис индукции: при $k=0$ утверждение теоремы очевидно, поскольку формула B совпадает с формулой A.

Предположение индукции: допустим, теорема доказана для формул с $\le k$ логическими знаками и кванторами.

Шаг индукции: докажем теорему для формул с $k+1$ логическими знаками и кванторами.

Рассмотрим последний логический знак или квантор, входящий в формулу:
1) $A=\neg A_1$,
2) $A=A_1\vee A_2$,
3) $A=A_1\wedge A_2$,
4) $A=A_1\to A_2$,
5) $A=\exists xA_1(x)$,
6) $A=\forall xA_1(x)$,
причем формулы A_1,A_2 содержат $\le k$ логических знака и квантора и для них теорема доказана. Значит, для них существуют эквивалентные формулы, находящиеся в пренексной нормальной форме. Обозначим их через B_1,B_2: $A_1\sim B_1$ и $A_2\sim B_2$. Можно считать, что связанные переменные, входящие в формулу B_1, не совпадают со связанными переменными, входящими в формулу B_2 (иначе их можно переименовать).

Пусть B_1,B_2 имеют вид:

$$B_1=Q_1y_1Q_2y_2\dots Q_ny_nC_1(y_1,y_2,\dots,y_n,u_1,u_2,\dots,u_{l_1}),$$

$$B_2=R_1z_1R_2z_2\dots R_mz_mC_2(z_1,z_2,\dots,z_m,v_1,v_2,\dots,v_{l_2}),$$

где $C_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_{l_1}), C_2(z_1, z_2, \ldots, z_m, v_1, v_2, \ldots, v_{l_2})$ – формулы, не содержащие кванторов. Чтобы не загромождать запись, будем писать просто C_1, C_2, не указывая переменные.

В каждом из 6 случаев построим формулу, эквивалентную A и находящуюся в пренексной нормальной форме, используя эквивалентности логики предикатов. Последняя формула в цепочке эквивалентностей находится в пренексной нормальной форме.

1) $A = \neg A_1 \sim \neg B_1 \sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \ldots Q'_n y_n \neg C_1$, где

$$Q'_i = \begin{cases} \exists, \text{ если } Q_i = \forall, \\ \forall, \text{ если } Q_i = \exists \end{cases}.$$

2) $A = A_1 \vee A_2 \sim B_1 \vee B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n C_1 \vee R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m (C_1 \vee C_2)$.
3) $A = A_1 \wedge A_2 \sim B_1 \wedge B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n C_1 \wedge R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m (C_1 \wedge C_2)$.
4) $A = A_1 \to A_2 \sim B_1 \to B_2 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n C_1 \to R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m C_2 \sim$
$\sim Q'_1 y_1 Q'_2 y_2 \ldots Q'_n y_n R_1 z_1 R_2 z_2 \ldots R_m z_m (C_1 \to C_2)$.
5) $A = \exists x A_1(x) \sim \exists x B_1(x) = \exists x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n C_1$.
6) $A = \forall x A_1(x) \sim \forall x B_1(x) = \forall x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n C_1$. $\square$

3. Исчисление предикатов

Лекция 8.Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Теорема дедукции.

Аннотация: В данной лекции рассматривается аксиоматическая логическая система, которая естественным образом связана с логикой предикатов. Приводятся аксиомы и правила вывода этой системы, понятия доказуемой и выводимой формул. Доказывается теорема дедукции исчисления предикатов.

Ключевые слова: аксиомы исчисления высказываинй, правила вывода исчисления предикатов, доказуемая формула, выводимая формула, теорема дедукции.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.

3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.

4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.

5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf

6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/

7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/

8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf

9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/

10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.

2. Понятие доказуемой и выводимой формулы.

3. Теорема дедукции исчисления предикатов.

Опишем логическое исчисление, которое соответствует логике предикатов. Язык и понятие формулы исчисления предикатов совпадают с соответствующими понятиями логики предикатов.

Аксиомы исчисления предикатов:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \wedge B \to A$
4. $A \wedge B \to B$
5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
10. $\neg\neg A \to A$
11. $\forall x A(x) \to A(y)$
12. $A(x) \to \exists y A(y)$

Правила вывода исчисления предикатов:

1) Modus Ponens: $\frac{A, A \to B}{B}$

2) $\forall$-правило: $\frac{C \to A(x)}{C \to \forall x A(x)}$, где C не содержит переменной x,

3) $\exists$-правило: $\frac{A(x) \to C}{\exists x A(x) \to C}$, где C не содержит переменной x,

4) правило замены свободных переменных: свободную переменную можно заменить всюду, где она входит в формулу, на новую переменную, связанно не входящую в формулу,

5) правило замены связанных переменных: связанную переменную в области действия квантора и в самом кванторе можно заменить на новую переменную, свободно не входящую в формулу.

Доказуемые формулы. Формула D называется *доказуемой (теоремой)*, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо получается из предыдущих формул при помощи одного из правил вывода. Последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ называется доказательством. Число n называется длиной доказательства. Если D доказуема, то обозначаем $\vdash D$.

Выводимая формула. Формула D называтся *выводимой из формул* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если существует конечная последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что $D_n = D$ и каждая D_i, $i = \overline{1.n}$, либо аксиома, либо одна из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода. Последовательность формул $D_1, D_2, \ldots, D_n$ называется выводом формулы D из формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Если D выводима из $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то записывают $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash D$.

Теорема дедукции. Пусть Γ – некоторое конечное множество формул исчисления предикатов, A, B – произвольные формулы исчисления предикатов и $\Gamma, A \vdash B$, причем в процессе вывода переменные, входящие в множество формул Γ, A не изменяются, то есть если они были свободными, то остаются свободными, если были связанными, то остаются связанными. Тогда $\Gamma \vdash A \to B$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по длине вывода B из Γ, A и во многом повторяет доказательство теоремы дедукции для исчисления высказываний.

Базис индукции $n = 1$ совпадает с базисом индукции теоремы для исчисления высказываний.

Предположение индукции: допустим, что теорема доказана для случая, когда длина вывода B из Γ, A не превосходит n.

Шаг индукции: докажем теорему для случая, когда длина вывода B из Γ, A есть $n+1$. В силу определения выводимости, на $n+1$ шаге B может быть получена в следующих случаях:

1) B – аксиома,

2) $B = A$,

3) $B \in \Gamma$,

4) $B = MP(P_i, P_j)$,

5) $B = \forall$–правило(P_i),

6) $B = \exists$–правило(P_i),

7) B получена по правилу замены свободной переменной,

8) B получена по правилу замены связанной переменной.

Случаи 1)–4) доказываются также, как в теореме дедукции для исчисления высказываний.

5) $B = \forall$–правило(P_i) и $i \leq n$. Тогда $P_i = C \to D(x)$ и $B = C \to \forall x D(x)$, причем формула C не содержит переменной x.

По предположению индукции, для P_i теорема доказана. Значит, $\Gamma \vdash A \to P_i$, то есть $\Gamma \vdash A \to (C \to D(x))$.

В силу известной из исчисления высказываний эквивалентности: $\Gamma \vdash A \wedge C \to D(x)$.

Поскольку формула $A \wedge C$ переменной x не содержит, то можно воспользоваться $\forall$–правилом: $\Gamma \vdash A \wedge C \to \forall x D(x)$.

Воспользуемся еще раз эквивалентностью исчисления высказываний: $\Gamma \vdash A \to (C \to \forall x D(x))$ или, что тоже самое, $\Gamma \vdash A \to B$.

6) $B = \exists$–правило(P_i) и $i \leq n$. Тогда $P_i = D(x) \to C$ и $B = \exists x D(x) \to C$, причем формула C не содержит переменной x.

По предположению индукции, для P_i теорема доказана. Значит, $\Gamma \vdash A \to P_i$ или $\Gamma \vdash A \to (D(x) \to C)$.

В силу известной из исчисления высказываний эквивалентности: $\Gamma \vdash D(x) \to (A \to C)$.

Так как формула $A \to C$ переменной x не содержит, то можно воспользоваться $\exists$–правилом: $\Gamma \vdash \exists x D(x) \to (A \to C)$.

Воспользуемся еще раз эквивалентностью исчисления высказываний: $\Gamma \vdash A \to (\exists x D(x) \to C)$ или, что тоже самое, $\Gamma \vdash A \to B$.

Случаи, когда формула B получена по правилу замены свободной переменной или по правилу замены связанной переменной, очевидны. $\Box$

Лекция 9. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов.

Аннотация: Данная лекция посвящена вопросам непротиворечивости и полноты исчисления предикатов.

Ключевые слова: непротиворечивость, полнота.

Методические указания по изучению темы: Вначале необходимо изучить теоретическую часть, в которой приводятся необходимые определения и основные теоремы с доказательством. Изучая материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего. После изучения лекционного материала следует ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, предлагаемые для самостоятельного решения.

Список литературы и интернет-ресурсы:

1. Арсланов М. М., Калимуллин И. Ш. Элементы математической логики//Казань: КГУ, 2007. – 48 с.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // СПб.: ЛАНЬ, 2004. - 336 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов//М.: Академия, 2004. – 448 с.
4. Клини С.К. Математическая логика//М.:URSS: ЛКИ, 2008г. – 480с.
5. http://old.kpfu.ru/f5/k2/bin_files/logika!13.pdf
6. http://e.lanbook.com/view/book/4041/
7. http://e.lanbook.com/view/book/3514/
8. http://libweb.ksu.ru/ebooks/50-ITIS/50_006_A5-000446.pdf
9. http://e.lanbook.com/view/book/2242/
10. http://e.lanbook.com/view/book/231/

Вопросы для изучения:

1. Непротиворечивость исчисления предикатов.
2. Полнота исчисления предикатов.
3. Теорема Гёделя (о существовании модели).

Логическое исчисление *непротиворечиво*, если не существует такой формулы A, что доказуемо A и доказуемо $\neg A$ (то есть $\vdash A$ и $\vdash \neg A$).

Теорема 1. Любая доказуемая формула исчисления предикатов тождественно истинна.

Доказательство. Необходимо доказать:

1. Каждая аксиома тождественно истинна.

Для аксиом 1–10 проверка построением таблиц истинности.

Допустим, что 11 аксиома не тождественно истинна. Тогда в некоторой модели при некоторых значениях свободных переменных она принимает значение ложь, то есть $\forall x A(x)$ есть истина, а $A(y_0)$ – ложь. Но, по определению квантора $\forall$, формула $\forall x A(x)$ ложна. Получили противоречие, следовательно 11 аксиома – тождественно истинна.

Тождественная истинность аксиомы 12 доказывается аналогично.

2. Примененение правил вывода к тождественно истинным формулам дает тождественно истинную формулу.

Для правила Modus Ponens уже доказано в исчислении высказываний.

Докажем для $\forall$–правила. Пусть $C \to A(x)$ – тождественно истинна. Допустим, что формула $C \to \forall x A(x)$ не тождественно истинна. Значит, в некоторой модели при некоторых значениях свободных переменных она принимает значение ложь, то есть C есть истина, $\forall x A(x)$ – ложь. По смыслу квантора всеобщности, $A(x)$ принимает значение ложь хотя бы при одном значении x (допустим при $x = x_0$). Но тогда формула $C \to A(x_0)$ ложна, противоречие с тождественной истинностью формулы $C \to A(x)$. Значит, заключение $\forall$–правила, формула $C \to \forall x A(x)$, тождественно истинна.

Для $\exists$–правила доказательство аналогично. $\square$

Теорема 2 (о непротиворечивости исчисления предикатов). Исчисление предикатов непротиворечиво.

Доказательство. Если исчисление предикатов противоречиво, то существует формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. Тогда A – тождественно истинна и $\neg A$ –тождественно истинна. Противоречие с тем, что отрицание тождественно истинной формулы есть тождественно ложная формула. $\square$

Теорема 3 (о полноте исчисления предикатов). Исчисление предикатов полно в том смысле, что любая тождественно истинная формула доказуема.

Необходимость доказана в теореме 1. Для доказательства достаточности приведем теорему Геделя о существовании модели без доказательства.

Теорема Геделя 4(о существовании модели). Пусть Γ – счетное непротиворечивое множество формул. Тогда существует модель той же сигнатуры, что и формулы из Γ такая, что все формулы из Γ в этой модели при некоторых значениях свободных переменных принимают значение истина.

Доказательство теоремы 3. Пусть A – тождественно истинная формула, тогда $\neg A$ – тождественна ложна, тогда она не имеет модели. Следовательно, по теореме Геделя (о существовании модели), она противоречива, то есть существует формула B такая, что

$\neg A \vdash B$

$\neg A \vdash \neg B$.

По правилу введения отрицания: $\vdash \neg\neg A$.

По правилу удаления отрицания: $\vdash A$. $\square$